UNIV. BEOGRAD. PUBL. ELEKTROTEHN. FAK.
Ser. Mat. Fiz. № 542 (1976), 1—80.

542. PRILOZI TEORIJI LINEARNIH CIKLIČNIH FUNKCIONALNIH JEDNAČINA

Budimir M. Zarić

PREDGOVOR

D'ALEMBERT je objavio 1747. godine dva rada u kojima se prvi put javljaju funkcionalne jednačine. Posle toga, mnogobrojni matematičari bavili su se problemima funkcionalnih jednačina. Među njima mogu se navesti sledeća poznata imena: EULER, GAUSS, CAUCHY, ABEL, WEIERSTRASS, DARBOUX, HILBERT, FRECHET, itd.

Naučna istraživanja u teoriji funkcionalnih jednačina, zbog njene važnosti, ne samo da su nastavljena sve do današnjih dana, već su i pojačana korišćenjem najnovijih rezultata drugih disciplina savremene matematike. U teoriji funkcionalnih jednačina formirani su razni pravci, škole i uže discipline.

Jugoslovenski matematičari dali su određene doprinose razvoju teorije funkcionalnih jednačina. Kao centri aktivnosti u ovoj oblasti u novije vreme ističu se Beograd, Zagreb i Sarajevo.

Ovaj rad posvećen je tretiranju opštih i specijalnih problema rešavanja linearnih cikličnih jednačina. On se nadovezuje na klasične i neke novije rezultate teorije linearnih funkcionalnih jednačina. Izlaganje koje sledi sastoji se iz sledećih delova (glava):

I. Uvodna razmatranja i neki opšti rezultati.

Ova glava u prvom odeljku, pored preciziranja objekata razmatranja prve četiri glave, sadrži nekoliko jednostavnih rezultata, koji se koriste u celom radu, i dokaz fundamentalne teoreme GHERMĂNESCUa sa nekim specifičnostima. Drugi odeljak iste glave sadrži jednu teoremu o specijalnom slučaju — binomnoj jednačini i nekoliko pomoćnih rezultata.

II. Rezultati dobijeni matričnom metodom S. B. Prešića.

Posle ekspozicije rezultata do kojih je svojom matričnom metodom došao S. B. PREŠIĆ, u ovoj glavi dobijena je sledeća formula koja obuhvata linearna opšta rešenja jednačine $E(f)=0$:

$$F=C(t_1, \ldots, t_l)\Pi;$$

u kojoj je $C(t_1, \ldots, t_l)$ sa proizvoljnim parametrima $t_1, \ldots, t_l$, opšti oblik svih cikličnih matrica C koje zadovoljavaju jednačinu $AC=O$.

Ova teorema dokazana je uz pomoć dva prethodna rezultata, koji je u isto vreme i dopunjuju.

III. Reproduktivno rešenje jednačine $E(f)=0$.

Posle navođenja definicije pojma opšteg reproduktivnog rešenja jednačine $E(f)=0$, u ovoj glavi dokazuje se teorema kojom se tvrdi da svaka ovakva jednačina ima (u određenom smislu) jedinstveno opšte reproduktivno rešenje i daje se formula za njegovo određivanje.

IV. Primene prethodnih rezultata na partikularne slučajeve.

U ovoj glavi se, konkretizacijom prethodnih opštih rezultata i korišćenjem specifičnih, partikularnih metoda, u slučajevima $n=3$, 4 i 6 tretira problem rešavanja jednačine $E(f)=0$ i izražavanje formulama njenog opšteg i opšteg reproduktivnog rešenja.

V. Ciklične linearne nehomogene jednačine.

U ovoj glavi tretira se problem rešavanja jednačine oblika $E(f)=g$, gde je g data funkcija. Dobijen je potreban uslov njene rešivosti u obliku $CG=O$, gde je C bilo koja ciklična matrica sa osobinom $AC=O$ kao i jedan matrični oblik opšteg rešenja posmatrane jednačine za slučaj kada su ispunjeni određeni uslovi. Ovome su priključena razmatranja za slučajeve $n=3$, 4 i 6, analogno onima u prethodnoj glavi

VI. Neki rezultati koji se odnose na paraciklične funkcionalne jednačine.

Ovde se razmatra problem rešavanja izvesnih klasa parakličnih funkcionalnih jednačina. Za neke od tih klasa dobijeni su kompletni a za neke parcijalni rezultati.

VII. Bibliografija.

Bibliografija se sastoji od 34 jedinice koje su u tekstu citirane ili korišćene kao opšta literatura o funkcionalnim jednačinama.

*

Želim da zahvalim profesoru D. S. Mitrinoviću za podršku koju mi je pružio u toku izrade ove disertacije.

Takođe zahvaljujem profesorima S. B. Prešiću i D. D. Adamoviću na savetima i sugestijama, kao i profesoru P. M. Vasiću na pomoći u korišćenju literature.

Glava I: UVODNA RAZMATRANJA I NEKI OPŠTI REZULTATI

1. Neka je S neprazan skup, θ dato preslikavanje iz S u S sa osobinom $\theta^n(M)=M\,(M\in S)$, n prirodan broj. Za funkciju $\Pi: S\to\mathbf{R}$ (ili $\Pi: S\to\mathbf{C}$) stavimo $\Pi^k=\Pi(\theta^k M)$ $(k=0, 1, \ldots, n-1;$ θ^0 identično preslikavanje).

Dokažimo najpre sledeću činjenicu.

Lema 1. *Ako postoji $M_0\in S$ takvo da su $\theta^k M_0$ međusobno različiti elementi, jednakost*

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k \Pi^k=0, \quad \alpha_k\in\mathbf{R} \text{ (ili } \alpha_k\in\mathbf{C}) \tag{1.1}$$

važi za svaku funkciju Π ako i samo ako je $\alpha_k=0$ za $k=0, 1, \ldots, n-1$.

Dokaz. Ako su svi $\alpha_k=0\,(k=0, 1, \ldots, n-1)$ jednakost (1.1) očigledno važi za svako Π.

Pretpostavimo da (1.1) važi za svako Π. Neka je, za M_0 o kome je reč u formulaciji leme 1,

$$\Pi(M_0)=1, \quad \Pi^k(M_0)=\Pi(\theta^k M_0)=0 \quad (k=1, \ldots, n-1),$$

$$\Pi(M)=0, \quad M\notin\{\theta^k M_0;\ k=0, 1, \ldots, n-1\}=S_{M_0}.$$

Ovim je jednoznačno definisana funkcija Π na skupu S, budući da $M\notin S_{M_0} \Rightarrow \theta(M)\notin S_{M_0}$. Sa ovako određenim Π, imamo

$$\alpha_0+0\cdot\alpha_1+\cdots+0\cdot\alpha_{n-1}=0.$$

Dakle, $\alpha_0=0$.

Na sličan način može se odrediti Π tako da bude, za fiksirano $k\in\{1, \ldots, n-1\}$,

$$\Pi^k(M_0)=1 \quad \text{i} \quad \Pi^\nu(M_0)=0, \quad \nu\neq k.$$

Zamenjujući ovo Π u (1.1) dobija se $\alpha_k=0$ $(k=1, \ldots, n-1)$.

Neposredna posledica prethodne leme je sledeća

Lema 2. *Ako je ispunjen uslov leme* 1, *tada važenje jednakosti*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \Pi^k = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \Pi^k$$

za svako Π *povlači* $\alpha_k = \beta_k \, (k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

M. GHERMĂNESCU je u radu [7] posmatrao jednačine

$$E(f) \equiv a_0 f(M) + a_1 f(\theta M) + \cdots + a_{n-1} f(\theta^{n-1} M) = 0 \quad (M \in S), \tag{1.2}$$

$$a_0 f(M) + a_1 f(\theta M) + \cdots + a_{n-1} f(\theta^{n-1} M) = g(M), \tag{1.2'}$$

gde su $a_i \, (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ realni (ili kompleksni) brojevi, nepoznata funkcija $f: S \to \mathbf{R}$ (ili $f: S \to \mathbf{C}$), g je data funkcija.

Jednačine (1.2) i (1.2′) su ciklične, linearne sa konstantnim koeficijentima, pri čemu je (1.2) homogena, a (1.2′) nehomogena.

Ako se $f(\theta^k M)$ $(M \in S;\ k = 0, 1, \ldots, n-1)$ označi sa f^k (θ^0 identičko preslikavanje; $f^0 = f$), jednačine (1.2) i (1.2′) dobijaju redom oblike

$$E(f) \equiv a_0 f + a_1 f^1 + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} = 0, \tag{1.3}$$

$$a_0 f + a_1 f^1 + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} = g. \tag{1.3'}$$

Polinom $E(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$ zove se karakterističan polinom jednačine (1.3). Jednačina $E(x) = 0$ zove se karakteristična jednačina jednačine (1.3).

Ako se u (1.3) stavi sukcesivno $M, \theta M, \ldots, \theta^{n-1} M$ mesto M, dobija se sistem jednačina

$$\begin{aligned} a_0 f + a_1 f^1 + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} &= 0, \\ a_{n-1} f + a_0 f^1 + \cdots + a_{n-2} f^{n-1} &= 0, \\ &\vdots \\ a_1 f + a_2 f^1 + \cdots + a_0 f^{n-1} &= 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

ili u matričnoj formi

$$AF = O, \tag{1.5}$$

gde je

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & & a_{n-2} \\ \vdots & & & \\ a_1 & a_2 & & a_0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} f \\ f^1 \\ \vdots \\ f^{n-1} \end{bmatrix}$$

Sistem (1.4) je sistem linearnih, homogenih algebarskih jednačina sa nepoznatim $f, f^1, \ldots, f^{n-1}$.

Da bi ovaj sistem imao i netrivijalna rešenja potreban i dovoljan uslov je

$$\det A = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & & a_{n-2} \\ \vdots & & & \\ a_1 & a_2 & & a_0 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.6}$$

Za determinantu (1.6) važi

$$\det A = E(\varepsilon_1)\cdot E(\varepsilon_2)\cdots E(\varepsilon_n), \tag{1.6'}$$

gde su $\varepsilon_i (i=1, \ldots, n)$ različita rešenja binomne jednačine

$$b(x) = 1 - x^n = 0. \tag{1.7}$$

Iz ovog sledi da jednačina (1.2) ima netrivijalna rešenja ako i samo ako karakteristična jednačina $E(x)=0$ ima zajednička rešenja sa binomnom jednačinom (1.7).

M. GHERMĂNESCU je [**8**] dokazao sledeću teoremu

Teorema (GHERMĂNESCU). *Neka je*

$$1 - x^n = D(x)\cdot F(x),$$

gde je $D(x)$ najveći zajednički delilac za polinome $b(x) = 1 - x^n$ i $E(x)$.

Tada je opšte rešenje jednačine

$$E(f) = 0$$

dato formulom

$$f = F(U),$$

gde je U proizvoljno preslikavanje skupa S u skup realnih (ili komplesnih) brojeva. $F(U)$ je funkcija

$$b_0 U(M) + b_1 U(\theta M) + \cdots + b_s U(\theta^s M) \quad (M \in S)$$

ili (prema uvedenom dogovoru) funkcija

$$b_0 U + b_1 U^1 + \cdots + b_s U^s$$

ako je

$$F(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_s x^s.$$

S. B. PREŠIĆ i B. M. ZARIĆ u radu [**19**] dali su prostiji i precizniji dokaz ove teoreme nego M. GHERMĂNESCU u [**8**].

U ovom dokazu koriste se sledeće dve činjenice:

1° Ako je $f=0$, tada je $P(f)=0$ za svaki polinom P.

2° Ako je $R(x) = P(x)\cdot Q(x)$ (P, Q, R polinomi), tada važi

$$R(f) = P\big(Q(f)\big)$$

za svaku funkciju f.

Tvrdnje 1° je cčigledno, a tvrđenje 2° se dokazuje na sledeći način:

Neka je $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{p} a_k x^k$, $\quad Q(x) = \sum\limits_{l=0}^{q} b_l x^l$, tada je

$$P\big(Q(f)\big) = \sum_{k=0}^{p} a_k Q(f)^k = \sum_{k=0}^{p} a_k \Big(\sum_{l=0}^{q} b_l f^l\Big)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{p} a_k \sum_{=}^{q} b_l f^{l+k} = R(f),$$

što je trebalo dokazati.

Za polinome $D(x)$, $b(x)$ i $E(x)$ važi sledeći identitet

$$D(x)=P(x)E(x)+Q(x)b(x), \tag{1.8}$$

gde su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi.

Prema (1.8), jednačina $E(f)=0$ ekvivalentna je sa jednačinom $D(f)=0$.

Zaista, ako je $E(f)=0$, tada je, prema 1°, 2° i (1.8)

$$D(f)=P\big(E(f)\big)+Q(f-f^n)=0.$$

Obrnuto, ako je $D(f)=0$ i $E(x)=D(x)\cdot G(x)$, tada je

$$E(f)=G\big(D(f)\big)=0.$$

Dakle, $E(f)=0 \Leftrightarrow D(f)=0$.

Potom se dokazuje da je $f=F(U)$ (U proizvoljna funkcija) rešenje jednačine (1.3).

Zaista, imamo $D(f)=D\big(F(U)\big)=DF(U)=b(U)=0$, i odatle, prema prethodnom, $E(f)=0$.

Najzad se ustanovljava da formula $f=F(U)$ sadrži sva rešenja jednačine (1.3).

Zaista, polinomi $D(x)$ i $F(x)$ su uzajamno prosti, pa, prema BÉZOUTovoj teoremi, postoje polinomi $K(x)$ i $L(x)$ takvi da je

$$1=F(x)\cdot K(x)+L(x)\cdot D(x). \tag{1.9}$$

Na osnovu (1.9) imamo

$$f=F\big(K(f)\big)+L\big(D(f)\big). \tag{1.10}$$

Ako je f rešenje jednačine $E(f)=0$, tada je $L\big(D(f)\big)=0$, pa se iz (1.10) dobija

$$f=F\big(K(f)\big)=F(U), \quad U=K(f).$$

2. Binomna funkcionalna jednačina. Neka je: S neprazan skup; $L: S \to S$, operator čiji je period n, tj.

$$L^n=L^0=I;$$

$f: S \to \mathbf{C}$, nepoznata funkcija; $\mathbf{C}$ skup kompleksnih brojeva.

U svojoj monografiji [8] o funkcionalnim jednačinama M. GHERMĂNESCU je, polazeći od rezultata dobijenog za jednačinu

$$a_0 f(z)+a_1 f(Lz)+\cdots+a_{n-1} f(L^{n-1}z)=0, \tag{1.11}$$

izveo zaključak za binomnu jednačinu

$$f(z)=af(L^p z), \tag{1.12}$$

gde su a i a_i ($i=0, 1, \ldots, n-1$) kompleksni brojevi, i $p<n$ prirodan broj.

D. S. MITRINOVIĆ u radu [12] pošao je od jednačine (1.12) i našao formulu koja daje opšte rešenje ove jednačine. U istom radu, pored ostalog, dokazano je da se rešavanje opštije jednačine (1.11) može, pod izvesnim uslovima, svesti na rešavanje jednačine (1.12). Navodimo pomenute rezultate.

Teorema (MITRINOVIĆ). *Opšte rešenje funkcionalne jednačine*

$$f(z)=af(Lz),$$

gde $z\in S$, $L: S\to S$, $f: S\to \mathbf{C}$, $L^n=I$, $a^n=1$, *dato je formulom*

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{n} a^{\nu} g(L^{\nu} z),$$

gde je $g: S\to \mathbf{C}$ *proizvoljna funkcija.*

U slučaju $a^n\neq 1$, *ova jednačina ima samo trivijalno rešenje.*

U pomenutom radu data je i formula koja daje opšte rešenje funkcionalne jednačine

$$f(z)=af(L^p z),$$

gde je $p<n$ prirodan broj.

Taj rezultat glasi:

Opšte rešenje jednačine (1.12) *je*

$$f(z)=\sum_{\nu=1}^{n/d} a^{\nu} g(L^{\nu p} z),$$

ukoliko a zadovoljava uslov $a^{n/d}=1$, *gde je* $d=(n,p)$; *a u slučaju kad taj uslov nije zadovoljen jednačina* (1.12) *ima samo trivijalno rešenje.*

Ovi rezultati omogućuju da se nađe opšte rešenje u navedenim oblicima onih funkcionalnih jednačina koje se mogu svesti na binomnu jednačinu.

Autor je posmatrao neke od tih jednačina i dokazao da se jednačina (1.11) može svesti na jednačinu oblika

$$f(z)=\alpha f(Lz),$$

gde je α neko rešenje jednačine

$$x^n-1=0,$$

ako je rang matrice

$$A=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_{n-2} \\ \vdots & & \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

jednak $n-1$.

Da taj uslov nije potreban dokazano je metodom kontraprimera.

Leme i teoreme koje slede koristićemo kako u ovom odeljku, tako i na nekim mestima ovoga rada.

Lema 3. *Neka su* $P(x)$ *i* $Q(x)$ *uzajamno prosti polinomi. Tada je*

$$\big(P(f)=0\wedge Q(f)=0\big)\Leftrightarrow f=0.$$

Dokaz. Na osnovu pretpostavke da su polinomi $P(x)$ i $Q(x)$ uzajamno prosti izlazi da postoje polinomi $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ takvi da je

(1.13) $$1=\varphi(x)\cdot P(x)+\psi(x)\cdot Q(x).$$

Ako je $P(f)=0 \wedge Q(f)=0$, tada, na osnovu (1.13), imamo

$$f=\varphi(P(f))+\psi(Q(f))=0.$$

Ako je, pak, $f=0$, tada je očigledno $P(f)=0 \wedge Q(f)=0$.

Lema 4. *Neka je $D_1(x)$ najveći zajednički delilac za polinome $P(x)$ i $b(x)=1-x^n$ i $D_2(x)$ najveći zajednički delilac za polinome $Q(x)$ i $b(x)$. Tada $P(f)=0 \Rightarrow Q(f)=0$ ako i samo ako važi*

(1.14) $$(D_1)\subseteq(D_2),$$

gde (K) označava skup svih linearnih faktora polinoma $K(x)$.*

Primedba 1. Uslov (1.14) može se izraziti rečima „polinom $D_2(x)$ deljiv je polinomom $D_1(x)$".

Dokaz. Na osnovu pretpostavljenog, važe sledeće ekvivalencije jednačina:

(1.15) $P(f)=0 \Leftrightarrow D_1(f)=0 \wedge Q(f)=0 \Leftrightarrow D_2(f)=0$ (rasuđivanje na str. 6).

Pretpostavimo da važi sledeća inkluzija:

$$(D_1)\subseteq(D_2).$$

Treba dokazati da tada

$$P(f)=0 \Rightarrow Q(f)=0.$$

Zaista, iz $(D_1)\subseteq(D_2)$ sleduje

$$D_2(x)=D_1(x)\cdot S(x),$$

gde je $S(x)$ polinom, pa ako je $D_1(f)=0$, tada je $D_2(f)=S(D_1(f))=S(0)=0$.

Dakle, $D_1(f)=0 \Rightarrow D_2(f)=0$, pa prema (1.15) imamo

$$P(f)=0 \Rightarrow Q(f)=0.$$

Obrnuto, neka

(1.15') $$P(f)=0 \Rightarrow Q(f)=0.$$

Dokažimo da tada važi $(D_1)\subseteq(D_2)$.

Pretpostavka (1.15'), na osnovu (1.15) svodi se na implikaciju

(1.16) $$D_1(f)=0 \Rightarrow D_2(f)=0.$$

Ako ne bi važila inkluzija

$$(D_1)\subseteq(D_2),$$

tada bi bilo

$$(S_1)=(D_1)\setminus(D_2)\neq\varnothing,$$

gde je $S_1(x)$ polinom čiji je skup linearnih faktora $(D_1)\setminus(D_2)$.

Neka je $H\in(D_1)\setminus(D_2)$.

---

* Dva polinoma pri tome smatramo jednakim ukoliko se razlikuju multiplikativnom konstantom različitom od nule.

Kako su u tom slučaju polinomi $S_1(x)$ i $D_2(x)$ uzajamno prosti, to je $f=0$ jedino rešenje sistema funkcionalnih jednačina (lema 3)

$$S_1(f)=0 \wedge D_2(f)=0.$$

S druge strane, postoji $g \not\equiv 0$ takvo da je $H(g)=0$, tj. $S_1(g)=0$, odnosno $D_1(g)=0$, pa, prema (1.16) i $D_2(g)=0$.

Dakle, $g \not\equiv 0$ i $S_1(g)=0 \wedge D_2(g)=0$, što je u suprotnosti sa prethodnim zaključkom. Dobijena protivurečnost dokazuje tvrđenje.

Lema 5. *Potreban i dovoljan uslov da, sa oznakama iz leme* 4, *važi ekvivalencija jednačina*

$$P(f)=0 \Leftrightarrow Q(f)=0$$

jeste da su skupovi (D_1) *i* (D_2) *jednaki.*

Ovo tvrđenje sledi neposredno iz leme 4.

Teorema 1. *Dovoljan uslov da važi ekvivalencija*

$$E(f)=0 \Leftrightarrow Q(f)=0$$

jeste

$$Q(x)=S(x)\cdot D(x),$$

gde je $D(x)$ *najveći zajednički delilac za polinome* $E(x)$ *i* $b(x)$, *i* $S(x)$ *je karakteristični polinom jednačine* $S(f)=0$ *koja ima samo trivijalno rešenje.*

Tvrđenje ove teoreme sledi iz leme 5. Napominjemo da se dovoljnost uslova može dokazati direktno na sledeći način.

Neka je $Q(x)=S(x)\cdot D(x)$, gde je $S(x)$ karakteristični polinom jednačine $S(f)=0$ koja ima samo trivijalno rešenje.

Ako je $E(f)=0$, tada je $Q(f)=S(D(f))=S(0)=0$. Obrnuto, ako je $Q(f)=0$, tj. ako je $S(D(f))=0$, tada je $D(f)=0$, pa je i $E(f)=0$.

Dakle, $E(f)=0 \Leftrightarrow Q(f)=0$.

Sledećom teoremom dat je potreban i dovoljan uslov da se jednačina (1.2) svede na binomnu jednačinu oblika

$$f=af^1 \quad (a=\text{const}),$$

dok je u radu [**12**] dat, i to u sasvim drugačijem obliku, samo dovoljan uslov za isto.

Teorema 2. *Potreban i dovoljan uslov da jednačina* $E(f)=0$ *bude ekvivalentna sa nekom jednačinom oblika*

$$f=af^1 \quad (a=\text{const})$$

je

(U) $\qquad D(x)=k(1-ax) \quad (a^n=1,\ k=\text{const}\neq 0) \quad$ *ili* $\quad D(x)=k \quad (k=\text{const}).$

Tvrđenje neposredno sledi iz leme 5.

PRIMEDBA 2. Prethodni uslov (U) može se izraziti ovako: Jednačinu $E(f)=0$ zadovoljava najviše jedan od n-tih korena jedinice.

Što se tiče opštijeg pitanja (dotaknutog u radu [**12**]) pod kojim uslovom, je jednačina $E(f)=0$ ekvivalentna sa nekom binomnom jednačinom oblika

$$f=af^p, \tag{1.17}$$

gde je p prirodan broj manji od n, $a^{\frac{n}{d}}=1$, d zajednički delilac za n i p, na osnovu prethodnih rezultata (lema 5), možemo reći sledeće:

Propozicija. *Da bi jednačina* $E(f)=0$ *bila ekvivalentna sa nekom funkcionalnom jednačinom oblika* (1.17) *potrebno je i dovoljno da skup A zajedničkih korena jednačina* $E(x)=0$ *i* $b(x)=0$ *bude ujedno i skup zajedničkih korena jednačine* $b(x)=0$ *i neke jednačine oblika*

$$ax^p-1=0,$$

gde p i a ispunjavaju prethodne uslove.

Prema tome, ovo pitanje se svodi na algebarski zadatak nalaženja pogodnog, operativnog, kriterijuma za ispunjenost poslednjeg uslova.

Glava II: REZULTATI DOBIJENI MATRIČNOM METODOM S. B. PREŠIĆA

1. Metoda S. B. Prešića. Neka su $\theta_1, \ldots, \theta_n$ data jedan-jedan preslikavanja nepraznog skupa S na S koja obrazuju grupu G reda n, θ_1 identično preslikavanje. Neka su zatim K dato polje i F skup svih funkcija koje preslikavaju S u K.

U radu [21] S. B. PREŠIĆ je dao metodu rešavanja sledeće klase linearnih funkcionalnih jednačina:

$$a_1(x)f(\theta_1 x)+a_2(x)f(\theta_2 x)+\cdots+a_n(x)f(\theta_n x)=0 \quad \big(\theta_i x \equiv \theta_i(x)\big), \tag{2.1}$$

gde su $a_i(x)$ $(i=1,\ldots,n)$ date funkcije koje pripadaju skupu F, a $f(\in F)$ nepoznata funkcija.

Neka je p_i $(i=1,\ldots,n)$ ona permutacija skupa $\{1,\ldots,n)$ koja se dobija iz permutacije

$$\begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \cdots & \theta_n \\ \theta_1\theta_i & \theta_2\theta_i & & \theta_n\theta_i \end{pmatrix}$$

grupe G kada se u njoj redom zamene simboli $\theta_1,\ldots,\theta_n$ simbolima $1,\ldots,n$ (proizvodi $\theta_k\theta_i$, $k=1,\ldots,n$ zamenjuju se onim elementima sa kojima su jednaki).

Permutacije $p_1,\ldots,p_n$ obrazuju grupu P reda n.

Neka su matrice $M_k=[a_{ij}^k]$ $(1\leqq i,\ j,\ k\leqq n)$ definisane sa

$$a_{ij}^k=\begin{cases} 1 \text{ za } j=p_k(i) \\ 0 \text{ za } j\neq p_k(i). \end{cases}$$

Matrice M_k $(k=1,\ldots,n)$ obrazuju grupu M reda n. Grupe G, P i M su izomorfne.

Stavljajući u (2.1) redom $\theta_1 x,\ldots,\theta_n x$ umesto x, dobija se sistem od n jednačina, koji se može prikazati u matričnoj formi na sledeći način:

$$A(x)\begin{bmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{bmatrix}=0 \tag{2.2}$$

gde je $A(x)=[a_{ij}(x)]$, $a_{ij}(x)=a_{jp_i^{-1}}(\theta_i x)$.

Opšte rešenje jednačine (2.1) traži se u obliku

$$\begin{bmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x) \end{bmatrix}=B(x)\begin{bmatrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x) \end{bmatrix}, \tag{2.3}$$

gde je $B(x)=[b_{ij}(x)]$ $\big(b_{ij}(x)\in F\big)$ kvadratna matrica reda n, a $g(x)$ je proizvoljna funkcija. Autor je uveo pojam saglasnosti matrice $B(x)$ sa grupom G.

Definicija 1. *Matrica $B(x)$ je saglasna sa grupom G ako jednačina* (2.3) *definiše funkcije $f(\in F)$ jednoznačno za svaku funkciju $g(\in F)$.*

U osnovi metode rešavanja jednačine (2.1) nalaze se dve leme i jedna teorema, koje je dao S. B. Prešić.

Lema I. *Uslov*

$$B(\theta_i x)=M_i B(x) M_i^{-1} \quad (x\in S;\ i=1,\dots,n) \tag{2.4}$$

je dovoljan da matrica $B(x)$ bude saglasna sa grupom G.

Lema II. *Postoji bar jedna kvadratna matrica reda n*

$$B(x)=[b_{ij}(x)] \quad \big(x\in S;\ b_{ij}(x)\in F\big)$$

takva da je:

(C$_1$) $$A(x)\,B(x)\,A(x)+A(x)=0;$$

(C$_2$) *matrica $B(x)$ saglasna sa grupom G.*

Teorema (Prešić). *Neka je $B(x)$ matrica koja ispunjava uslove* (C$_1$) *i* (C$_2$) *leme* II. *Opšte rešenje jednačine* (2.1) *dato je formulom*

$$\begin{bmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x)\end{bmatrix}=\big(B(x)A(x)+I\big)\begin{bmatrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x)\end{bmatrix} \quad (I \text{ jedinična matrica}), \tag{2.5}$$

gde je $g(\in F)$ proizvoljna funkcija.

Pomoću formule (2.5) može se naći opšte rešenje jednačine (1.2).

2. U sledećem odeljku izložićemo metodu dobijanja opšteg rešenja jednačine (1.2) u obliku $F=C\Pi (C$ ciklična matrica).

Neka je S neprazan skup; $\theta^0, \theta^1, \dots, \theta^{n-1}$ obostrano-jednoznačna preslikavanja skupa S u S, θ^0 identično preslikavanje; G ciklična grupa reda n koju obrazuju preslikavanja θ^i $(i=0, 1, \dots, n-1)\, n$ fiksiran prirodan broj.

U ovom odeljku daje se formula koja obuhvata sva opšta rešenja oblika

$$f=b_0\,\Pi(M)+b_1\,\Pi(\theta^1 M)+\cdots+b_{n-1}\,\Pi(\theta^{n-1}M) \quad (M\in S) \tag{2.6}$$

ciklične funkcionalne jednačine

$$a_0 f(M)+a_1 f(\theta^1 M)+\cdots+a_{n-1} f(\theta^{n-1}M)=0, \tag{2.7}$$

gde su a_i $(i=0, 1, \dots, n-1)$ realni (ili kompleksni) brojevi, nepoznata funkcija f preslikava S u skup realnih (ili kompleksnih) brojeva, Π proizvoljno preslikavanje skupa S u skup realnih (ili kompleksnih) brojeva.

Ako se u (2.7) umesto M stavi redom

$$\theta^0 M,\ \theta^1 M, \dots, \theta^{n-1}M$$

dobija se sistem od n jednačina koji se može pisati u matričnoj formi na sledeći način:

$$A\begin{bmatrix} f \\ f_1 \\ \vdots \\ f^{n-1} \end{bmatrix} = O, \tag{2.8}$$

gde je

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_{n-2} \\ \vdots & & \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0. \end{bmatrix} \quad (O \text{ nula matrica}).$$

Definicija 2. *Kvadratna matrica oblika*

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_{n-2} \\ \vdots & & \\ c_2 & c_3 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_0 \end{bmatrix},$$

gde su c_i $(i=0, 1, \ldots, n-1)$ *realni* (*ili kompleksni*) *brojevi, zove se ciklična matrica reda* n.

Očigledno matrica A je ciklična.

Traži se opšte rešenje jednačine (2.7) u obliku

$$\begin{bmatrix} f \\ f^1 \\ \vdots \\ f^{n-1} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} \Pi \\ \Pi^1 \\ \vdots \\ \Pi^{n-1} \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

gde je B ciklična matrica reda n sa konstantnim elementima, a Π proizvoljna funkcija.

Postavlja se pitanje da li jednačina (2.9) definiše funkciju f jednoznačno za svaku matricu B, tj. da li je matrica B saglasna sa grupom G u smislu definicije 1.

Odgovor daje sledeća teorema.

Teorema 1. *Neka su svi elementi matrice B konstante. Potreban i dovoljan uslov da jednačina* (2.9) *jednoznačno definiše f za svaku funkciju Π jeste da je B ciklična matrica reda n.*

Dokaz. *Uslov je potreban.* Neka jednačina (2.9) jednoznačno definiše f za svaku funkciju Π. Treba dokazati da je tada matrica

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \\ b_{i1} & b_{in} \\ \vdots & \\ b_{n1} & b_{nn} \end{bmatrix}$$

ciklična.

Prema (2.9) važi

$$(2.10)\qquad f = b_{11}\Pi + b_{12}\Pi^1 + \cdots + b_{1n}\Pi^{n-1},$$

$$(2.11)\qquad f^{i-1} = b_{i1}\Pi + b_{i2}\Pi^1 + \cdots + b_{in}\Pi^{n-1} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Iz (2.10) dobija se

$$(2.12)\qquad f^{i-1} = b_{11}\Pi^{i-1} + b_{12}\Pi^i + \cdots + b_{1n}\Pi^{i-2} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Na osnovu (2.11) i (2.12) zaključujemo da važi jednakost

$$(2.13)\quad 0 = (b_{i1} - b_{1,n-i+2})\Pi + (b_{i2} - b_{1,n-i+3})\Pi^1 + \cdots + (b_{in} - b_{1,n-(i-1)})\Pi^{n-1}.$$

Kako je jednakost (2.13) zadovoljena za svaku proizvoljnu funkciju Π, to prema lemi 2 u I važi:

$$b_{i1} = b_{1,n-i+2},\ b_{i2} = b_{1,n-i+3}, \cdots,\ b_{in} = b_{1,n-(i-1)} \quad (n + k \equiv k;\ i = 1, \ldots, n).$$

Dakle, matrica B je ciklična, što je i trebalo dokazati.

Da je uslov dovoljan sleduje na osnovu leme 1 u [**21**].

U daljem izlaganju važnu ulogu ima:

Lema 1. *Za svaku cikličnu matricu*

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_{n-2} \\ \vdots & & \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{bmatrix}$$

postoji ciklična matrica reda n koja nije nula-matrica

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 \cdots & c_{n-1} \\ c_{n-1} & c_0 & c_{n-2} \\ \vdots & & \\ c_1 & c_2 & c_0 \end{bmatrix}$$

takva da je

$$AC = O.$$

Ova lema je specijalni slučaj leme II u [**21**].

Prelazimo na dokaz sledeće teoreme.

Teorema 2. *Neka su A i C ciklične matrice reda n. Ako je $A \cdot C = O$, tada je*

$$F = C\Pi \qquad \left(F = \begin{bmatrix} f \\ f^1 \\ \vdots \\ f^{n-1} \end{bmatrix},\quad \Pi = \begin{bmatrix} \Pi \\ \Pi^1 \\ \vdots \\ \Pi^{n-1} \end{bmatrix} \right)$$

rešenje jednačine (2.7).

Dokaz. Prema teoremi 1 jednakost $F = C\Pi$ definiše jednoznačno f za svaku proizvoljnu funkciju Π.

$F = C\Pi$ je rešenje jednačine (2.7), jer je

$$A \cdot F = A \cdot C \cdot \Pi = O.$$

Teorema 3. *Neka je $\mathscr{L}$ skup svih cikličnih matrica reda n tako da je $A \cdot C = O$, $C \in \mathscr{L}$. Ako je opšte rešenje jednačine* (2.7) *dato formulom $F = B\Pi$, tada je*

$$B \in \mathscr{L}.$$

Drugim rečima, ako je $C(t_1, \ldots, t_l)$, sa proizvoljnim parametrima $t_1, \ldots, t_l$, opšti oblik svih cikličnih matrica C koje zadovoljavaju jednačinu $A \cdot C = O$ tada formula

$$F = C(t_1, \ldots, t_l)\Pi \tag{2.14}$$

sadrži sve formule oblika (2.6) *koje su opšta rešenja jednačine* (2.7).

Dokaz. Neka je

$$f = b_0 \Pi^1 + \cdots + b_{n-1} \Pi^{n-1} \tag{2.15}$$

opšte rešenje jednačine (2.7).

Polazeći od (2.15) dobija se sistem

$$\begin{aligned} f &= b_0 \Pi + b_1 \Pi^1 + \cdots + b_{n-1}\Pi^{n-1}, \\ f^1 &= b_0 \Pi^1 + b_1 \Pi^2 + \cdots + b_{n-1} \Pi, \\ &\vdots \\ f^{n-1} &= b_0 \Pi^{n-1} + b_1 \Pi + \cdots + b_{n-1} \Pi^{n-2}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Neka je

$$B = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \cdots & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_0 & b_{n-2} \\ \vdots & & \\ b_1 & b_2 & b_0 \end{bmatrix}.$$

Sistem (2.16) može se pisati u sledećem matričnom obliku: $F = B \cdot \Pi$.

Na osnovu prethodnog važi $AF = AB\Pi = O$, odakle sleduje $AB = O$.

Dakle, $B \in \mathscr{L}$, što je trebalo dokazati.

Primetimo da formula (2.14), koja prema teoremi 3 obuhvata sva opšta rešenja jednačine (2.7) oblika (2.6), jeste i sama jedno opšte rešenje jednačine (2.7).

Glava III: REPRODUKTIVNO REŠENJE JEDNAČINE $E(f)=0$

Razmatra se jednačina

(3.1) $$E(f) \equiv a_0 f(M) + a_1 f(\theta M) + \cdots + a_{n-1} f(\theta^{n-1} M) = 0,$$

gde su $a_i (i=0, 1, \ldots, n-1)$ realni (ili kompleksni) brojevi; nepoznata funkcija f preslikava neprazan skup S u skup realnih (ili kompleksnih) brojeva; θ je preslikavanje iz S u S tako da je $\theta^n(M) = M (M \in S)$. Neka pri tome postoji $M_0 \in S$ tako da su elementi $\theta^k M_0 (k=0, 1, \ldots, n-1)$ međusobno različiti (lema 1, glava I).

Ako se stavi $f(\theta^k M) = f^k$, jednačina (3.1) dobija sledeći oblik:

(3.2) $$E(f) \equiv a_0 f + a_1 f^1 + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} = 0.$$

Neka je $b(x) = 1 - x^n = D(x) \cdot F(x)$, gde je $D(x)$ najveći zajednički delilac za polinome $b(x)$ i $E(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$.

Jednačina $E(f)=0$ ekvivalentna je sa jednačinom $D(f)=0$ (glava I).

Neka je rešenje jednačine $D(f)=0$ oblika

(3.3) $$f = R(\Pi) = c_0 \Pi + c_1 \Pi^1 + \cdots + c_{n-1} \Pi^{n-1},$$

gde su $c_i (i=0, 1, \ldots, n-1)$ realni (ili kompleksni) brojevi, a Π je proizvoljna funkcija.

Tada važi

$$D(x) \cdot R(x) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\, b(x)),$$

tj.

(3.4) $$\frac{D(x) \cdot R(x)}{b(x)} = \varphi(x),$$

gde je $\varphi(x)$ polinom, i $R(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$.

Iz (3.4) sledi

(3.5) $$R(x) = F(x) \cdot \varphi(x).$$

Dakle, rešenje (3.3) jednačine (3.1) može se izraziti u obliku

(3.6) $$f = R(\Pi) = F(\varphi(\Pi)) \quad (\Pi \text{ proizvoljna funkcija}).$$

Definicija. *Opšte rešenje oblika* (3.3) *jednačine* (3.1) *je reproduktivno ako je ispunjen uslov*

$$RR \equiv R \quad (\operatorname{mod} b(x)). \tag{3.7}$$

Lema 1. *Pod pretpostavkom da je* $R(\Pi)$ *opšte rešenje jednačine* $E(f)=0$, *uslov* (3.7) *ekvivalentan je sa uslovom*

$$E(f)=0 \Rightarrow f=R(f). \tag{3.7'}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $R(\Pi)$ opšte rešenje jednačine $E(f)=0$.

Neka važi $R(R(\Pi))=R(\Pi)$ za svako Π. Tada iz $E(f)=0$ sleduje da je, za neko Π, $f=R(\Pi)$, tako da je, za isto Π, $f=R(R(\Pi))=R(f)$. Obrnuto, neka je ispunjen uslov $E(f)=0 \Rightarrow f=R(f)$. Tada, budući da za svako Π imamo $E(R(\Pi))=0$, to na osnovu pretpostavke dobijamo da je $R(\Pi)=R(R(\Pi))$ za svako Π. Time je lema dokazana.

Pretpostavimo u daljem rasuđivanju da je

$$\det A=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & & a_{n-2} \\ \vdots & & & \\ a_1 & a_2 & & a_0 \end{vmatrix}=0. \tag{3.8}$$

Na osnovu (3.7) imamo

$$\frac{R(x)(R(x)-1)}{b(x)}=\psi(x), \tag{3.9}$$

gde je $\psi(x)$ polinom.

Koristeći (3.5), jednakost (3.9) postaje

$$\frac{\varphi(x)(F(x)\cdot\varphi(x)-1)}{D(x)}=\psi(x). \tag{3.10}$$

Dokažimo sledeću činjenicu.

Lema 2. *Polinomi* $D(x)$ *i* $\varphi(x)$ *su uzajamno prosti, tako da se* $D(x)$ *sadrži u*

$$F(x)\varphi(x)-1.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da se polinom $D(x)$ sadrži u $\varphi(x)$, tj. da važi

$$\varphi(x)=D(x)H(x) \tag{3.11}$$

gde je $H(x)$ polinom.

Iz (3.11) izlazi $R(x)=F(x)\varphi(x)=D(x)F(x)\cdot H(x)=b(x)\cdot H(x)$, odakle je $R(\Pi)=0$ za svako Π, što je nemoguće, jer u tom slučaju $f=R(\Pi)$ ne bi bilo opšte rešenje s obzirom na pretpostavku (3.8).

Dakle, ne važi (3.11).

Neka polinomi $D(x)$ i $\varphi(x)$ imaju zajednički faktor $\lambda(x)\neq\text{const}$, tj. neka važi

$$\begin{aligned} \varphi(x)&=\lambda(x)\varphi_1(x), \\ D(x)&=\lambda(x)D_1(x). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Prema (3.12) imamo

$$\varphi(x)D_1(x)=\varphi_1(x)D(x). \tag{3.12'}$$

Množeći obe strane u (3.12′) polinomom $F(x)$, dobija se

$$F(x)\varphi(x)D_1(x)=\varphi_1(x)D(x)F(x),$$

tj.

$$D_1(x)R(x)=\varphi_1(x)b(x). \tag{3.13}$$

Iz (3.13) imamo

$$D_1\big(R(f)\big)=\varphi_1\big(b(f)\big)=\varphi_1(0)=0.$$

Dakle, $R(f)=F\big(\varphi(f)\big)$ je rešenje jednačine $D_1(f)=0$, tj. $D(f)=0 \Rightarrow D_1(f)=0$, a to znači prema lemi 4, glava I, da važi $(D)\subseteq(D_1)$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da je $D_1(f)=0$ prava podjednačina jednačine $D(f)=0$.

Dobijena kontradikcija zajedno sa razmatranjem na početku ovog rasuđi vanja dokazuje osnovno tvrđenje leme 2.

Prema (3.10) je $\dfrac{F(x)\varphi(x)-1}{D(x)}=-\psi_1(x)$, tj.

$$1=F(x)\varphi(x)+\psi_1(x)D(x). \tag{3.14}$$

Pređimo sada na razmatranje pitanja jedinstvenosti opšteg reproduktivnog rešenja jednačine $E(f)=0$.

Dokazujemo sledeću teoremu.

Teorema. *Jednačina $E(f)=0$ ima jedinstveno opšte reproduktivno rešenje oblika:*

$$f=F\big(K_0(\Pi)\big). \tag{3.15}$$

gde je $K_0(x)$ polinom nižeg stepena od $D(x)$ koji zajedno sa polinomom $L_0(x)$ zadovoljava jednakost

$$1=F(x)K_0(x)+L_0(x)D(x). \tag{3.16}$$

Dokaz. Polinomi $F(x)$ i $D(x)$ su uzajamno prosti. Kao što je poznato, postoje jedinstveni polinomi $K_0(x)$ i $L_0(x)$, prvi nižeg stepena od $D(x)$, drugi nižeg stepena od $F(x)$, tako da važi (3.16). Prema teoremi GHERMĂNESCUa (glava I) funkcija data jednakošću (3.15) za svako Π zadovoljava jednačinu (3.1).

S druge strane, ako je f rešenje jednačine (3.1), tada prema (3.16) važi $f=F\big(K_0(f)\big)$, pa imamo da je (3.15) opšte reproduktivno rešenje jednačine (3.1).

Neka je $R(\Pi)$, sa proizvoljnim Π, opšte reproduktivno rešenje jednačine (3.1).

Tada je, prema prethodnom rasuđivanju,

$$R(\Pi)=F\big(\varphi(\Pi)\big), \tag{3.17}$$

gde polinom $\varphi(x)$ zadovoljava (3.14).

Na osnovu (3.14) i (3.16), prema poznatom rezultatu, važe jednakosti

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=K_0(x)-S(x)D(x),\\ \psi_1(x)&=L_0(x)+S(x)F(x),\end{aligned} \tag{3.18}$$

gde je $S(x)$ izvestan polinom.

Prema jednakostima (3.17) i (3.18), imamo

$$R(\Pi)=F(\varphi(\Pi))=F(K_0(\Pi))-S(b(\Pi))=F(K_0(\Pi)),$$

za svako Π. Time je, s obzirom na lemu 2, glava I, dokazana jedinstvenost opšteg reproduktivnog rešenja jednačine (3.1).

Ovom teoremom data je formula za direktno određivanje opšteg reproduktivnog rešenja jednačine (3.1).

Međutim, u pojedinim slučajevima moguće je, drugim putem, jednostavnije doći do opšteg reproduktivnog rešenja.

U sledećem primeru, ne insistirajući na razlikama u pogledu dužine postupka, pokazaćemo tri različita načina nalaženja opšteg reproduktivnog rešenja jednačine

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)-f(x_2, x_3, x_4, x_1)+f(x_3, x_4, x_1, x_2)-f(x_4, x_1, x_2, x_3)=0. \tag{3.19}$$

1° Korišćenje matrične formule koja sadrži sve formule koje daju opšte rešenje jednačine (glava II, odeljak 2). Polazeći od date jednačine cikličnom permutacijom promenljivih dobija se sistem

$$f-f^1+f^2-f^3=0, \quad -f+f^1-f^2+f^3=0,$$
$$f-f^1+f^2-f^3=0, \quad -f+f^1-f^2+f^3=0.$$

Matrica koeficijenata ovog sistema je

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za matricu A nalazimo cikličnu matricu C reda 4 različitu od nula-matrice tako da je $A\cdot C=O$, i ona glasi

$$C=\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_0-c_1+c_2 \\ c_0-c_1+c_2 & c_0 & c_1 & c_2 \\ c_2 & c_0-c_1+c_2 & c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 & c_0-c_1+c_2 & c_0 \end{bmatrix}.$$

Prema (2.14) formula koja obuhvata sve formule koje daju opšte rešenje jednačine (3.19) je

$$R(\Pi)=c_0\,\Pi+c_1\,\Pi^1+c_2\,\Pi^2+(c_0-c_1+c_2)\,\Pi^3 \qquad (\Pi \text{ proizvoljna funkcija}).$$

Prema lemi 1 ove glave je $R(f)=c_0 f+c_1 f^1+c_2 f^2+(c_0-c_1+c_2)f^3=f$, odakle se dobija: $c_0=\frac{3}{4}$, $c_1=\frac{1}{4}$, $c_2=-\frac{1}{4}$, $c_3=\frac{1}{4}$.

Dakle, opšte reproduktivno rešenje jednačine $f-f^1+f^2-f^3=0$ dato je formulom

$$f=\frac{3}{4}\,\Pi+\frac{1}{4}\,\Pi^1-\frac{1}{4}\,\Pi^2+\frac{1}{4}\,\Pi^3.$$

2° Metoda zasnovana na rezultatu S. B. PREŠIĆa [21]. Za datu matricu A određujemo matricu B saglasnu sa cikličnom grupom reda 4 koja zadovoljava uslov $ABA+A=O$. U ovom slučaju imamo $B=\frac{-I}{4}$, (I jedinična matrica).

Opšte rešenje, prema (2.5), dato je sa

$$\begin{bmatrix} f \\ f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix} = (BA+I) \begin{bmatrix} \Pi \\ \Pi^1 \\ \Pi^2 \\ \Pi^3 \end{bmatrix}.$$

Ovo rešenje je i reproduktivno, jer je [24]

$$(BA+I)^2 = BA+I.$$

Dakle, opšte reproduktivno rešenje date jednačine je

$$f=\frac{3}{4}\Pi+\frac{1}{4}\Pi^1-\frac{1}{4}\Pi^2+\frac{1}{4}\Pi^3.$$

3° Primena formule $f=F(K_0(f))$. Koeficijente a_k $(k=0,\ 1,\ 2)$ polinoma $K_0(x)$ određujemo iz identiteta

$$1=(1+x)\,(a_2x^2+a_1x+a_0)+b_0(1-x+x^2-x^3).$$

Dobijamo: $a_2=\frac{1}{4}$, $a_1=-\frac{2}{4}$, $a_0=\frac{3}{4}$.

Dakle, $K_0(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{2}{4}x+\frac{3}{4}$,

odakle je

$$F(x)\,K_0(x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x^3.$$

Prema tome, opšte reproduktivno rešenje jednačine (3.19) je

$$f=F(K_0(\Pi))=\frac{3}{4}\Pi+\frac{1}{4}\Pi^1-\frac{1}{4}\Pi^2+\frac{1}{4}\Pi^3.$$

Glava IV: PRIMENE PRETHODNIH REZULTATA NA PARTIKULARNE SLUČAJEVE

Data su preslikavanja

$\theta^0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\theta^1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2, \ldots, x_n, x_1), \ldots$, $\theta^{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$ $(x_j \in S$; skup S ima najmanje n elemenata).

Očigledno, preslikavanja $\theta^0, \theta^1, \ldots, \theta^{n-1}$ obrazuju cikličnu grupu reda n.

Jednačina

$$a_0 f(\theta^0 M) + a_1 f(\theta^1 M) + \cdots + a_{n-1} f(\theta^{n-1} M) = 0$$

dobija sledeći oblik

$$(4.1) \qquad a_0 f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + a_1 f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) + \cdots + a_{n-1} f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0$$

gde su a_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ realni brojevi, i f nepoznata funkcija $(f\colon S \to \mathbf{R})$.

Jednačina (4.1) je linearna, ciklična i homogena funkcionalna jednačina sa konstantnim koeficijentima.

Dokazaćemo da je jednačina (4.1) ekvivalentna sa jednom od četiri kanonske jednačine za $n = 3$, sa jednom od osam kanonskih jednačina za $n = 4$ i sa jednom od šesnaest kanonskih jednačina za $n = 6$.

Daćemo postupak pomoću koga se može za svaku jednačinu (4.1) u slučajevima $n = 3, 4, 6$ odrediti ona kanonska jednačina koja je sa njom ekvivalentna.

Za svaku kanonsku jednačinu odredićemo opšte i reproduktivno rešenje.

1. Razmotrićemo najpre jednačinu

$$(4.2) \qquad a_0 f(x_1, x_2, x_3) + a_1 f(x_2, x_3, x_1) + a_2 f(x_3, x_1, x_2) = 0.$$

M. GHERMĂNESCU je u [7] proučavao linearne ciklične jednačine tipa (4.2) i dokazao da imaju netrivijalna rečenja samo ako koeficijenti ispunjavaju uslov

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Ovde ćemo izložiti jedan drugi metod ispitivanja jednačine (4.2).

Funkcionalne izraze koje sadrži jednačina (4.2) označimo redom sa:

$$f^0 = f, \quad f^1 \text{ i } f^2.$$

Polazeći od (4.2) cikličnom permutacijom promenljivih dobija se sledeći sistem jednaćina:

$$\begin{aligned} a_0 f + a_1 f^1 + a_2 f^2 &= 0, \\ a_2 f + a_0 f^1 + a_1 f^2 &= 0, \\ a_1 f + a_2 f^1 + a_0 f^2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Determinanta sistema (4.3) je

$$\Delta = \frac{1}{2}(a_0 + a_1 + a_2)\left[(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2\right].$$

Mogućna su sledeća četiri slučaja:

(α) $\quad a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$ i $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 \neq 0$;

(β) $\quad a_1 + a_2 + a_2 \neq 0$ i $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 = 0$;

(γ) $\quad a_0 + a_1 + a_2 = 0$ i $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 \neq 0$;

(δ) $\quad a_0 + a_1 + a_2 = 0$ i $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 = 0$.

U slučaju (α), sistem (4.3) je, očigledno ekvivalentan sa jednačinom

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

U slučaju (β), imamo $a_0 = a_1 = a_2$ i $a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$, dakle $a_0 \neq 0$, pa je sistem (4.3) ekvivalentan sa jednačinom

$$f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_3, x_1) + f(x_3, x_1, x_2) = 0.$$

U slučaju (γ), postoje sledeće četiri mogućnosti

1° $\quad a_0 + a_1 + a_2 = 0, \quad a_0 - a_1 \neq 0$;

2° $\quad a_0 + a_1 + a_2 = 0, \quad a_1 - a_2 \neq 0$;

3° $\quad a_0 + a_1 + a_2 = 0, \quad a_2 - a_0 \neq 0$;

4° $\quad a_0 + a_1 + a_2 = 0, \quad a_0 - a_1 \neq 0, \quad a_1 - a_2 \neq 0$ i $a_2 - a_0 \neq 0$.

Iz 1° izlazi $a_2 = -a_0 - a_1$, pa imamo

$$a_0 f + a_1 f^1 + (-a_0 - a_1) f^2 = 0,$$

tj.

$$0(f - f^1) + a_1(f^1 - f^2) - a_0(f^2 - f) = 0.$$

Poslednja jednačina sa dvema jednačinama dobijenim cikličnom permutacijom obrazuje sledeći sistem

$$\begin{aligned} 0(f - f^1) + a_1(f^1 - f^2) - a_0(f^2 - f) &= 0, \\ -a_0(f - f^1) + 0(f^1 - f^2) + a_1(f^2 - f) &= 0, \\ a_1(f - f^1) - a_0(f^1 - f^2) + 0(f^2 - f) &= 0. \end{aligned}$$

Determinanta ovog sistema je

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & -a_0 \\ -a_0 & 0 & a_1 \\ a_1 & -a_0 & 0 \end{vmatrix} = a_1^3 - a_0^3 \neq 0.$$

Dakle, u ovom slučaju jednačina (4.2) je ekvivalentna sa jednačinom

$$f(x_1, x_2, x_3) - f(x_2, x_3, x_1) = 0.$$

U slučajevima 2°, 3° i 4° dolazi se do istog zaključka.

U slučaju (δ), jednačina (4.2) svodi se na identitet

$$0 = 0.$$

Na osnovu izloženog zaključujemo da važi:

Lema 1. *Fukcionalna jednačina* (4.2) *ekvivalentna je sa*

I. $f(x_1, x_2, x_3) = 0,$

ako je $a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 \neq 0$;

II. $f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_3, x_1) + f(x_3, x_1, x_2) = 0,$

ako je $a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 = 0$;

III. $f(x_1, x_2, x_3) - f(x_2, x_3, x_1) = 0,$

ako je $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 \neq 0$;

IV. $0 = 0,$

ako je $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 = 0.$

Za svaku od jednačina I—IV dajemo formulu koja sadrži sve formule koje daju opšta rešenja kao i formule za opšta reproduktivna rešenja ovih jednačina.

Propozicija 1. *Jednačina* $f + f^1 + f^2 = 0$ *ima opšte rešenje*

$$f = c_0 \Pi + c_1 \Pi^2 - (c_0 + c_1) \Pi^2,$$

gde je Π *proizvoljna funkcija promenljivih* x_1, x_2, x_3, *a* c_0 i c_1 *su proizvoljne konstante.*

Dokaz. Polazeći od date jednačine dobija se sistem

$$f + f^1 + f^2 = 0, \qquad f + f^1 + f^2 = 0, \qquad f + f^1 + f^2 = 0,$$

sa matricom sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Opšte rešenje ovog sistema, prema (2.14), dato je sa

$$\begin{bmatrix} f \\ f^1 \\ f^2 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \Pi \\ \Pi^1 \\ \Pi^2 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

gde je C najopštija ciklična matrica reda 3 koja ispunjava uslov $A \cdot C = O$.

Na osnovu formule (4.4) može se pisati

$$f = c_0 \Pi + c_1 \Pi^1 - (c_0 + c_1) \Pi^2.$$

što je trebalo dokazati.

Propozicija 2. *Reproduktivno rešenje jednačine*

$$f + f^1 + f^2 = 0$$

je

$$f = \frac{2}{3} \Pi - \frac{1}{3} \Pi^1 - \frac{1}{3} \Pi^2,$$

gde je Π proizvoljna funkcija promenljivih x_1, x_2, x_3.

Dokaz. Tvrđenje sledi na osnovu formule (2.5) glava II.

Međutim, ovo tvrđenje može se neposredno dokazati na sledeći način. Polazeći od opšteg rešenja $f = c_0 \Pi + c_1 \Pi^1 - (c_0 + c_1) \Pi^2$, imamo

$$\begin{aligned} f(f) &= c_0 f + c_1 f^1 - (c_0 + c_1) f^2 \\ &= c_0 f + c_1 f^1 + (c_0 + c_1)(f + f^1) \\ &= (2c_0 + c_1) f + (c_0 + 2c_1) f^1. \end{aligned}$$

Uslov $f(f) = f$ je ispunjen samo ako je

$$c_0 = \frac{2}{3}, \quad c_1 = -\frac{1}{3}$$

Dakle, $f = \frac{2}{3} \Pi - \frac{1}{3} \Pi^1 - \frac{1}{3} \Pi^2$ je reproduktivno rešenje jednačine

$$f + f^1 + f^2 = 0.$$

Na slačan način može se dokazati da važi

Lema 2. *Opšte rešenje jednačine (E) dato je formulom (F),*

Jednačina (E)	*Formula (F)*
1° $f(x_1, x_2, x_3) = 0$	$f(x_1, x_2, x_3) \equiv 0$;
2° $f(x_1, x_2, x_3) + f(x_2, x_3, x_1) + f(x_3, x_1, x_2) = 0$	$f(x_1, x_2, x_3) = c_0 \Pi(x_1, x_2, x_3) + c_1 \Pi(x_2, x_3, x_1) - (c_0 + c_1) \Pi(x_3, x_1, x_2)$;

Jednačina (E)	*Formula (F)*
3° $f(x_1, x_2, x_3) - f(x_2, x_3, x_1) = 0$	$f(x_1, x_2, x_3) = c_0 [\Pi(x_1, x_2, x_3) + \Pi(x_2, x_3, x_1) + \Pi(x_3, x_1, x_2)]$;
4° $0 = 0$	$f(x_1, x_2, x_3) = \Pi(x_1, x_2, x_3)$,

gde Π označava proizvoljnu funkciju.

Na osnovu prethodnih rezultata važe sledeće dve teoreme.

Teorema 1. *Opšte rešenje jednačine*

$$a_0 f(x_1, x_2, x_3) + a_1 f(x_2, x_3, x_1) + a_2 f(x_3, x_1, x_2) = 0$$

dato je sledećim formulama:

1° $f(x_1, x_2, x_3) \equiv 0$,

ako je $a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 \neq 0$;

2° $f(x_1, x_2, x_3) = c_0 \Pi(x_1, x_2, x_3) + c_1 \Pi(x_2, x_3, x_1) - (c_0 + c_1) \Pi(x_3, x_1, x_2)$,

ako je $a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 = 0$;

3° $f(x_1, x_2, x_3) = c_0 [\Pi(x_1, x_2, x_3) + \Pi(x_2, x_3, x_1) + \Pi(x_3, x_1, x_2)]$,

ako je $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 \neq 0$;

4° $f(x_1, x_2, x_3) = \Pi(x_1, x_2, x_3)$,

ako je $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 = 0$.

$\Pi(x_1, x_2, x_3)$ *je proizvoljna funkcija promenljivih* x_1, x_2, x_3.

Teorema 2. *U slučajevima označenim u formulaciji Teoreme* 1 *sa* 1°—4° *opšta reproduktivna rešenja data su redom sledećim formulama:*

1° $f(x_1, x_2, x_3) \equiv 0$;

2° $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{2}{3} \Pi(x_1, x_2, x_3) - \frac{1}{3} \Pi(x_2, x_3, x_1) - \frac{1}{3} \Pi(x_3, x_1, x_2)$;

3° $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{3} [\Pi(x_1, x_2, x_3) + \Pi(x_2, x_3, x_1) + \Pi(x_3, x_1, x_2)]$;

4° $f(x_1, x_2, x_3) = \Pi(x_1, x_2, x_3)$.

2. U ovom odeljku tretira se problem rešavanja homogene linearne ciklične funkcionalne jednačine

$$a_0 f(x_1, x_2, x_3, x_4) + a_1 f(x_2, x_3, x_4, x_1) + a_2 f(x_3, x_4, x_1, x_2) + a_3 f(x_4, x_1, x_2, x_3) = 0. \tag{4.5}$$

Polazeći od (4.5) cikličnom permutacijom promenljivih dobija se sledeći sistem jednačina:

$$
\begin{aligned}
& a_0 f(x_1, x_2, x_3, x_4) + a_1 f(x_2, x_3, x_4, x_1) + a_2 f(x_3, x_4, x_1, x_2) \\
& \qquad\qquad + a_3 f(x_4, x_1, x_2, x_3) = 0, \\
& a_3 f(x_1, x_2, x_3, x_4) + a_0 f(x_2, x_3, x_4, x_1) + a_1 f(x_3, x_4, x_1, x_2) \\
& \qquad\qquad + a_2 f(x_4, x_1, x_2, x_3) = 0, \\
& a_2 f(x_1, x_2, x_3, x_4) + a_3 f(x_2, x_3, x_4, x_1) + a_0 f(x_3, x_4, x_1, x_2) \\
& \qquad\qquad + a_1 f(x_4, x_1, x_2, x_3) = 0, \\
& a_1 f(x_1, x_2, x_3, x_4) + a_2 f(x_2, x_3, x_4, x_1) + a_3 f(x_3, x_4, x_1, x_2) \\
& \qquad\qquad + a_0 f(x_4, x_1, x_2, x_3) = 0.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Ako se stavi

$$
f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f, \quad f(x_2, x_3, x_4, x_1) = f^1, \quad f(x_3, x_4, x_1, x_2) = f^2, \quad f(x_4, x_1, x_2, x_3) = f^3,
$$

sistem (4.6) postaje

$$
\begin{aligned}
a_0 f + a_1 f^1 + a_2 f^2 + a_3 f^3 &= 0, \\
a_3 f + a_0 f^1 + a_1 f^2 + a_2 f^3 &= 0, \\
a_2 f + a_3 f^1 + a_0 f^2 + a_1 f^3 &= 0, \\
a_1 f + a_2 f^1 + a_3 f^2 + a_0 f^3 &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Uvedimo oznake $a_0 + a_2 = 2M$, $a_1 + a_3 = 2P$, $a_0 - a_2 = 2N$, $a_1 - a_3 = 2Q$, tj. $a_0 = M + N$, $a_1 = P + Q$, $a_2 = M - N$, $a_3 = P - Q$.

Sistem (4.7) postaje

$$
\begin{aligned}
M(f+f^2) + P(f^1+f^3) + N(f-f^2) + Q(f^1-f^3) &= 0, \\
P(f+f^2) + M(f^1+f^3) - Q(f-f^2) + N(f^1-f^3) &= 0, \\
M(f+f^2) + P(f^1+f^3) - N(f-f^2) - Q(f^1-f^3) &= 0, \\
P(f+f^2) + M(f^1+f^3) + Q(f-f^2) - N(f^1-f^3) &= 0,
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

koji je ekvivalentan sa

$$
\begin{aligned}
M(f+f^2) + P(f^1+f^3) &= 0, \\
P(f+f^2) + M(f^1+f^3) &= 0, \\
N(f-f^2) + Q(f^1-f^3) &= 0, \\
-Q(f-f^2) + N(f^1-f^3) &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Determinanta sistema (4.7) je

$$
\Delta = \left[(a_0 + a_2)^2 - (a_1 + a_3)^2\right]\left[(a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2\right] = 16(M^2 - P^2)(N^2 + Q^2).
\tag{4.10}
$$

Rastavimo sistem (4.9) na dva pod-sistema

(4.11) $M(f+f^2)+P(f^1+f^3)=0, \quad P(f+f^2)+M(f^1+f^3)=0;$

(4.12) $N(f-f^2)+Q(f^1-f^3)=0, \quad -Q(f-f^2)+N(f^1-f^3)=0,$

čije su determinante redom M^2-P^2 i N^2+Q^2.

Važe sledeća tvrđenja:

(I) Ako je $M^2-P^2\neq 0$, sistem (4.11) je ekvivalentan sa jednačinom $f+f^2=0$;

(II) Ako je $N^2+Q^2\neq 0$, sistem (4.12) je ekvivalentan sa jednačinom $f-f^2=0$;

(III) Ako je $N=Q=0$, sistem (4.12) je ekvivalentan sa jednačinom $0=0$;

(IV) Ak je $M^2-P^2=0$ i $M=P=0$, sistem (4.11) je ekvivalentan sa jednačinom $0=0$;

(V) Ako je $M^2-P^2=0$ i $M=P\neq 0$, sistem (4.11) je ekvivalentan sa jednačinom $f+f^1+f^2+f^3=0$;

(VI) Ako je $M^2-P^2=0$ i $P=-M\neq 0$, sistem (4.11) je ekvivalentan sa jednačinom $f-f^1+f^2-f^3=0$.

Na osnovu (I)—(VI) neposredno se zaključuje sledeće:

I. Ako je $M^2-P^2\neq 0$, $N^2+Q^2=0$, sistem (4.9) je ekvivalentan sa sistemom

$$f+f^2=0, \quad f-f^2=0,$$

tj. sa jednačinom $f=0$.

II. Ako je $M^2-P^2\neq 0$, $N=Q=0$, sistem (4.9) ekvivalentan je sa sistemom

$$f+f^2=0, \quad 0=0,$$

tj. ekvivalentan je sa jednačinom $f+f^2=0$.

III. Ako je $M^2-P^2=0$, $N^2+Q^2\neq 0$ i $M=P=0$, sistem (4.9) ekvivalentan je sa sistemom

$$0=0, \quad f-f^2=0,$$

tj. sa jednačinom $f-f^2=0$.

IV. Ako je $M^2-P^2=0$, $N=Q=0$ i $M=P=0$, sistem (4.9) ekvivalentan je sa jednačinom $0=0$.

V. Ako je $M^2-P^2=0$, $N^2+Q^2\neq 0$, $P=M\neq 0$, sistem (4.9) ekvivalentan je sa sistemom jednačina

$$f-f^2=0, \quad f+f^1+f^2+f^3=0,$$

tj. sa jednačinom $f+f^1=0$.

VI. Ako je $M^2-P^2=0$, $N=Q=0$, $M=P\neq 0$, sistem (4.9) ekvivalentan je sa jednačinom $f+f^1+f^2+f^3=0$.

VII. Ako je $M^2-P^2=0$, $N^2+Q^2\neq 0$, $P=-M\neq 0$, sistem (4.9) je ekvivalentan sa sistemom

$$f-f^2=0, \quad f-f^1+f^2-f^3=0,$$

tj. sa jednačinom $f-f^1=0$.

VIII. Ako je $M^2 - P^2 = 0$, $N = Q = 0$, $P = -M \neq 0$, sistem (4.9) ekvivalentan je sa jednačinom $f - f^1 + f^2 - f^3 = 0$.

Dakle, važi sledeća lema:

Lema 3. *Funkcionalna jednačina* (4.5) *ekvivalentna je sa jednačinom*:

I. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$,

ako je $(a_0 + a_2)^2 - (a_1 + a_3)^2 \neq 0$, $(a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 \neq 0$;

II. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_3, x_4, x_1, x_2) = 0$,

ako je $(a_0 + a_2)^2 - (a_1 + a_3)^2 \neq 0$, $a_0 = a_2$ *i* $a_1 = a_3$;

III. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) - f(x_3, x_4, x_1, x_2) = 0$,

ako je $a_0 + a_2 = 0$, $a_1 + a_3 = 0$ *i* $a_0{}^2 + a_1{}^2 \neq 0$;

IV. $0 = 0$,

ako je $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$;

V. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_2, x_3, x_4, x_1) = 0$,

ako je $a_0 + a_2 = a_1 + a_3 \neq 0$, $(a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 \neq 0$;

VI. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_2, x_3, x_4, x_1) + f(x_3, x_4, x_1, x_2) + f(x_4, x_1, x_2, x_3) = 0$,

ako je $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 \neq 0$;

VII. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) - f(x_2, x_3, x_4, x_1) = 0$,

ako je $(a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 \neq 0$ *i* $a_1 + a_3 = -(a_0 + a_2) \neq 0$;

VIII. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) - f(x_2, x_3, x_4, x_1) + f(x_3, x_4, x_1, x_2) - f(x_4, x_1, x_2, x_3) = 0$,

ako je $a_1 = -a_0$, $a_2 = a_0$, $a_3 = -a_0$, $a_0 \neq 0$.

Sada ćemo odrediti opšte rešenje svake od jednačina

$$\begin{aligned} &f = 0, \quad f + f^2 = 0, \quad f - f^2 = 0, \quad 0 = 0, \quad f + f^1 = 0, \\ &f + f^1 + f^2 + f^3 = 0, \quad f - f^1 = 0, \quad f - f^1 + f^2 - f^3 = 0. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Propozicija 3. *Opšte rešenje jednačine*

$$f + f^2 = 0$$

dato je formulom

$$f = c_0 (\Pi - \Pi^2) + c_1 (\Pi^1 - \Pi^3),$$

gde su c_0 *i* c_1 *realni parametri, a* Π *proizvoljna funkcija.*

Dokaz. Polazeći od jednačine $f + f^2 = 0$, cikličnom permutacijom promenljivih, dobija se sistem

$$\begin{aligned} f + 0f^1 + f^2 + 0f^3 &= 0, \\ 0f + f^1 + 0f^2 + f^3 &= 0, \\ f + 0f^1 + f^2 + 0f^3 &= 0, \\ 0f + f^1 + 0f^2 + f^3 &= 0. \end{aligned}$$

Matrica ovog sistema je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Opšte rešenje, prema (2.14), dato je formulom

$$\begin{bmatrix} f \\ f^1 \\ f^2 \\ f^3 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \Pi \\ \Pi^1 \\ \Pi^2 \\ \Pi^3 \end{bmatrix}, \tag{4.14}$$

gde je C ciklična matrica reda 4 koja zadovoljava uslov $A \cdot C = O$.

U ovom slučaju je $C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & -c_0 & -c_1 \\ -c_1 & c_0 & c_1 & -c_0 \\ -c_0 & -c_1 & c_0 & c_1 \\ c_1 & -c_0 & -c_1 & c_0 \end{bmatrix}$, pa, prema formuli (4.14), imamo

$$f = c_0 (\Pi - \Pi^2) + c_1 (\Pi^1 - \Pi^3),$$

što je i trebalo dokazati.

Propozicija 4. *Reproduktivno rešenje jednačine*

$$f + f^2 = 0$$

je

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2} \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4) - \frac{1}{2} \Pi(x_3, x_4, x_1, x_2).$$

Dokaz. Tvrđenje sleduje na osnovu formule (2.5), a može se neposredno dobiti na sledeći način:

Iz formule (4.14) imamo

$$f(f) = c_0 (f - f^2) + c_1 (f^1 - f^3) = 2 c_0 f + 2 c_1 f^1,$$

odakle izlazi

$$2 c_0 f + 2 c_1 f^1 = f, \text{ ako je } c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_1 = 0.$$

Dakle, $f = \frac{1}{2} [\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4) - \Pi(x_3, x_4, x_1, x_2)]$.

Lema 4. *Opšte rešenje jednačine* (*E*) *dato je formulom* (*F*) *gde* Π *označava proizvoljnu funkciju.*

Jednačina (*E*)	*Formula* (*F*)
1° $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 0,$
2° $f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_3, x_4, x_1, x_2) = 0$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ $= c_0 [\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4) - \Pi(x_3, x_4, x_1, x_2)]$ $+ c_1 [\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1) - \Pi(x_4, x_1, x_2, x_3)],$
3° $f(x_1, x_2, x_3, x_4) - f(x_3, x_4, x_1, x_2) = 0$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ $= c_0 [\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4) + \Pi(x_3, x_4, x_1, x_2)]$ $+ c_1 [\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1) + \Pi(x_4, x_1, x_2, x_3)],$
4° $0 = 0$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4),$
5° $f(x_1, x_2, x_3, x_4) + f(x_2, x_3, x_4, x_1) = 0$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ $= c_0 [\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4) - \Pi(x_2, x_3, x_4, x_1)$ $+ \Pi(x_3, x_4, x_1, x_2) - \Pi(x_4, x_1, x_2, x_3)],$

6° $f(x_1, x_2, x_3, x_4)+f(x_2, x_3, x_4, x_1)$ $+f(x_3, x_4, x_1, x_2)+f(x_4, x_1, x_2, x_3)=0$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=c_0\,\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ $+c_1\Pi(x_2, x_3, x_4. x_1)+c_2\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2)$ $-(c_0+c_1+c_2)\,\Pi(x_4, x_1, x_2, x_3)$,
7° $f(x_1, x_2, x_3, x_4)-f(x_2, x_3, x_4, x_1)=0$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ $=c_0\,[\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)+\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1)$ $+\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2)+\Pi(x_4, x_1, x_2, x_3)]$,
8° $f(x_1, x_2, x_3, x_4)-f(x_2, x_3, x_4, x_1)$ $+f(x_3, x_4, x_1, x_2)-f(x_4, x_1, x_2, x_3)=0$	$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=c_0\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ $+c_1\,\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1)+c_2\,\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2)$ $+(c_0-c_1+c_2)\,\Pi(x_4, x_1, x_2, x_3)$.

Na osnovu prethodnih rezultata važe sledeće dve teoreme.

Teorema 3. *Opšte rešenje jednačine*

$$a_0 f(x_1, x_2, x_3, x_4)+a_1 f(x_2, x_3, x_4, x_1)+a_2 f(x_3, x_4, x_1, x_2)+a_3 f(x_4, x_1, x_2, x_3)=0$$

dato je sledećim formulama:

1° $f(x_1, x_2, x_3, x_4)\equiv 0$,

ako je $(a_0+a_2)^2-(a_1+a_3)^2\neq 0,\ (a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2\neq 0$;

2° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=c_0\,[\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)-\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2)]$$
$$+c_1\,[\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1)-\Pi(x_4, x_1, x_2, x_3)],$$

ako je $(a_0+a_2)^2-(a_1+a_3)^2\neq 0,\ a_0=a_2$ *i* $a_1=a_3$;

3° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=c_0[\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)+\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2]$$
$$+c_1\,[\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1)+\Pi(x_4, x_1, x_2, x_3)],$$

ako je $a_0+a_2=0,\ a_1+a_3=0$ *i* $a_0{}^2+a_1{}^2\neq 0$;

4° $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)$,

ako je $a_0=a_1=a_2=a_3=0$;

5° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=c_0\,[\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)-\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1)$$
$$+\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2)+\Pi(x_4, x_1, x_2, x_3)],$$

ako je $a_0+a_2=a_1+a_3\neq 0,\ (a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2\neq 0$;

6° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=c_0\,\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)+c_1\,\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1)$$
$$+c_2\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2)-(c_0+c_1+c_2)\,\Pi(x_4, x_1, x_2, x_3),$$

ako je $a_0=a_1=a_2=a_3\neq 0$;

7° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=c_0\,[\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)+\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1)$$
$$+\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2)+\Pi(x_4, x_1, x_2, x_3)],$$

ako je $(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2\neq 0$ *i* $a_1+a_3=-(a_0+a_2)\neq 0$;

$$8^\circ \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_0\, \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4) + c_1\, \Pi(x_2, x_3, x_4, x_1) + c_2\, \Pi(x_3, x_4, x_1, x_2) + (c_0 - c_1 + c_2)\, \Pi(x_4, x_1, x_2, x_3),$$

ako je $a_1 = -a_0$, $a_2 = a_0$, $a_3 = -a_0$, $a_0 \neq 0$.

$\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)$ *je proizvoljna funkcija promenljivih* x_1, x_2, x_3, x_4.

Teorema 4. *Opšta reproduktivna rešenja jednačina* (4.13) *data su redom formulama*

$$1^\circ \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv 0;$$

$$2^\circ \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}\, \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4) - \frac{1}{2}\, \Pi(x_3, x_4, x_1, x_2);$$

$$3^\circ \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}\, [\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4) + \Pi(x_3, x_4, x_1, x_2)];$$

$$4^\circ \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4);$$

$$5^\circ \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4}\, \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4) - \frac{1}{4}\, \Pi(x_2, x_3, x_4, x_1) + \frac{1}{4}\, \Pi(x_3, x_4, x_1, x_2) - \frac{1}{4}\, \Pi(x_4, x_1, x_2, x_3);$$

$$6^\circ \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{3}{4}\, \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4) - \frac{1}{4}\, \Pi(x_2, x_3, x_4, x_1) - \frac{1}{4}\, \Pi(x_3, x_4, x_1, x_2) - \frac{1}{4}\, \Pi(x_4, x_1, x_2, x_3);$$

$$7^\circ \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{4}\, \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4) + \frac{1}{4}\, \Pi(x_2, x_3, x_4, x_1) + \frac{1}{4}\, \Pi(x_3, x_4, x_1, x_2) + \frac{1}{4}\, \Pi(x_4, x_1, x_2, x_3);$$

$$8^\circ \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{3}{4}\, \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4) + \frac{1}{4}\, \Pi(x_2, x_3, x_4, x_1) - \frac{1}{4}\, \Pi(x_3, x_4, x_1, x_2) + \frac{1}{4}\, \Pi(x_4, x_1, x_2, x_3).$$

3. U ovom, poslednjem odeljku ove glave razmatra se jednačina

$$\begin{aligned} &a_0 f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + a_1 f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1) \\ &+ a_2 f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) + a_3 f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3) \\ &+ a_4 f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) + a_5 f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Uvedimo oznake

$$\begin{aligned} &f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = f, \qquad &&f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1) = f^1, \\ &f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) = f^2, \qquad &&f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3) = f^3, \\ &f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) = f^4, \qquad &&f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = f^5. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Polazeći od (4.15), cikličnom permutacijom promenljivih dobija se sistem

$$
(4.17)\quad
\begin{aligned}
&(\alpha) && a_0 f + a_1 f^1 + a_2 f^2 + a_3 f^3 + a_4 f^4 + a_5 f^5 = 0,\\
&(\beta) && a_5 f + a_0 f^1 + a_1 f^2 + a_2 f^3 + a_3 f^4 + a_4 f^5 = 0,\\
&(\gamma) && a_4 f + a_5 f^1 + a_0 f^2 + a_1 f^3 + a_2 f^4 + a_3 f^5 = 0,\\
&(\delta) && a_3 f + a_4 f^1 + a_5 f^2 + a_0 f^3 + a_1 f^4 + a_2 f^5 = 0,\\
&(\varepsilon) && a_2 f + a_3 f^1 + a_4 f^2 + a_5 f^3 + a_0 f^4 + a_1 f^5 = 0,\\
&(\xi) && a_1 f + a_2 f^1 + a_3 f^2 + a_4 f^3 + a_5 f^4 + a_0 f^5 = 0.
\end{aligned}
$$

Iz (4.17) sabiranjem (α) i (δ) dobija se

$$(\alpha) + (\delta) : (a_0 + a_3)\,(f + f^3) + (a_1 + a_4)\,(f^1 + f^4) + (a_2 + a_5)\,(f^2 + f^5) = 0.$$

Slično dobijamo

$$(\beta) + (\varepsilon) : (a_2 + a_5)\,(f + f^3) + (a_0 + a_3)\,(f^1 + f^4) + (a_1 + a_4)\,(f^2 + f^5) = 0;$$

$$(\gamma) + (\xi) : (a_1 + a_4)\,(f + f^3) + (a_2 + a_5)\,(f^1 + f^4) + (a_0 + a_3)\,(f^2 + f^5) = 0.$$

Takođe važi

$$(\alpha) - (\delta) : \quad (a_0 - a_3)\,(f - f^3) + (a_1 - a_4)\,(f^1 - f^4) + (a_2 - a_5)\,(f^2 - f^5) = 0;$$

$$(\beta) - (\varepsilon) : -(a_2 - a_5)\,(f - f^3) + (a_0 - a_3)\,(f^1 - f^4) + (a_1 - a_4)\,(f^2 - f^5) = 0;$$

$$(\gamma) - (\xi) : -(a_1 - a_4)\,(f - f^3) - (a_2 - a_5)\,(f^1 - f^4) + (a_1 - a_4)\,(f^2 - f^5) = 0.$$

Uvedimo oznake

$$a_0 + a_3 = 2\,M,\ a_1 + a_4 = 2\,N,\ a_2 + a_5 = 2\,P,\ a_0 - a_3 = 2\,Q,\ a_1 - a_4 = 2\,R,\ a_2 - a_5 = 2\,S.$$

Koristeći uvedene oznake, dobija se sledeći sistem:

$$
(4.18)\quad
\begin{aligned}
M\,(f + f^3) + N\,(f^1 + f^4) + P\,(f^2 + f^5) &= 0,\\
P\,(f + f^3) + M\,(f^1 + f^4) + N\,(f^2 + f^5) &= 0,\\
N\,(f + f^3) + P\,(f^1 + f^4) + M\,(f^2 + f^5) &= 0,\\
Q\,(f - f^3) + R\,(f^1 - f^4) + S\,(f^2 - f^5) &= 0,\\
-S\,(f - f^3) + Q\,(f^1 - f^4) + R\,(f^2 - f^5) &= 0,\\
-R\,(f - f^3) - S\,(f^1 - f^4) + Q\,(f^2 - f^5) &= 0.
\end{aligned}
$$

Rastavimo sistem (4.18) na dva pod-sistema:

$$
(4.19)\quad
\begin{aligned}
M\,(f + f^3) + N\,(f^1 + f^4) + P\,(f^2 + f^5) &= 0,\\
P\,(f + f^3) + M\,(f^1 + f^4) + N\,(f^2 + f^5) &= 0,\\
N\,(f + f^3) + P\,(f^1 + f^4) + M\,(f^2 + f^5) &= 0;
\end{aligned}
$$

$$
(4.20)\quad
\begin{aligned}
Q\,(f - f^3) + R\,(f^1 - f^4) + S\,(f^2 - f^5) &= 0,\\
-S\,(f - f^3) + Q\,(f^1 - f^4) + R\,(f^2 - f^5) &= 0,\\
-R\,(f - f^3) - S\,(f^1 - f^4) + Q\,(f^2 - f^5) &= 0.
\end{aligned}
$$

Determinanta sistema (4.17) je

$$(4.21)\qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5\\ a_5 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4\\ a_4 & a_5 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3\\ a_3 & a_4 & a_5 & a_0 & a_1 & a_2\\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_0 & a_1\\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_0 \end{vmatrix}$$

$$=\Big(\sum_{k=0}^{5} a_k\Big)\begin{vmatrix} a_0+a_3-a_2-a_5 & a_1+a_4-a_2-a_5\\ a_2+a_5-a_1-a_4 & a_0+a_3-a_1-a_4 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_0-a_3 & a_1-a_4 & a_2-a_5\\ a_5-a_2 & a_0-a_3 & a_1-a_4\\ a_4-a_1 & a_5-a_2 & a_0-a_3 \end{vmatrix}$$

$$=64\,(M+N+P)\begin{vmatrix} M-P & N-P\\ P-N & M-N \end{vmatrix}\begin{vmatrix} Q & R & S\\ -S & Q & R\\ -R & -S & Q \end{vmatrix}$$

$$=64\begin{vmatrix} M & N & P\\ P & M & N\\ N & P & M \end{vmatrix}\begin{vmatrix} Q & R & S\\ -S & Q & R\\ -R & -S & Q \end{vmatrix}=64\,\Delta_1\,\Delta_2,$$

gde su $\Delta_1=\begin{vmatrix} M & N & P\\ P & M & N\\ N & P & M \end{vmatrix}$ i $\Delta_2=\begin{vmatrix} Q & R & S\\ -S & Q & R\\ -R & -S & Q \end{vmatrix}$ redom determinante sistema (4.19) i (4.20).

Ove determinante imaju vrednosti

$$\Delta_1=\frac{1}{2}\,(M+N+P)\,[(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2],$$

$$\Delta_2=\frac{1}{2}\,(Q-R+S)\,[(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2].$$

Prema **[29]**, važe sledeća tvrđenja:

(I) *Ako je* $P+M+N\neq 0$ *i* $(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2\neq 0$, *sistem* (4.19) *ekvivalentan je sa jednačinom* $f+f^3=0$;

(II) *Ako je* $P+M+N\neq 0$ *i* $(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2=0$, *tj.* $M=N=P\neq 0$, *sistem* (4.19) *ekvivalentan je sa jednačinom*

$$f+f^1+f^2+f^3+f^4+f^5=0;$$

(III) *Ako je* $P+M+N=0$ *i* $(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2\neq 0$, *sistem* (4.19) *ekvivalentan je sa jednačinom* $f-f^1+f^3-f^4=0$;

(IV) *Ako je* $M+N+P=(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2=0$, *sistem* (4.19) *ekvivalentan je sa jednačinom* $0=0$;

(V) *Ako je* $Q-R+S\neq 0$ *i* $(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2\neq 0$, *sistem* (4.20) *ekvivalentan je sa jednačinom* $f-f^3=0$;

(VI) *Ako je* $Q-R+S\neq 0$ *i* $(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2=0$, *tj.* $Q=-R=S\neq 0$, *sistem* (4.20) *ekvivalentan je sa jednačinom* $f-f^1+f^2-f^3+f^4-f^5=0$;

(VII) *Ako je* $Q-R+S=0$ *i* $(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2\neq 0$, *sistem* (4.20) *ekvivalentan je sa jednačinom* $f-f^2-f^3+f^5=0$;

(VIII) *Ako je* $Q-R+S=(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2=0$, *sistem* (4.20) *ekvivalentan je sa jednačinom* $0=0$.

Na osnovu (I)—(VIII), očigledno važe sledeća tvrđenja:

I. *Ako je* $M+N+P\neq 0$, $(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2\neq 0$, $Q-R+S\neq 0$ *i* $(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2\neq 0$, *sistem* (4.18) *ekvivalentan je sa jednačinom* $f=0$;

II. *Ako je* $M+N+P\neq 0$, $(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2\neq 0$, $Q-R+S\neq 0$ *i* $(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2=0$, *sistem* (4.18) *ekvivalentan je sa jednačinom* $f-f^1+f^2=0$;

III. *Ako je* $M+N+P\neq 0$, $(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2\neq 0$, $Q-R+S=0$, *i* $(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2\neq 0$, *sistem* (4.18) *ekvivalentan je sa jednačinom* $f+f^1=0$;

IV. *Ako je* $M+N+P\neq 0$, $(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2\neq 0$, $Q-R+S=0$ *i* $(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2=0$, *sistem* (4.18) *ekvivalentan je sa jednačinom* $f+f^3=0$;

V. *Ako je* $M+N+P\neq 0$, $(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2=0$, $Q-R+S\neq 0$ *i* $(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2\neq 0$, *sistem* (4.18) *ekvivalentan je sa jednačinom* $f+f^1+f^2=0$;

VI. *Ako je* $M+N+P\neq 0$, $(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2=0$, $Q-R+S\neq 0$ *i* $(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2=0$, *sistem* (4.18) *ekvivalentan je sa jednačinom* $f+f^2+f^4=0$;

VII. *Ako je* $M+N+P\neq 0$, $(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2=0$, $Q-R+S=0$ *i* $(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2\neq 0$, *sistem* (4.18) *ekvivalentan je sa jednačinom* $f+2f^1+2f^2+f^3=0$;

VIII. *Ako je* $M+N+P\neq 0$, $(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2=0$, $Q-R+S=0$ *i* $(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2=0$, *sistem* (4.18) *ekvivalentan je sa jednačinom* $f+f^1+f^2+f^3+f^4+f^5=0$;

IX. *Ako je* $M+N+P=0$, $(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2\neq 0$, $Q-R+S\neq 0$ *i* $(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2\neq 0$, *sistem* (4.18) *ekvivalentan je sa jednačinom* $f-f^1=0$;

X. *Ako je* $M+N+P=0$, $(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2\neq 0$, $Q-R+S\neq 0$ *i* $(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2=0$, *sistem* (4.18) *ekvivalentan je sa jednačinom* $f-2f^1+2f^2-f^3=0$;

XI. *Ako je* $M+N+P=0$, $(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2\neq 0$, $Q-R+S=0$ *i* $(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2\neq 0$, *sistem* (4.18) *ekvivalentan je sa jednačinom* $f-f^2=0$;

XII. *Ako je* $M+N+P=0$, $(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2\neq 0$, $Q-R+S=0$ *i* $(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2=0$, *sistem* (4.18) *ekvivalentan je sa jednačinom* $f-f^1+f^3-f^4=0$;

XIII. *Ako je* $M+N+P=(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2=0$, $Q-R+S\neq 0$ *i* $(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2\neq 0$, *sistem* (4.18) *ekvivalentan je sa jednačinom* $f-f^3=0$;

XIV. *Ako je* $M+N+P=(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2=0$, $Q-R+S\neq 0$, $(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2=0$, *sistem* (4.18) *ekvivalentan je sa jednačinom* $f-f^1+f^2-f^3+f^4-f^5=0$;

XV. *Ako je* $M+N+P=(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2=0$, $Q-R+S=0$ *i* $(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2\neq 0$, *sistem* (4.18) *ekvivalentan je sa jednačinom*

$$f-f^2-f^3+f^5=0;$$

XVI. *Ako je* $M+N+P=(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2=0$, $Q-R+S=0$ *i* $(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2=0$, *sistem* (4.18) *ekvivalentan je sa jednačinom* $0=0$.

Dokazana je, dakle, sledeća lema.

Lema 5. *Funkcionalna jednačina* (4.15) *ekvivalentna je sa jednačinom*:

I. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)=0$,

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k\neq 0$, $(a_0-a_1+a_3-a_4)^2+(a_1-a_2+a_4-a_5)^2+(a_2-a_3+a_5-a_0)^2\neq 0$,

$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k a_k\neq 0$, $(a_0+a_1-a_3-a_4)^2+(a_1+a_2-a_4-a_5)^2+(a_2+a_3-a_5-a_0)^2\neq 0$;

II. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)-f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)+f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2)=0$,

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k\neq 0$, $(a_0-a_1+a_3-a_4)^2+(a_1-a_2+a_4-a_5)^2+(a_2-a_3+a_5-a_0)^2\neq 0$,

$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k a_k\neq 0$, $(a_0+a_1-a_3-a_4)^2+(a_1+a_2-a_4-a_5)^2+(a_2+a_3-a_5-a_0)^2=0$;

III. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)+f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)=0$,

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k\neq 0$, $(a_0-a_1+a_3-a_4)^2+(a_1-a_2+a_4-a_5)^2+(a_2-a_3+a_5-a_0)^2\neq 0$,

$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k a_k=0$, $(a_0+a_1-a_3-a_4)^2+(a_1+a_2-a_4-a_5)^2+(a_2+a_3-a_5-a_0)^2\neq 0$;

IV. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)+f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)=0$,

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k\neq 0$, $(a_0-a_1+a_3-a_4)^2+(a_1-a_2+a_4-a_5)^2+(a_2-a_3+a_5-a_0)^2\neq 0$,

$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k a_k=0$, $(a_0+a_1-a_3-a_4)^2+(a_1+a_2-a_4-a_5)^2+(a_2+a_3-a_5-a_0)^2=0$;

V. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)+f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)+f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2)=0$,

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k\neq 0$, $(a_0-a_1+a_3-a_4)^2+(a_1-a_2+a_4-a_5)^2+(a_2-a_3+a_5-a_0)^2=0$,

$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k a_k\neq 0$, $(a_0+a_1-a_3-a_4)^2+(a_1+a_2-a_4-a_5)^2+(a_2+a_3-a_5-a_0)^2\neq 0$;

VI. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)+f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2)+f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4)=0$,

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k\neq 0$, $(a_0-a_1+a_3-a_4)^2+(a_1-a_2+a_4-a_5)^2+(a_2-a_3+a_5-a_0)^2=0$,

$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k a_k\neq 0$, $(a_0+a_1-a_3-a_4)^2+(a_1+a_2-a_4-a_5)^2+(a_2+a_3-a_5-a_0)^2=0$;

VII. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)+2f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$

$$+2f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2)+f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)=0,$$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k \neq 0,\ (a_0-a_1+a_3-a_4)^2+(a_1-a_2+a_4-a_5)^2+(a_2-a_3+a_5-a_0)^2=0,$

$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k a_k=0,\ (a_0+a_1-a_3-a_4)^2+(a_1+a_2-a_4-a_5)^2+(a_2+a_3-a_5-a_0)^2\neq 0;$

VIII. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)+f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)+f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2)$

$+f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)+f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4)+f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=0,$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k \neq 0,\ (a_0-a_1+a_3-a_4)^2+(a_1-a_2+a_4-a_5)^2+(a_2-a_3+a_5-a_0)^2=0,$

$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k a_k=0,\ (a_0+a_1-a_3-a_4)^2+(a_1+a_2-a_4-a_5)^2+(a_2+a_3-a_5-a_0)^2=0;$

IX. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)-f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)=0,$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k=0,\ (a_0-a_1+a_3-a_4)^2+(a_1-a_2+a_4-a_5)^2+(a_2-a_3+a_5-a_0)^2\neq 0,$

$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k a_k\neq 0,\ (a_0+a_1-a_3-a_4)^2+(a_1+a_2-a_4-a_5)^2+(a_2+a_3-a_5-a_0)^2\neq 0;$

X. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)-2f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$

$$+2f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2)-f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)=0,$$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k=0,\ (a_0-a_1+a_3-a_4)^2+(a_1-a_2+a_4-a_5)^2+(a_2-a_3+a_5-a_0)^2\neq 0,$

$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k a_k\neq 0,\ (a_0+a_1-a_3-a_4)^2+(a_1+a_2-a_4-a_5)^2+(a_2+a_3-a_5-a_0)^2=0;$

XI. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)-f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2)=0,$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k=0,\ (a_0-a_1+a_3-a_4)^2+(a_1-a_2+a_4-a_5)^2+(a_2-a_3+a_5-a_0)^2\neq 0,$

$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k a_k=0,\ (a_0+a_1-a_3-a_4)^2+(a_1+a_2-a_4-a_5)^2+(a_2+a_3-a_5-a_0)^2\neq 0;$

XII. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)-f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$

$$+f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)-f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4)=0,$$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k=0,\ (a_0-a_1+a_3-a_4)^2+(a_1-a_2+a_4-a_5)^2+(a_2-a_3+a_5-a_0)^2\neq 0,$

$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k a_k=0,\ (a_0+a_1-a_3-a_4)^2+(a_1+a_2-a_4-a_5)^2+(a_2+a_3-a_5-a_0)^2=0;$

XIII. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)-f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)=0,$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k = 0,\ (a_0 - a_1 + a_3 - a_4)^2 + (a_1 - a_2 + a_4 - a_5)^2 + (a_2 - a_3 + a_5 - a_0)^2 = 0,$

$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k a_k \neq 0,\ (a_0 + a_1 - a_3 - a_4)^2 + (a_1 + a_2 - a_4 - a_5)^2 + (a_2 + a_3 - a_5 - a_0)^2 \neq 0;$

XIV. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) - f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1) + f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2)$

$- f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3) + f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) - f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0,$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k = 0,\ (a_0 - a_1 + a_3 - a_4)^2 + (a_1 - a_2 + a_4 - a_5)^2 + (a_2 - a_3 + a_5 - a_0)^2 = 0,$

$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k a_k \neq 0,\ (a_0 + a_1 - a_3 - a_4)^2 + (a_1 + a_2 - a_4 - a_5)^2 + (a_2 + a_3 - a_5 - a_0)^2 = 0;$

XV. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$

$- f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3) - f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k = 0,\ (a_0 - a_1 + a_3 - a_4)^2 + (a_1 - a_2 + a_4 - a_5)^2 + (a_2 - a_3 + a_5 - a_0)^2 = 0,$

$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k a_k = 0,\ (a_0 + a_1 - a_3 - a_4)^2 + (a_1 + a_2 - a_4 - a_5)^2 + (a_2 + a_3 - a_5 - a_0)^2 \neq 0;$

XVI. $0 = 0,$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k = 0,\ (a_0 - a_1 + a_3 - a_4)^2 + (a_1 - a_2 + a_4 - a_5)^2 + (a_2 - a_3 + a_5 - a_0)^2 = 0,$

$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k a_k = 0,\ (a_0 + a_1 - a_3 - a_4)^2 + (a_1 + a_2 - a_4 - a_5)^2 + (a_2 + a_3 - a_5 - a_0)^2 = 0.$

Za svaku jednačinu I—XVI dajemo formulu koja sadrži sve formule koje daju opšta rešenja ovih jednačina. Određuje se, uz to i opšte reproduktivno rešenje za svaku od prethodnih kanonskih jednačina.

Propozicija 5. *Opšte rešenje jednačine*

$$f - f^1 + f^2 - f^3 + f^4 - f^5 = 0$$

dato je formulom

$$f = c_0 \Pi + c_1 \Pi^1 + c_2 \Pi^2 + c_3 \Pi^3 + c_4 \Pi^4 + (c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4)\Pi^5,$$

gde $\Pi : \mathbf{R}^6 \to \mathbf{R}$ *proizvoljna funkcija i* $c_i\,(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ *proizvoljne konstante.*

Dokaz. Posmatranoj jednačini odgovara sistem

$$\begin{aligned} f - f^1 + f^2 - f^3 + f^4 - f^5 &= 0, \\ -f + f^1 - f^2 + f^3 - f^4 + f^5 &= 0, \\ f - f^1 + f^2 - f^3 + f^4 - f^5 &= 0, \\ -f + f^1 - f^2 + f^3 - f^4 + f^5 &= 0, \\ f - f^1 + f^2 - f^3 + f^4 - f^5 &= 0, \\ -f + f^1 - f^2 + f^3 - f^4 + f^5 &= 0 \end{aligned}$$

čija je matrica

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Opšte rešenje prema (2.14) dato je sa

$$\begin{bmatrix} f \\ f^1 \\ f^2 \\ f^3 \\ f^4 \\ f^5 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} \Pi \\ \Pi^1 \\ \Pi^2 \\ \Pi^3 \\ \Pi^4 \\ \Pi^5 \end{bmatrix}, \tag{4.22}$$

gde je C najopštija ciklična matrica reda 6 koja zadovoljava uslov $A \cdot C = O$.

Prema formuli (4.22) važi

$$f = c_0 \Pi + c_1 \Pi^1 + c_2 \Pi^2 + c_3 \Pi^3 + c_4 \Pi^4 + (c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4) \Pi^5 \tag{4.23}$$

što predstavlja opšte rešenje date jednačine.

Propozicija 6. *Opšte reproduktivno rešenje jednačine*

$$f - f^1 + f^2 - f^3 + f^4 - f^5 = 0$$

je

$$f = \frac{5}{6} \Pi + \frac{1}{6} \Pi^1 - \frac{1}{6} \Pi^2 + \frac{1}{6} \Pi^3 - \frac{1}{6} \Pi^4 + \frac{1}{6} \Pi^5,$$

gde je Π proizvoljna funkcija.

Dokaz. Tvrđenje sleduje na osnovu formule (2.5), a može se neposredno dobiti iz formule (4.23).

Naime, polazeći od (4.23) imamo

$$\begin{aligned} f(f) &= c_0 f + c_1 f^1 + c_2 f^2 + c_3 f^3 + c_4 f^4 + (c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4) f^5 \\ &= (2c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4) f + (-c_0 + 2c_1 - c_2 + c_3 - c_4) f^1 \\ &\quad + (c_0 - c_1 + 2c_2 - c_3 + c_4) f^2 + (-c_0 + c_1 - c_2 + 2c_3 - c_4) f^3 \\ &\quad + (c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + 2c_4) f^4. \end{aligned}$$

Iz uslova $f(f) = f$ dobija se sistem po nepoznatim c_0, c_1, c_2, c_3, c_4

$$\begin{aligned} 2c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4 &= 1, \\ -c_0 + 2c_1 - c_2 + c_3 - c_4 &= 0, \\ c_0 - c_1 + 2c_2 - c_3 + c_4 &= 0, \\ -c_0 + c_1 - c_2 + 2c_3 - c_4 &= 0, \\ c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + 2c_4 &= 0. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Rešenje sistema (4.24) je $c_0=\frac{5}{6}$, $c_1=\frac{1}{6}$, $c_2=-\frac{1}{6}$, $c_3=\frac{1}{6}$, $c_4=-\frac{1}{6}$. Jasno je da je rešenje oblika (4.23) sa ovako određenim koeficijentima reproduktivno, jer ono ispunjava potreban uslov za to, a s druge strane, takvo rešenje među rešenjima datim sa (4.23) svakako postoji.

Istim postupkom mogu se odrediti formule oba tipa za sve jednačine koje se pojavljuju u iskazu leme 5.

Dobijene rezultate izlažemo u obliku leme i teorema koje slede.

Lema 6. *Opšte rešenje jednačine* (*J*) *dato je formulom* (*F*), *gde je* Π *proizvoljna funkcija.*

	Jednačina (*J*)	*Formula* (*F*)
1°	$f=0$	$f\equiv 0,$
2°	$f-f^1+f^2=0$	$f=c_0\Pi+c_1\Pi^1+(c_1-c_0)\Pi^2 - c_0\Pi^3-c_1\Pi^4+(c_0-c_1)\Pi^5,$
3°	$f+f^1=0$	$f=c_0(\Pi-\Pi^1+\Pi^2-\Pi^3+\Pi^4-\Pi^5),$
4°	$f+f^3=0$	$f=c_0(\Pi-\Pi^3)+c_1(\Pi^1-\Pi^4)+c_2(\Pi^2-\Pi^5),$
5°	$f+f^1+f^2=0$	$f=c_0\Pi+c_1\Pi^1-(c_0+c_1)\Pi^2 + c_0\Pi^3+c_1\Pi^4-(c_0+c_1)\Pi^5,$
6°	$f+f^2+f^4=0$	$f=c_0\Pi+c_1\Pi^1+c_2\Pi^2+c_3\Pi^3-(c_0+c_2)\Pi^4 -(c_1+c_3)\Pi^5,$
7°	$f+2f^1+2f^2+f^3=0$	$f=c_0\Pi+c_1\Pi^1+c_2\Pi^2-(c_0+2c_1+2c_2)\Pi^3 +(2c_0+3c_1+2c_2)\Pi^4-(2c_0+2c_1+c_2)\Pi^5,$
8°	$f+f^1+f^2+f^3+f^4+f^5=0$	$f=c_0(\Pi-\Pi^5)+c_1(\Pi^1-\Pi^5)+c_2(\Pi^2-\Pi^5) +c_3(\Pi^3-\Pi^5)+c_4(\Pi^4-\Pi^5),$
9°	$f-f^1=0$	$f=c_0(\Pi+\Pi^1+\Pi^2+\Pi^3+\Pi^4+\Pi^5),$
10°	$f-2f^1+2f^2-f^3=0$	$f=c_0\Pi+c_1\Pi^1+c_2\Pi^2+(c_0-2c_1-2c_2)\Pi^3 +(2c_0-3c_1+2c_2)\Pi^4+(2c_0-2c_1+c_2)\Pi^5,$
11°	$f-f^2=0$	$f=c_0(\Pi+\Pi^2+\Pi^4)+c_1(\Pi^1+\Pi^3+\Pi^5),$
12°	$f-f^1+f^3-f^4=0$	$f=c_0\Pi+c_1\Pi^1+c_2\Pi^2+c_3\Pi^3 +(c_0-c_1+c_3)\Pi^4+(c_0-c_2+c_3)\Pi^5,$
13°	$f-f^3=0$	$f=c_0(\Pi+\Pi^3)+c_1(\Pi^1+\Pi^4)+c_2(\Pi^2+\Pi^5),$
14°	$f-f^1+f^2-f^3+f^4-f^5=0$	$f=c_0\Pi+c_1\Pi^1+c_2\Pi^2+c_3\Pi^3+c_4\Pi^4 +(c_0-c_1+c_2-c_3+c_4)\Pi^5,$

15° $f+f^1-f^3-f^4=0$ $\qquad f=c_0\Pi+c_1\Pi^1+c_2\Pi^2+c_3\Pi^3$

$$+(c_0+c_1-c_3)\Pi^4+(-c_0+c_2+c_3)\Pi^5,$$

16° $0=0$ $\qquad f=\Pi.$

Teorema 5. *Opšte rešenje jednačine*

$$a_0f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)+a_1f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$$
$$+a_2f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2)+a_3f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)$$
$$+a_4f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4)+a_5f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=0$$

dato je sledećim formulama:

1° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)\equiv 0,$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k\neq 0,\ (a_0-a_1+a_3-a_4)^2+(a_1-a_2+a_4-a_5)^2+(a_2-a_3+a_5-a_0)^2\neq 0,$

$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k a_k\neq 0,\ (a_0+a_1-a_3-a_4)^2+(a_1+a_2-a_4-a_5)^2+(a_2+a_3-a_5-a_0)^2\neq 0;$

2° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)=c_0\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)+c_1\Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$

$$+(c_1-c_0)\Pi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2)-c_0\Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)$$
$$-c_1\Pi(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4)+(c_0-c_1)\Pi(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k\neq 0,\ (a_0-a_1+a_3-a_4)^2+(a_1-a_2+a_4-a_5)^2+(a_2-a_3+a_5-a_0)^2\neq 0,$

$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k a_k\neq 0,\ (a_0+a_1-a_3-a_4)^2+(a_1+a_2-a_4-a_5)^2+(a_2+a_3-a_5-a_0)^2=0;$

3° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)=c_0\left[\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)+\Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)\right.$

$$+\Pi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2)+\Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)$$
$$\left.+\Pi(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4)+\Pi(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)\right],$$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k\neq 0,\ (a_0-a_1+a_3-a_4)^2+(a_1-a_2+a_4-a_5)^2+(a_2-a_3+a_5-a_0)^2\neq 0,$

$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k a_k=0,\ (a_0+a_1-a_3-a_4)^2+(a_1+a_2-a_4-a_5)^2+(a_2+a_3-a_5-a_0)^2\neq 0;$

4° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)=c_0\left[\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)-\Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)\right]$

$$+c_1\left[\Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)-\Pi(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4)\right]$$
$$+c_2\left[\Pi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2)-\Pi(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right],$$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k\neq 0,\ (a_0-a_1+a_3-a_4)^2+(a_1-a_2+a_4-a_5)^2+(a_2-a_3+a_5-a_0)^2\neq 0,$

$\sum_{k=0}^{5}(-1)^k a_k=0,\ (a_0+a_1-a_3-a_4)^2+(a_1+a_2-a_4-a_5)^2+(a_2+a_3-a_5-a_0)^2=0;$

5° $f x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = c_0 \Pi (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + c_1 \Pi (x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$

$$- (c_0 + c_1) \Pi (x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) + c_0 \Pi (x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)$$

$$+ c_1 \Pi (x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) - (c_0 + c_1) \Pi (x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k \neq 0,\ (a_0 - a_1 + a_3 - a_4)^2 + (a_1 - a_2 + a_4 - a_5)^2 + (a_2 - a_3 + a_5 - a_0)^2 = 0,$

$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k a_k \neq 0,\ (a_0 + a_1 - a_3 - a_4)^2 + (a_1 + a_2 - a_4 - a_5)^2 + (a_2 + a_3 - a_5 - a_0)^2 \neq 0;$

6° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = c_0 \Pi (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + c_1 \Pi (x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$

$$+ c_2 \Pi (x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) + c_3 \Pi (x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)$$

$$- (c_0 + c_2) \Pi (x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) - (c_1 + c_3) \Pi (x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k \neq 0,\ (a_0 - a_1 + a_3 - a_4)^2 + (a_1 - a_2 + a_4 - a_5)^2 + (a_2 - a_3 + a_5 - a_0)^2 = 0,$

$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k a_k \neq 0,\ (a_0 + a_1 - a_3 - a_4)^2 + (a_1 + a_2 - a_4 - a_5)^2 + (a_2 + a_3 - a_5 - a_0)^2 = 0;$

7° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = c_0 \Pi (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + c_1 \Pi (x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$

$$+ c_2 \Pi (x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2)$$

$$- (c_0 + 2 c_1 + 2 c_2) \Pi (x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)$$

$$+ (2 c_0 + 3 c_1 + 2 c_2) \Pi (x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$- (2 c_0 + 2 c_1 + c_2) \Pi (x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k \neq 0,\ (a_0 - a_1 + a_3 - a_4)^2 + (a_1 - a_2 + a_4 - a_5)^2 + (a_2 - a_3 + a_5 - a_0)^2 = 0,$

$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k a_k = 0,\ (a_0 + a_1 - a_3 - a_4)^2 + (a_1 + a_2 - a_4 - a_5)^2 + (a_2 + a_3 - a_5 - a_0)^2 \neq 0;$

8° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = c_0 [\Pi (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) - \Pi (x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)]$

$$+ c_1 [\Pi (x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1) - \Pi (x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)]$$

$$+ c_2 [\Pi (x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) - \Pi (x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)]$$

$$+ c_3 [\Pi (x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3) - \Pi (x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)]$$

$$+ c_4 [\Pi (x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) - \Pi (x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)],$$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k \neq 0,\ (a_0 - a_1 + a_3 - a_4)^2 + (a_1 - a_2 + a_4 - a_5)^2 + (a_2 - a_3 + a_5 - a_0)^2 = 0,$

$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k a_k = 0,\ (a_0 + a_1 - a_3 - a_4)^2 + (a_1 + a_2 - a_4 - a_5)^2 + (a_2 + a_3 - a_5 - a_0)^2 = 0;$

9° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = c_0 \left[\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + \Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1) + \Pi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) + \Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3) + \Pi(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) + \Pi(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \right],$$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k = 0$, $(a_0 - a_1 + a_3 - a_4)^2 + (a_1 - a_2 + a_4 - a_5)^5 + (a_2 - a_3 + a_5 - a_0)^2 \neq 0$,

$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k a_k \neq 0$, $(a_0 + a_1 - a_3 - a_4)^2 + (a_1 + a_2 - a_4 - a_5)^2 + (a_2 + a_3 - a_5 - a_0)^2 \neq 0$;

10° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = c_0 \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + c_1 \Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1) + c_2 \Pi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) + (c_0 - 2c_1 + 2c_2) \cdot \Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3) + (2c_0 - 3c_1 + 2c_2) \cdot \Pi(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) + (2c_0 - 2c_1 + c_2) \cdot \Pi(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6),$$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k = 0$, $(a_0 - a_1 + a_3 - a_4)^2 + (a_1 - a_2 + a_4 - a_5)^2 + (a_2 - a_3 + a_5 - a_0)^2 \neq 0$,

$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k a_k \neq 0$, $(a_0 + a_1 - a_3 - a_4)^2 + (a_1 + a_2 - a_4 - a_5)^2 + (a_2 + a_3 - a_5 - a_0)^2 = 0$;

11° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = c_0 \left[\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + \Pi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) + \Pi(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) \right] + c_1 \left[\Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1) + \Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3) + \Pi(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \right],$$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k = 0$, $(a_0 - a_1 + a_3 - a_4)^2 + (a_1 - a_2 + a_4 - a_5)^2 + (a_2 - a_3 + a_5 - a_0)^2 \neq 0$,

$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k a_k = 0$, $(a_0 + a_1 - a_3 - a_4)^2 + (a_1 + a_2 - a_4 - a_5)^2 + (a_2 + a_3 - a_5 - a_0)^2 \neq 0$;

12° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = c_0 \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + c_1 \Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1) + c_2 \Pi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) + c_3 \Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3) + (c_0 - c_1 + c_3) \Pi(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) + (c_0 - c_2 + c_3) \Pi(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k = 0$, $(a_0 - a_1 + a_3 - a_4)^2 + (a_1 - a_2 + a_4 - a_5)^2 + (a_2 - a_3 + a_5 - a_0)^2 \neq 0$,

$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k a_k = 0$, $(a_0 + a_1 - a_3 - a_4)^2 + (a_1 + a_2 - a_4 - a_5)^2 + (a_2 + a_3 - a_5 - a_0)^2 = 0$;

$$13^\circ\ f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = c_0 [\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + \Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)]$$
$$+ c_1 [\Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1) + \Pi(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4)]$$
$$+ c_2 [\Pi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) + \Pi(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)],$$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k = 0,\ (a_0 - a_1 + a_3 - a_4)^2 + (a_1 - a_2 + a_4 - a_5)^2 + (a_2 - a_3 + a_5 - a_0)^2 = 0,$

$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k a_k \neq 0,\ (a_0 + a_1 - a_3 - a_4)^2 + (a_1 + a_2 - a_4 - a_5)^2 + (a_2 + a_3 - a_5 - a_0)^2 \neq 0;$

$$14^\circ\ f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = c_0 \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + c_1 \Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$$
$$+ c_2 \Pi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) + c_3 \Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)$$
$$+ c_4 \Pi(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$+ (c_0 - c_1 + c_2 - c_3 + c_4) \Pi(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k = 0,\ (a_0 - a_1 + a_3 - a_4)^2 + (a_1 - a_2 + a_4 - a_5)^2 + (a_2 - a_3 + a_5 - a_0)^2 = 0,$

$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k a_k \neq 0,\ (a_0 + a_1 - a_3 - a_4)^2 + (a_1 + a_2 - a_4 - a_5)^2 + (a_2 + a_3 - a_5 - a_0)^2 = 0;$

$$15^\circ\ f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = c_0 \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + c_1 \Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$$
$$+ c_2 \Pi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) + c_3 \Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)$$
$$+ (c_0 + c_1 - c_3) \Pi(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4)$$
$$+ (-c_0 + c_2 + c_3) \Pi(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5),$$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k = 0,\ (a_0 - a_1 + a_3 - a_4)^2 + (a_1 - a_2 + a_4 - a_5)^2 + (a_2 - a_3 + a_5 - a_0)^2 = 0,$

$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k a_k = 0,\ (a_0 + a_1 - a_3 - a_4)^2 + (a_1 + a_2 - a_4 - a_5)^2 + (a_2 + a_3 - a_5 - a_0)^2 \neq 0;$

$$16^\circ\ f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6),$$

ako je $\sum_{k=0}^{5} a_k = 0,\ (a_0 - a_1 + a_3 - a_4)^2 + (a_1 - a_2 + a_4 - a_5)^2 + (a_2 - a_3 + a_5 - a_0)^2 = 0$

$\sum_{k=0}^{5} (-1)^k a_k = 0,\ (a_0 + a_1 - a_3 - a_4)^2 + (a_1 + a_2 - a_4 - a_5)^2 + (a_2 + a_3 - a_5 - a_0)^2 = 0,$

gde je $\Pi : R^6 \to R$ *proizvoljna funkcija.*

Teorema 6. *Opšta reproduktivna rešenja jednačina* $1^\circ - 16^\circ$ *iz prethodne teoreme data su redom formulama*

$$1^\circ\ f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \equiv 0,$$

$$2^\circ\ f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{6} [2\,\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + \Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$$
$$- \Pi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) - 2\,\Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)$$
$$- \Pi(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) + \Pi(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)],$$

$$3^\circ \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{6}\,[\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) - \Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$$
$$+ \Pi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) - \Pi(x_4, x_5, 6_6, x_1, x_2, x_3)$$
$$+ \Pi(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) - \Pi(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)],$$

$$4^\circ \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{2}\,[\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) - \Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)],$$

$$5^\circ \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{6}\,[2\,\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) - \Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$$
$$- \Pi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) + 2\,\Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)$$
$$- \Pi(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) - \Pi(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)],$$

$$6^\circ \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{3}\,[2\,\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) - \Pi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2)$$
$$- \Pi(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4)],$$

$$7^\circ \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{3}\,[3\,\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) - 2\,\Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$$
$$+ \Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3) - 2\,\Pi(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)],$$

$$8^\circ \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{6}\,[5\,\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) - \Pi(x_2, x_3, x_4, x_5\, x_6, x_1)$$
$$- \Pi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) - \Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)$$
$$- \Pi(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) - \Pi(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)],$$

$$9^\circ \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{6}\,[\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + \Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$$
$$+ \Pi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) + \Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)$$
$$+ \Pi(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) + \Pi(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)],$$

$$10^\circ \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{6}\,[3\,\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + 2\,\Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$$
$$- \Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3) + 2\,\Pi(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)],$$

$$11^\circ \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{3}\,[\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + \Pi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2)$$
$$+ \Pi(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4)],$$

$$12^\circ \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{6}\,[4\,\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + \Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$$
$$+ \Pi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) - 2\,\Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)$$
$$+ \Pi(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) + \Pi(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)],$$

13° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{2}[\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + \Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)]$,

14° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{6}[5\,\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + \Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$$
$$- \Pi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) + \Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)$$
$$- \Pi(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) + \Pi(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)],$$

15° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{1}{6}[4\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) - \Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)$$
$$+ \Pi(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) + 2\,\Pi(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)$$
$$+ \Pi(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) - \Pi(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)],$$

16° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$,

gde je Π proizvoljna funkcija.

Glava V: CIKLIČNE LINEARNE NEHOMOGENE JEDNAČINE

U ovoj glavi tretira se problem rešavanja jednačina

$$(5.1)\quad a_0 f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + a_1 f(x_2, \ldots, x_n, x_1) + \cdots + a_{n-1} f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

gde su $a_i (i=0, 1, \ldots, n-1)$ realni (ili kompleksni) brojevi, $g: S^n \to \mathbf{R}$ (ili $\mathbf{C}$) data funkcija, $f: S^n \to \mathbf{R}$ (ili $\mathbf{C}$) nepoznata funkcija, S proizvoljan skup koji ima najmanje n elemenata.

Jednačina (5.1) je ciklična i nehomogena funkcionalna jednačina sa konstantnim koeficijentima.

Jednačina (5.1) nije moguća za svaku funkciju g, te se daje potreban uslov da ona bude moguća.

Dokazuje se da je svaka jednačina (5.1), u zavisnosti od toga koje uslove ispunjavaju koeficijenti, ekvivalentna sa jednom od četiri kanoske nehomogene jednačine za $n=3$, sa jednom od osam za $n=4$ i sa jednom od 16 jednačina za $n=6$.

Daje se postupak pomoću koga se može za svaku jednačinu (5.1) odrediti njoj ekvivalentna kanonska jednačina.

Najzad, za svaku kanonsku jednačinu određuje se opšte rešenje.

1. Razmotrićemo najpre koje uslove treba da ispuni data funkcija g da jednačina

$$(5.1)\quad a_0 f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + a_1 f(x_2, \ldots, x_n, x_1) + \cdots + a_{n-1} f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

bude moguća.

S. B. PREŠIĆ je u [**23**] dao metodu rešavanja sledeće klase linearnih nehomogenih jednačina.

$$(5.2)\qquad a_1(x) f(\theta_1 x) + a_2(x) f(\theta_2 x) + \cdots + a_n(x) f(\theta_n x) = g(x),$$

gde su $a_i(x)$ $(i=1, \ldots, n)$ i $g(x)$ date funkcije, f nepoznata funkcija i $\theta_1, \ldots, \theta_n$ obrazuju grupu reda n.

Teorema (PREŠIĆ). *Neka je $B(x)$ matrica koja ispunjava uslove* (C_1) *i* (C_2) *leme* II, *glava* II.

Jednačina (5.2) *je moguća ako i samo ako važi*

$$\big(A(x)B(x)+I\big)\begin{bmatrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x)\end{bmatrix} = O.$$

Ako je ispunjen uslov (C_3), *tada je opšte rešenje jednačine* (5.2) *dato formulom*

$$\begin{bmatrix} f(x) \\ f(\theta_2 x) \\ \vdots \\ f(\theta_n x)\end{bmatrix} = \big(B(x)A(x)+I\big)\begin{bmatrix} h(x) \\ h(\theta_2 x) \\ \vdots \\ h(\theta_n x)\end{bmatrix} - B(x)\begin{bmatrix} g(x) \\ g(\theta_2 x) \\ \vdots \\ g(\theta_n x)\end{bmatrix}$$

gde je h proizvoljna funkcija.

Ovaj rezultat može se koristiti za dobijanje opšteg rešenja jednačina oblika (5.1).

Daćemo međutim jedan potreban uslov da jednačina (5.1) bude mogućna.

Funkcionalne izraze koje sadrži jednačina (5.1) označimo redom sa $f^0=f$, $f^k\ (k=1, \ldots, n-1)$.

Polazeći od (5.1), cikličnom permutacijom promenljivih, dobija se sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned} &a_0 f + a_1 f^1 + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} = g, \\ &a_{n-1} f + a_0 f^1 + \cdots + a_{n-2} f^{n-1} = g^1, \\ &\qquad\vdots \\ &a_1 f + a_2 f^1 + \cdots + a_0 f^{n-1} = g^{n-1}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Sistem (5.3) može se napisati u obliku

$$AF=G,$$

gde je

$$A=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & & a_{n-2} \\ \vdots & & & \\ a_1 & a_2 & & a_0 \end{bmatrix}, \quad F=\begin{bmatrix} f \\ f^1 \\ \vdots \\ f^{n-1}\end{bmatrix}, \quad G=\begin{bmatrix} g \\ g^1 \\ \vdots \\ g^{n-1}\end{bmatrix}.$$

Neka je C ciklična matrica reda n sa konstantnim elementima, takva da je $A \cdot C = O$. (Postojanje takve matrice C obezbeđuje lema 1 u glavi II.)

Teorema 1. *Potreban uslov da jednačina* (5.1) *bude moguća jeste*

$$CG=O.$$

Dokaz. Neka je jednačina

$$AF=G$$

moguća.

Množeći sleva matricom C dobija se

$$CAF=CG. \tag{5.4}$$

Kako je $A \cdot C = C \cdot A = O$, to iz (5.4) izlazi

$$C \cdot G = O,$$

što je i trebalo dokazati.

Teorema 2. *Neka* C *ispunjava uslov Leme* 1, *glava* II, *a* B *uslove* (C_1) *i* (C_2) *Leme* II, *glava* II, *i uslov* (C_3): $ABG + G = O$.

Opšte rešenje jednačine (5.1) *dato je formulom*

$$F = C\Pi - BG. \tag{5.4'}$$

Dokaz. Kako je

$$AF = AC\Pi - ABG = G,$$

to je (5.4′) rešenje jednačine (5.1).

Dokažimo da je (5.4′) opšte rešenje jednačine (5.1). Neka je f rešenje jednačine (5.1), koju ćemo napisati u obliku

$$E(f) = g. \tag{5.4''}$$

Sa f_H označimo opšte rešenje jednačine $E(f) = 0$, a sa f_0 partikularno rešenje jednačine (5.4″).

Tada je $f = f_H + f_0$ opšte rešenje jednačine (5.4″). Zaista,

$$E(f_H + f_0) = E(f_H) + E(f_0) = g.$$

S druge strane, neka je f proizvoljno izabrano rešenje jednačine (5.4″). Tada je $E(f - f_0) = E(f) - E(f_0) = g - g = 0$, tj. $f - f_0$ je rešenje homogenog dela, te postoji specijalizacija $\bar{f}_H$ izraza f_H takva da je

$$f - f_0 = \bar{f}_H, \quad \text{tj.} \quad f = \bar{f}_H + f_0.$$

Dakle, $f_H + f_0$ obuhvata sva rešenja jednačine (5.4″).

Kako je $C\Pi$ opšte rešenje homogene jednačine $E(f) = 0$ dato u matričnoj formi, i $-BG$ partikularno rešenje jednačine $E(f) = g$ [23], to $F = C\Pi - BG$ obuhvata sva rešenja nehomogene jednačine.

PRIMEDBA. Na osnovu prethodnog dokaza, jasno je da važi sledeće tvrđenje:

Ako je f_H *bilo koje opšte rešenje homogene jednačine* $E(f) = 0$, *a* f_0 *partikularno rešenje nehomogene jednačine* $E(f) = g$, *tada je sa*

$$f = f_H + f_0$$

dato jedno opšte rešenje jednačine $E(f) = g$.

2. U ovom odeljku razmatra se problem rešavanja jednačine

$$a_0 f(x_1, x_2, x_3) + a_1 f(x_2, x_3, x_1) + a_2 f(x_3, x_1, x_2) = g(x_1, x_2, x_3). \tag{5.5}$$

P. DRĂGILĂ i P. M. VASIĆ u [5] proučavali su jednačinu (5.5) kad je 1° $g(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1)$; 2° $g(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2)$; 3° $g(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_1, x_2, x_3)$. Dokazali su da je opšte rešenje jednačine (5.5) dato sa

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\Delta} \left[(a_0{}^2 - a_1 a_2)\, g(x_1, x_2, x_3) + (a_2{}^2 - a_0 a_1)\, g(x_2, x_2, x_1) \right.$$
$$\left. + (a_1{}^2 - a_0 a_2)\, g(x_3, x_1, x_2) \right],$$

ako je $\Delta = \frac{1}{2} (a_0 + a_1 + a_2) \left[(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 \right] \neq 0$.

U slučaju $\Delta=0$, autori su dali takođe opšte rešenje.

Sličnim postupkom kao u (IV, 1) dokazuje se da važi:

Lema 1. *Funkcionalna jednačina* (5.4) *ekvivalentna je sa*

I. $$f(x_1, x_2, x_3)=\frac{1}{\Delta}\left[(a_0^2-a_1 a_2)\, g(x_1, x_2, x_3)+(a_2^2-a_0 a_1)\, g(x_2, x_3, x_1)\right.$$
$$\left.+(a_1^2-a_0 a_2)\, g(x_3, x_1, x_2)\right],$$

ako je $a_0+a_1+a_2\neq 0$ *i* $(a_0-a_1)^2+(a_1-a_2)^2+(a_2-a_0)^2\neq 0$;

II. $$f(x_1, x_2, x_3)+f(x_2, x_3, x_1)+f(x_3, x_1, x_2)=\frac{g(x_1, x_2, x_3)}{a_0},$$

ako je $a_0+a_1+a_2\neq 0$ *i* $(a_0-a_1)^2+(a_1-a_2)^2+(a_2-a_0)^2=0$;

III. $$f(x_1, x_2, x_3)-f(x_2, x_3, x_1)$$
$$=\frac{1}{a_1^3-a_0^3}\left[a_0 a_1\, g(x_1, x_2, x_3)+a_0^2 g(x_2, x_3, x_1)+a_1^2 g(x_3, x_1, x_2)\right],$$

ako je $a_0+a_1+a_2=0$ *i* $(a_0-a_1)^2+(a_1-a_2)^2+(a_2-a_0)^2\neq 0$;

IV. $$0=g(x_1, x_2, x_3),$$

ako je $a_0+a_1+a_2=0$ *i* $(a_0-a_1)^2+(a_1-a_2)^2+(a_2-a_0)^2=0$.

Za svaku jednačinu I – IV odredićemo uslove koje treba da zadovoljava funkcija g da jednačina bude mogućna.

Propozicija 1. *Jednačina*

$$a_0 f+a_1 f^1+a_2 f^2=g,$$

čiji koeficijenti ispunjavaju uslov

$$a_0+a_1+a_2\neq 0 \quad i \quad (a_0-a_1)^2+(a_1-a_2)^2+(a_2-a_0)^2=0,$$

mogućna je ako i samo ako funkcija g *ispunjava uslov* $g-g^1=0$.

Dokaz. U ovom slučaju posmatrana jednačina je ekvivalentna sa jednačinom

$$f+f^1+f^2=\frac{g}{a_0} \quad \text{(lema 1, slučaj II)}.$$

Kako je

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

to je $A^2=3\,a_0 A$, pa je $A\left(\frac{-I}{3\,a_0}\right)A+A=O$, odakle se dobija $B=\frac{-I}{3\,a_0}$ (I jedinična matrica). Uslov $ABG+G=O$ [23] svodi se sada na $g-g^1=0$.

Na sličan način, korišćenjem rezultata [23], dolazi se do potrebnih i dovoljnih uslova za rešivost i ostalih jednačina I – IV. Tako dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 3. *Jednačina*

$$a_0 f(x_1, x_2, x_3) + a_1 f(x_2, x_3, x_1) + a_2 f(x_3, x_1, x_2) = g(x_1, x_2, x_3)$$

je moguća ako i samo ako funkcija g ispunjava uslove:

1° g *proizvoljno, ako je* $a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 \neq 0$:

2° $g - g^1 = 0$, *ako je* $a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 = 0$;

3° $g + g^1 + g^2 = 0$, *ako je* $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 \neq 0$;

4° $g = 0$ *ako je* $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 = 0$.

Sada nalazimo opšte rešenje svake od jednačina I–IV. Postupak ćemo ilustrovati slučajem jednačine II.

Propozicija 2. *Jednačina*

$$f + f^1 + f^2 = \frac{g}{a_0}$$

ima opšte rešenje

$$f = c_0 \Pi + c_1 \Pi^1 - (c_0 + c_1)\Pi^2 + \frac{1}{3a_0} g,$$

gde je $\Pi : S^3 \to \mathbf{R}$ (*ili* $\mathbf{C}$) *proizvoljna funkcija.*

Dokaz. Opste rešenje odgovarajuće homogene jednačine je

$$f = c_0 \Pi + c_1 \Pi^1 - (c_0 + c_1)\Pi^2 \quad \text{(videti (2.14))}.$$

Partikularno rešenje posmatrane nehomogene jednačine je $f = \frac{1}{3a_0} g$ [23].

Dakle, opšte rešenje date nehomogene jednačine je

$$f = c_0 \Pi + c_1 \Pi^1 - (c_0 + c_1)\Pi^2 + \frac{1}{3a_0} g.$$

Teorema 4. *Opšte rešenje jednačine*

$$a_0 f(x_1, x_2, x_3) + a_1 f(x_2, x_3, x_1) + a_2 f(x_3, x_1, x_2) = g(x_1, x_2, x_3)$$

u slučajevima 1°–4° *teoreme* 3, *dato je redom sledećim formulama:*

1° $$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\Delta}\left[(a_0^2 - a_1 a_2)\, g(x_1, x_2, x_3) + (a_2^2 - a_0 a_1)\, g(x_2, x_3, x_1) + (a_1^2 - a_0 a_2)\, g(x_3, x_1, x_2)\right],$$

ako je $a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 \neq 0$;

2° $$f(x_1, x_2, x_3) = c_0 \Pi(x_1, x_2, x_3) + c_1 \Pi(x_2, x_3, x_1) - (c_0 + c_1)\Pi(x_3, x_1, x_2) + \frac{1}{3a_0} g(x_1, x_2, x_3),$$

ako je $a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 = 0$;

3° $$f(x_1, x_2, x_3) = c_0 \left[\Pi(x_1, x_2, x_3) + \Pi(x_2, x_3, x_1) + \Pi(x_3, x_1, x_2)\right] + \frac{(a_1 - a_0)\, g + (a_0 + 2a_1)\, g^1}{3(a_0^2 + a_0 a_1 + a_1^2)},$$

ako je $a_0+a_1+a_2=0$ *i* $(a_0-a_1)^2+(a_1-a_2)^2+(a_2-a_0)^2\neq 0$;

4° $f(x_1, x_2, x_3)=\Pi(x_1, x_2, x_3)$,

ako je $a_0=a_1=a_2=0$.

3. Pređimo na proučavanje klase jednačina:

$$(5.6)\quad a_0 f(x_1, x_2, x_3, x_4)+a_1 f(x_2, x_3, x_4, x_1)+a_2 f(x_3, x_4, x_1, x_2)$$
$$+a_3 f(x_4, x_1, x_2, x_3)=g(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Koristeći se istom metodom kao u (IV, 2) dokazuje se da važi:

Lema 2. *Funkcionalna jednačina* (5.6) *ekvivalentna je sa jednačinom*:

I. $f=\dfrac{(a_0+a_2)(g+g^2)-(a_1+a_3)(g^1+g^3)}{2[(a_0+a_2)^2-(a_1+a_3)^2]}+\dfrac{(a_0-a_2)(g-g^2)-(a_1-a_2)(g^1-g^3)}{2[(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2]}$,

ako je $(a_0+a_2)^2-(a_1+a_3)^2\neq 0$ *i* $(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2\neq 0$;

II. $f+f^2=\dfrac{a_0 g-a_1 g^1}{a_0^2-a_1^2}$,

ako je $(a_0+a_2)^2-(a_1+a_3)^2\neq 0$, $a_0=a_2$ *i* $a_1=a_3$;

III. $f-f^2=\dfrac{a_0 g-a_1 g^1}{a_0^2+a_1^2}$,

ako je $a_0+a_2=0$, $a_1+a_3=0$ *i* $a_0^2+a_1^2\neq 0$;

IV. $0=g$,

ako je $a_0=a_1=a_2=a_3=0$;

V. $f+f^1=\dfrac{g+g^2}{2(a_0+a_2)}+\dfrac{(a_0-a_2)(g+g^1-g^2-g^3)-(a_1-a_3)(g^1+g^2-g^3-g)}{2[(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2]}$,

ako je $a_0+a_2=a_1+a_3\neq 0$ *i* $(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2\neq 0$;

VI. $f+f^1+f^2+f^3=\dfrac{2}{a_0+a_2}g$,

ako je $a_0=a_1=a_2=a_3\neq 0$;

VII. $f-f^1=\dfrac{g+g^2}{2(a_0+a_2)}+\dfrac{(a_0-a_2)(g-g^1-g^2+g^3)-(a_1-a_3)(g+g^1-g^2-g^3)}{2[(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2]}$,

ako je $a_1+a_3=-(a_0+a_2)\neq 0$ *i* $(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2\neq 0$;

VIII. $f-f^1+f^2-f^3=\dfrac{2g}{a_0+a_2}$,

ako je $a_1=-a_0$, $a_2=a_0$, $a_3=-a_0$, $a_0\neq 0$.

Za svaku jednačinu I – VIII odredićemo uslove koji se odnose na funkciju g, a potrebni su i dovoljni da jednačina bude mogućna.

Propozicija 3. *Jednačina*

$$a_0 f + a_1 f^1 + a_2 f^2 + a_3 f^3 = g$$

čiji koeficijenti ispunjavaju uslove:

$$(a_0 + a_2)^2 - (a_1 + a_3)^2 \neq 0, \quad a_0 = a_2 \ i \ a_1 = a_3,$$

moguća je ako i samo ako funkcija g ispunjava uslov $g - g^2 = 0$.

Dokaz. Na osnovu leme 2, slučaj II, posmatrana jednačina je ekvivalentna sa jednačinom

$$f + f^2 = \frac{a_0 g - a_1 g^1}{a_0^2 - a_1^2}.$$

U ovom slučaju, imamo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i matrica $B = -\frac{I}{2}$ je saglasna sa cikličnom grupom reda 4 i zadovoljava uslov $ABA + A = O$. Uslov $ABG + G = O$ [23] svodi se sada na

$$g - g^2 = 0.$$

G označava matricu: $\frac{1}{a_0^2 - a_1^2} \begin{bmatrix} a_0 g - a_1 g^1 \\ a_0 g^1 - a_1 g^2 \\ a_0 g^2 - a_1 g^3 \\ a_0 g^3 - a_1 g \end{bmatrix}$.

Istim postupkom dolazi se do potrebnih i dovoljnih uslova za rešivost i ostalih jednačina I – VIII. Tako dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 5. *Jednačina*

$$a_0 f(x_1, x_2, x_3, x_4) + a_1 f(x_2, x_3, x_4, x_1) + a_2 f(x_3, x_4, x_1, x_2) + a_3 f(x_4, x_1, x_2, x_3) = g(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

je moguća ako i samo ako funkcija g ispunjava uslov:

1° g *proizvoljno, ako je* $(a_0 + a_2)^2 - (a_1 + a_3)^2 \neq 0$ *i* $(a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 \neq 0$;

2° $g - g^2 = 0$, *ako je* $(a_0 + a_2)^2 - (a_1 + a_3)^2 \neq 0$, $a_0 = a_2$ *i* $a_1 = a_3$;

3° $g + g^2 = 0$, *ako je* $a_0 + a_2 = 0$, $a_1 + a_3 = 0$ *i* $a_0^2 + a_2^2 \neq 0$;

4° $g = 0$, *ako je* $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$;

5° $g - g^1 + g^2 - g^3 = 0$, *ako je* $a_0 + a_2 = a_1 + a_3 \neq 0$ *i* $(a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 \neq 0$;

6° $g - g^1 = 0$, *ako je* $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 \neq 0$;

8° $g + g^1 + g^2 + g^3 = 0$, *ako je* $a_1 + a_3 = -(a_0 + a_2) \neq 0$ *i* $(a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2 \neq 0$;

8° $g + g^1 = 0$, *ako je* $a_1 = -a_0$, $a_2 = a_0$, $a_3 = -a_0$, $a_0 \neq 0$.

Sada određujemo opšte rešenje za svaku jednačinu I – VIII.

Propozicija 4. *Opšte rešenje jednačine*

$$f+f^2=\frac{a_0 g-a_1 g^1}{a_0^2-a_1^2}$$

dato je formulom

$$f=c_0(\Pi-\Pi^2)+c_1(\Pi^1-\Pi^3)+\frac{1}{2(a_0^2-a_1^2)}(a_0 g-a_1 g^1),$$

gde $\Pi: S^4 \to \mathbf{R}$ *(ili* $\mathbf{C}$*) proizvoljna funkcija,* c_0 *i* c_1 *proizvoljne konstante.*

Dokaz. Opšte rešenje oblika $F=C\Pi$ odgovarajuće homogene jednačine $f+f^2=0$ dato je formulom (lema 4, slučaj 2°, odeljak **2)**

$$f=c_0(\Pi-\Pi^2)+c_1(\Pi^1-\Pi^3).$$

Partikularno rešenje je $f=\frac{1}{2(a_0^2-a_1^2)}(a_0 g-a_1 g^1)$.

Dakle, opšte rešenje date nehomogene jednačine, prema (5.4'), glasi:

$$f=c_0(\Pi-\Pi^2)+c_1(\Pi^1-\Pi^3)+\frac{1}{2(a_0^2-a_1^2)}(a_0 g-a_1 g^1).$$

Istim postupkom određuju se opšta rešenja ostalih jednačina.
Na osnovu prethodnih rezultata važi sledeća teorema.

Teorema 6. *Opšte rešenje jednačine*

$$a_0 f(x_1, x_2, x_3, x_4)+a_1 f(x_2, x_3, x_4, x_1)+a_2 f(x_3, x_4, x_1\, x_2)$$
$$+a_3 f(x_4, x_1, x_2, x_3)=g(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

dato je sledećim formulama:

$$1^\circ\quad f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\frac{(a_0+a_2)[g(x_1, x_2, x_3, x_4,)+g(x_3, g_4, x_1, x_2)]}{2[(a_0+a_2)^2-(a_1+a_3)^2]}$$
$$-\frac{(a_1+a_3)[g(x_2, x_3, x_4, x_1)+g(x_4, x_1, x_2, x_3)]}{2[(a_0+a_2)^2-(a_1+a_3)^2]}$$
$$+\frac{(a_0-a_2)[g(x_1, x_2, x_3, x_4)-g(x_3, x_4, x_1, x_2)]}{2[(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2]}$$
$$-\frac{(a_1-a_3)[g(x_2, x_3, x_4, x_1)-g(x_4, x_1, x_2, x_3)]}{2[(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2]},$$

ako je $(a_0+a_2)^2-(a_1+a_3)^2\neq 0$ *i* $(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2\neq 0$;

$$2^\circ\quad f(x_1, x_2, x_3, x_4)=c_0[\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)-\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2)]$$
$$+c_1[\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1)-\Pi(x_4, x_1, x_2, x_3)]$$
$$+\frac{1}{2(a_0^2-a_1^2)}[a_0 g(x_1, x_2, x_3, x_4)-a_1 g(x_2, x_3, x_4, x_1)],$$

ako je $(a_0+a_2)^2-(a_1+a_3)^2\neq 0$, $a_0=a_2$ *i* $a_1=a_3$;

$$3^\circ\quad f(x_1, x_2, x_3, x_4)=c_0[\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)+\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2)]$$
$$+c_1[\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1)+\Pi(x_4, x_1, x_2, x_3)]$$
$$+\frac{a_0 g(x_1, x_2, x_3, x_4)-a_1 g(x_2, x_3, x_4, x_1)}{2(a_0^2+a_1^2)},$$

ako je $a_0+a_2=0,\ a_1+a_3=0$ *i* $a_0^2+a_1^2\neq 0$;

4° $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)$,

ako je $a_0, =a_1=a_2=a_3=0$;

5° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=c_0\left[\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)-\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1)+\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2)\right.$$
$$\left.-\Pi(x_4, x_1, x_2, x_3)\right]+\frac{g(x_1, x_2, x_3, x_4)+g(x_3, x_4, x_1, x_2)}{4(a_0+a_2)}$$
$$+\frac{(a_0-a_2)\left[g(x_1, x_2, x_3, x_4)-g(x_3, x_4, x_1, x_2)\right]}{2\left[(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2\right]}$$
$$-\frac{(a_1-a_3)\left[g(x_2, x_3, x_4, x_1)-g(x_4, x_1, x_2, x_3)\right]}{2\left[(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2\right]},$$

ako je $a_0+a_2=a_1+a_3\neq 0$ *i* $(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2\neq 0$;

6° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=c_0\,\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)+c_1\,\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1)+c_2\,\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2)$$
$$-(c_0+c_1+c_2)\,\Pi(x_4, x_1, x_2, x_3)+\frac{g(x_1, x_2, x_3, x_4)}{2(a_0+a_2)},$$

ako je $a_0=a_1=a_2=a_3\neq 0$;

7° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=c_0\left[\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)+\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1)+\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2)\right.$$
$$\left.+\Pi(x_4, x_1, x_2, x_3)\right]+\frac{g(x_1, x_2, x_3, x_4)+g(x_3, x_4, x_1, x_2)}{4(a_0+a_2)}$$
$$+\frac{(a_0-a_2)\left[g(x_1, x_2, x_3, x_4)-g(x_3, x_4, x_1, x_2)\right]}{2\left[(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2\right]}$$
$$-\frac{(a_1-a_3)\left[g(x_2, x_3, x_4, x_1)-g(x_4, x_1, x_2, x_3)\right]}{2\left[(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2\right]},$$

ako je $a_1+a_3=-(a_0+a_2)\neq 0$ *i* $(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2\neq 0$;

8° $$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=c_0\,\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4)+c_1\,\Pi(x_2, x_3, x_4, x_1)+c_2\,\Pi(x_3, x_4, x_1, x_2)$$
$$+(c_0-c_1+c_2)\,\Pi(x_4, x_1, x_2, x_3)+\frac{g(x_1, x_2, x_3, x_4)}{2(a_0+a_2)},$$

ako je $a_1=-a_0,\ a_2=a_0,\ a_3=-a_0,\ a_0\neq 0$.

4. U ovom, poslednjem, odeljku razmotrićemo sledeću klasu jednačina:

(5.7) $$a_0 f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)+a_1 f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1)+a_2 f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2)$$
$$+a_3 f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3)+a_4 f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4)+a_5 f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$
$$=g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6).$$

Stavimo

$$a_0+a_3=2M,\ a_1+a_4=2N,\ a_2+a_5=2P,\ a_0-a_3=2Q,\ a_1-a_4=2R,\ a_2-a_5=2S;$$

$$u_0=\sum_{k=0}^{5} a_k,\ u_1=(a_0-a_1+a_3-a_4)^2+(a_1-a_2+a_4-a_5)^2+(a_2-a_3+a_5-a_0)^2,$$

$$u_2=\sum_{k=0}^{5}(-1)^k a_k,\ u_3=(a_0+a_1-a_3-a_4)^2+(a_1+a_2-a_4-a_5)^2+(a_2+a_3-a_5-a_0)^2;$$

$$\Delta_1=\frac{1}{2}(M+N+P)\left[(M-N)^2+(N-P)^2+(P-M)^2\right],$$

$$\Delta_2=\frac{1}{2}(Q-R+R)\left[(Q+R)^2+(R+S)^2+(S-Q)^2\right].$$

Na isti način kao u (IV, 3) dokazuje se da važi:

Lema 3. *Funkcionalna jednačina* (5.7) *ekvivalentna je sa*:

I. $$f=\frac{1}{4\Delta_1}\left[(M^2-NP)(g+g^3)+(P^2-MN)(g^1+g^4)+(N^2-MP)(g^2+g^5)\right]$$
$$+\frac{1}{4\Delta_2}\left[(Q^2+RS)(g-g^3)-(S^2+RQ)(g^1-g^4)+(R^2-QS)(g^2-g^5)\right],$$

ako je $u_0\neq 0,\ u_1\neq 0,\ u_2\neq 0,\ u_3\neq 0;$

II. $$2f-f^1+f^2+f^4-f^5=\frac{1}{2Q}(g-g^3)+\frac{1}{2\Delta_1}\left[(M^2-NP)(g+g^3)\right.$$
$$\left.+(P^2-MN)(g^1+g^4)+(N^2-MP)(g^2+g^5)\right],$$

ako je $u_0\neq 0,\ u_1\neq 0,\ u_2\neq 0,\ u_3=0;$

III. $$2f-f^2+f^5=\frac{1}{2\Delta_1}\left[(M^2-NP)(g+g^3)+(P^2-MN)(g^1+g^4)\right.$$
$$\left.+(N^2-MP)(g^2+g^5)\right]+\frac{1}{2(R^3+Q^3)}\left[Q^2(g-g^3)-R^2(g^1-g^4)-RQ(g^2-g^5)\right],$$

ako je $u_0\neq 0,\ u_1\neq 0,\ u_2=0,\ u_3\neq 0;$

IV. $$f+f^3=\frac{1}{2}(g-g^3)$$
$$+\frac{1}{2\Delta_1}\left[(M^2-NP)(g+g^3)+(P^2-MN)(g^1+g^4)+(N^2-MP)(g^2+g^5)\right],$$

ako je $u_0\neq 0,\ u_1\neq 0,\ u_2=0,\ u_3=0;$

V. $$2f+f^1+f^2+f^4+f^5=\frac{1}{2M}(g+g^3)$$
$$+\frac{1}{2\Delta_2}\left[Q^2+RS)(g-g^3)-(S^2+RQ)(g^1-g^4)+(R^2-QS)(g^2-g^5)\right.,$$

ako je $u_0\neq 0,\ u_1=0,\ u_2\neq 0,\ u_3\neq 0;$

VI. $$f+f^2+f^4=\frac{1}{4MQ}\left[(Q+M)g+(Q-M)g^3\right],$$

ako je $u_0 \neq 0,\ u_1 = 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 = 0;$

VII. $$2f + f^1 + f^4 + 2f^5 = \frac{1}{2M}(g+g^3) + \frac{1}{2(R^3+Q^3)}\left[Q^2(g-g^3) - R^2(g^1-g^4) - RQ(g^2-g^5)\right],$$

ako je $u_0 \neq 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 \neq 0;$

VIII. $$f + f^1 + f^2 + f^3 + f^4 + f^5 = \frac{1}{2M}\left[(1+M)g + (1-M)g^3\right],$$

ako je $u_0 \neq 0,\ u_1 = u_2 = u_3 = 0;$

IX. $$2f - f^1 - f^4 = \frac{1}{2(N^3-M^3)}\left[MN(g+g^3) + M^2(g^1+g^4) + N^2(g^2+g^5)\right] + \frac{1}{2\Delta_2}\left[(Q^2+RS)(g-g^3) - (S^2+RQ)(g^1-g^4) + (R^2-QS)(g^2-g^5)\right],$$

ako je $u_0 = 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 \neq 0;$

X. $$2f - 2f^1 + f^2 - f^5 = \frac{1}{2Q}(g-g^3) + \frac{1}{2(N^3-M^3)}\left[MN(g+g^3) + M^2(g^1+g^4) + N^2(g^2+g^5)\right],$$

ako je $u_0 = 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 = 0;$

XI. $$2f - f^1 - f^2 - f^4 + f^5 = \frac{1}{2(N^3-M^3)}\left[MN(g+g^3) + M^2(g^1+g^4) + N^2(g^2+g^5)\right] + \frac{1}{2(R^3+Q^3)}\left[Q^2(g-g^3) - R^2(g^1-g^4) - RQ(g^2-g^5)\right],$$

ako je $u_0 = 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 = 0,\ u_3 \neq 0;$

XII. $$f - f^1 + f^3 - f^4 = \frac{1}{2}(g-g^3) + \frac{1}{2(N^3-M^3)}\left[MN(g+g^3) + M^2(g^1+g^4) + N^2(g^2+g^5)\right],$$

ako je $u_0 = 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 = u_3 = 0;$

XIII. $$f - f^3 = \frac{1}{2}(g+g^3) + \frac{1}{2\Delta_2}\left[(Q^2+RS)(g-g^3) - (S^2+RQ)(g^1-g^4) + (R^2-QS)(g^2-g^5\right],$$

ako je $u_0 = u_1 = 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 \neq 0;$

XIV. $$f - f^1 + f^2 - f^3 + f^4 - f^5 = \frac{1}{2Q}\left[(Q+1)g + (Q-1)g^3\right],$$

ako je $u_0 = u_1 = 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 = 0;$

XV. $$f - f^2 - f^3 + f^5 = \frac{1}{2}(g+g^3) + \frac{1}{2(R^3+Q^3)}\left[Q^2(g-g^3) - R^2(g^1-g^4) - RQ(g^2-g^5)\right],$$

ako je $u_0 = u_1 = u_2 = 0,\ u_3 \neq 0$;

XVI. $0 = g$,

ako je $u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = 0$.

Za svaku jednačinu I – XVI odredićemo uslove koje treba da ispuni funkcija g, a koji su potrebni i dovoljni da odgovarajuća jednačina bude moguća.

Propozicija 5. *Jednačina*

$$a_0 f + a_1 f^1 + a_2 f^2 + a_3 f^3 + a_4 f^4 + a_5 f^5 = g,$$

čiji koeficijenti ispunjavaju uslove $u_0 \neq 0,\ u_1 = 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 = 0$, *moguća je ako i samo ako funkcija* g *ispunjava uslov* $g - g^2 = 0$.

Dokaz. U ovom slučaju posmatrana jednačina ekvivalentna je sa jednačinom (glava V, lema 3, slučaj VI)

$$f + f^2 + f^4 = \frac{1}{4MQ}\left[(Q+M)\,g + (Q-M)\,g^3\right].$$

Sada je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i $B = -\dfrac{I}{3}$ saglasna sa cikličnom grupom reda 6 i zadovoljava uslov $ABA + A = O$.

Uslov $ABG + G = O$ svodi se na $2g - g^1 - g^2 - g^4 + g^5 = 0$. Prema lemi 1, glava IV, odeljak 3, slučaj XI, je $2g - g^1 - g^2 - g^4 + g^5 = 0 \Leftrightarrow g - g^2 = 0$. U ovom slučaju G označava matricu

$$G = \frac{1}{4MQ} \begin{bmatrix} (Q+M)\,g + (Q-M)\,g^3 \\ (Q+M)\,g^1 + (Q-M)\,g^4 \\ (Q+M)\,g^2 + (Q-M)\,g^5 \\ (Q+M)\,g^3 + (Q-M)\,g \\ (Q+M)\,g^4 + (Q-M)\,g^1 \\ (Q+M)\,g^5 + (Q-M)\,g^2 \end{bmatrix}.$$

Na sličan način dobijaju se odgovarajući rezultati za svaku jednačinu I – XVI.

Prema tome važi:

Teorema 7. *Jednačina*

$$\begin{aligned} a_0 f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &+ a_1 f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1) + a_2 f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2) \\ &+ a_3 f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3) + a_4 f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) + a_5 f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \\ &= g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \end{aligned}$$

je mogućna ako i samo ako funkcija g ispunjava uslov:

1° g *proizvoljno, ako je* $u_0 \neq 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 \neq 0;$

2° $g+g^1-g^3+g^4=0,$ *ako je* $u_0 \neq 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3=0;$

3° $g-g^1+g^2+g^3+g^4-g^5=0,$ *ako je* $u_0 \neq 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2=0,\ u_3 \neq 0;$

4° $g-g^3=0,$ *ako je* $u_0 \neq 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2=0,\ u_3=0;$

5° $g-g^1+g^3-g^4=0,$ *ako je* $u_0 \neq 0,\ u_1=0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 \neq 0;$

6° $g-g^2=0,$ *ako je* $u_0 \neq 0,\ u_1=0,\ u_2 \neq 0,\ u_3=0;$

7° $g-2g^1+2g^2-g^3=0,$ *ako je* $u_0 \neq 0,\ u_1=0,\ u_2=0,\ u_3 \neq 0;$

8° $g-g^1=0,$ *ako je* $u_0 \neq 0,\ u_1=0,\ u_2=0,\ u_3=0;$

9° $g+g^1+g^2+g^3+g^4+g^5=0,$ *ako je* $u_0=0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 \neq 0;$

10° $g+2g^1+2g^2+g^3=0,$ *ako je* $u_0=0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3=0;$

11° $g+g^2+g^4=0,$ *ako je* $u_0=0,\ u_1 \neq 0,\ u_2=0,\ u_3 \neq 0;$

12° $g+g^1+g^2=0,$ *ako je* $u_0=0,\ u_1 \neq 0,\ u_2=0,\ u_3=0;$

13° $g+g^3=0,$ *ako je* $_0=0,\ u_1=0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 \neq 0;$

14° $g+g^1=0,$ *ako je* $u_0=0,\ u_1=0,\ u_2 \neq 0,\ u_3=0;$

15° $g-g^1+g^2=0,$ *ako je* $u_0=0,\ u_1=0,\ u_2=0,\ u_3 \neq 0;$

16° $g=0,$ *ako je* $u_0=u_1=u_2=u_3=0.$

Odredićemo opšte rešenje svake jednačine I – XVI.

Propozicija 6. *Opšte rešenje jednačine*

$$f+f^2+f^4=\frac{1}{4MQ}[(Q+M)g+(Q-M)g^3]$$

dato je formulom

$$f=c_0\Pi+c_1\Pi^1+c_2\Pi^2+c_3\Pi^3-(c_0+c_2)\Pi^2-(c_1+c_3)\Pi^5$$
$$+\frac{1}{12MQ}[(Q+M)g+(Q-M)g^3],$$

gde su $c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3$ *proizvoljne konstante a* $\Pi: S^6 \to \mathbf{R}$ *(ili* $\mathbf{C}$*) proizvoljna funkcija.*

Dokaz. Opšte rešenje honogenog dela je (glava IV, odeljak III, teorema 5, slučaj 6°).

$$f=c_0\Pi+c_1\Pi^1+c_2\Pi^2+c_3\Pi^3-(c_0+c_2)\Pi^4-(c_1+c^3)\Pi^5.$$

Partikularno rešenje je

$$f=\frac{1}{12MQ}[(Q+M)g+(Q-M)g^3].$$

Dakle,

$$f = c_0 \Pi + c_1 \Pi^1 + c_2 \Pi^2 + c_3 \Pi^3 - (c_0 + c_2) \Pi^4 - (c_1 + c_3) \Pi^5$$
$$+ \frac{1}{12\, MQ} [(Q+M)\, g + (Q-M)\, g^3]$$

je opšte rešenje posmatrane jednačine. Istim posupkom određuje se opšte rešenje ostalih jednačina.

Prema tome važi sledeća teorema.

Teorema 8. *Opšte rešenje jednačine*

$$a_0 f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) + a_1 f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_1) + a_2 f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, x_2)$$
$$+ a_3 f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, x_3) + a_4 f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, x_4) + a_5 f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$
$$= g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

pod odgovarajućim uslovima koji su dati prethodnom teoremom, dato je sledećim formulama:

1° $$f = \frac{1}{4\Delta_1} [(M^2 - NP)(g + g^3) + (P^2 - MN)(g^1 + g^4) + (N^2 - MP)(g^2 + g^5)]$$
$$+ \frac{1}{4\Delta_2} [(Q^2 + RS)(g - g^3) - (S^2 + RQ)(g^1 - g^4) + (R^2 - QS)(g^2 - g^5)],$$

ako je $u_0 \neq 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 \neq 0$;

2° $$f = c_0 \Pi + c_1 \Pi^1 + (c_1 - c_0) \Pi^2 - c_0 \Pi^3 - c_1 \Pi^4 + (c_0 - c_1) \Pi^5$$
$$+ \frac{1}{2\Delta_1} [(M^2 - NP)(g + g^3) + (P^2 - MN)(g^1 + g^4) + (N^2 - MP)(g^2 + g^5)]$$
$$+ \frac{1}{12\, Q} (3g + 2g^1 - 3g^3 - 2g^4),$$

ako je $u_0 \neq 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 = 0$;

3° $$f = c_0 (\Pi - \Pi^1 + \Pi^2 - \Pi^3 + \Pi^4 - \Pi^5)$$
$$+ \frac{1}{4\Delta_1} [(M^2 - NP)(g + g^3) + (P^2 - MN)(g^1 + g^4) + (N^2 - MP)(g^2 + g^5)]$$
$$+ \frac{1}{12(R^3 + Q^3)} [(Q^2 + RQ)(g - g^3) + (Q^2 - R^2)(g^1 - g^4) + (-R^2 - QR)(g^2 - g^5)],$$

ako je $u_0 \neq 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 = 0,\ u_3 \neq 0$;

4° $$f = c_0 (\Pi - \Pi^3) + c_1 (\Pi^1 - \Pi^4) + c_2 (\Pi^2 - \Pi^5)$$
$$+ \frac{1}{2\Delta_1} [(M^2 - PN)\, g + (P^2 - MN)\, g^1 + (N^2 - MP)\, g^2],$$

ako je $u_0 \neq 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0$;

5° $$f = c_0 \Pi + c_1 \Pi^1 - (c_0 + c_1) \Pi^2 + c_0 \Pi^3 + c_1 \Pi^4 - (c_0 + c_1) \Pi^5 + \frac{1}{12\, M} (g + g^3)$$
$$+ \frac{1}{2\Delta_2} [(Q^2 + RS)(g - g^3) - (S^2 + RQ)(g^1 - g^4) + (R^2 - QS)(g^2 - g^5)],$$

ako je $u_0 \neq 0,\ u_1 = 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 \neq 0;$

$$6^\circ \quad f = c_0\, \Pi + c_1\, \Pi^1 + c_2\, \Pi^2 + c_3\, \Pi^3 - (c_0 + c_2)\, \Pi^4 - (c_1 + c_3)\, \Pi^5 + \frac{1}{12\, MQ}\left[(Q+M)\, g + (Q-M)\, g^3\right],$$

ako je $u_0 \neq 0,\ u_1 = 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 = 0;$

$$7^\circ \quad f = c_0\, \Pi + c_1\, \Pi^1 + c_2\, \Pi^2 - (c_0 + 2\, c_1 + 2\, c_2)\, \Pi^3 + (2\, c_0 + 3\, c_1 + 2\, c_2)\, \Pi^4 - (2\, c_0 + 2\, c_1 + c_2)\, \Pi^5 + \frac{1}{12\, M}\,(2\, g^1 - g^2 + 2\, g^4 - g^5)$$
$$+ \frac{1}{12\,(R^3+Q^3)}\left[(2\, RQ - R^2)(g - g^3) + (2\, Q^2 - RQ)(g^1 - g^4) + (-Q^2 - 2R^2)(g^2 - g^5)\right],$$

ako je $u_0 \neq 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 \neq 0;$

$$8^\circ \quad f = c_0(\Pi - \Pi^5) + c_1(\Pi^1 - \Pi^5) + c_2(\Pi^2 - \Pi^5) + c^3(\Pi^3 - \Pi^5) + c_4(\Pi^4 - \Pi^5) + \frac{g}{6M},$$

ako je $u_0 \neq 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0;$

$$9^\circ \quad f = c_0\,(\Pi + \Pi^1 + \Pi^2 + \Pi^3 + \Pi^4 + \Pi^5) + \frac{1}{2\,\Delta_2}\left[(Q^2 + RS)\,(g - g^3) - (S^2 + RQ)\,(g^1 - g^4) + (R^2 - QS)\,(g^2 - g^5)\right]$$
$$+ \frac{1}{12\,(N^3 - M)^3}\left[(N^2 + 2\, MN)\,(g + g^3) + (2\, M^2 + MN)\,(g^1 + g^4) + (2\, N^2 + M^2)\,(g^2 + g^5)\right],$$

ako je $u_0 = 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 \neq 0;$

$$10^\circ \quad f = c_0\, \Pi + c_1\, \Pi^1 + c_2\, \Pi^2 + (c_0 - 2\, c_1 + 2\, c_2)\, \Pi^3 + (2\, c_0 - 3\, c_1 + 2\, c_2)\, \Pi^4 + (2\, c_0 - 2\, c_1 + c_2)\, \Pi^5 + \frac{1}{12\, Q}\,(2\, g + g^1 - 2\, g^3 - g^4)$$
$$+ \frac{1}{12\,(N^3 - M^3)}\left[(N^2 + 2\, MN)\,(g + g^3) + (2\, M^2 + MN)\,(g^1 + g^4) + (2\, N^2 + M^2)\,(g^2 + g^5)\right],$$

ako je $u_0 = 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 = 0;$

$$11^\circ \quad f = c_0\,(\Pi + \Pi^2 + \Pi^4) + c_1\,(\Pi^1 + \Pi^3 + \Pi^5) + \frac{1}{12\,(N^3 - M^3)}\left[(N^2 + MN)\,(g + g^3) + (2\, M^2 + MN)\,(g^1 + g^4) + (2\, N^2 + M^2)\,(g^2 + g^5)\right]$$
$$+ \frac{1}{12\,(R^3 + Q^3)}\left[(Q^2 + RQ)\,(g - g^3) + (Q^2 - R^2)\,(g^1 - g^4) + (-R^2 - RQ)\,(g^2 - g^5)\right],$$

ako je $u_0 = 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 = 0,\ u_3 \neq 0;$

$$12^\circ \quad f = c_0\, \Pi + c_1\, \Pi^1 + c_2\, \Pi^2 + c_3\, \Pi^3 + (c_0 - c_1 + c_3)\, \Pi^4 + (c_0 - c_2 + c_3)\, \Pi^5 + \frac{1}{6\,(N^3 - M^3)}\left[(N^2 + 2\, MN)\, g + (2\, M^2 + MN)\, g^1 + (2\, N^2 + M^2)\, g^2\right],$$

ako je $u_0=0,\ u_1\neq 0,\ u_2=0,\ u_3=0;$

13° $$f=c_0(\Pi+\Pi^3)+c_1(\Pi^1+\Pi^4)+c_2(\Pi^2+\Pi^5)$$
$$+\frac{1}{\Delta_2}\left[(Q^2+RS)\,g+(-S^2-RQ)\,g^1+(R^2-SQ)\,g^2\right],$$

ako je $u_0=u_1=0,\ u_2\neq 0,\ u_3\neq 0;$

14° $$f=c_0\Pi+c_1\Pi^1+c_2\Pi^2+c_3\Pi^3+c_4\Pi^4+(c_0-c_1+c_2-c_3+c_4)\,\Pi^5+\frac{1}{6Q}\,g,$$

ako je $u_0=u_1=u_3=0,\ u_2\neq 0;$

15° $$f=c_0\Pi+c_1\Pi^1+c_2\Pi^2+(c_0+c_1-c_3)\,\Pi^2+(-c_0+c_2+c_3)\,\Pi^5$$
$$+\frac{1}{6(R^3+Q^3)}\left[(Q^2+RQ)\,g+(Q^2-R^2)\,g^1+(-R^2-RQ)\,g^2\right],$$

ako je $u_0=u_1=u_2=0,\ u_3\neq 0;$

16° $f=\Pi,$

ako je $u_0=u_1=u_2=u_3,=0.$

Glava VI: NEKI REZULTATI KOJI SE ODNOSE NA PARACIKLIČNE FUNKCIONALNE JEDNAČINE

D. S. MITRINOVIĆ je uveo u matematičku literaturu paraciklične linearne funkcionalne jednačine prve vrste.

U radu [17] autor je odredio opšte rešenje sledećih jednačina:

$$(6.1') \quad f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)+f(x_2, x_3, x_1, y_2, y_3)+f(x_3, x_1, x_2, y_3, y_1)=0,$$

$$(6.2') \quad f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)+f(x_2, x_3, x_4, y_2, y_3) +f(x_3, x_4, x_1, y_3, y_4)+f(x_4, x_1, x_2, y_4, y_1)=0,$$

$$(6.3') \quad f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)+f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_2, y_3, y_4, y_5) +f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, y_3, y_4, y_5, y_6)+f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, y_4, y_5, y_6, y_1) +f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, y_5, y_6, y_1, y_2)+f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, y_6, y_1, y_2, y_3)=0.$$

Ova glava ima dva odeljka.

U prvom odeljku razmatra se problem rešavanja sledećih klasa parackličnih funkcionalnih jednačina:

$$(6.1) \quad a_0f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)+a_1f(x_2, x_3, x_1, y_2, y_3)+a_2f(x_3, x_1, x_2, y_3, y_1)=0,$$

$$(6.2) \quad a_0f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)+a_1f(x_2, x_3, x_4, y_2, y_3) +a_2f(x_3, x_4, x_1, y_3, y_4)+a_3f(x_4, x_1, x_2, y_4, y_1)=0,$$

$$(6.3) \quad a_0f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)+a_1f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_2, y_3, y_4, y_5) +a_2f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, y_3, y_4, y_5, y_6)+a_3f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, y_4, y_5, y_6, y_1) +a_4f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, y_5, y_6, y_1, y_2)+a_5f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, y_6, y_1, y_2, y_3)=0,$$

gde su $a_i (i=0, 1, \ldots, 5)$ realni brojevi.

Dokazuje se da je svaka jednačina (6.1) ekvivalentna sa jednom od četiri kanonske linearne paraciklične jednačine prve vrste, (6.2) sa jednom od osam i (6.3) sa jednom od šesnaest jednačina.

Za svaku kanonsku jednačinu određuje se opšte rešenje.

U drugom odeljku razmatra se problem određivanja rešenja jednačine

$$(6.4)\quad a_0 f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) + a_1 f(x_2, \ldots, x_n, x_1, y_2, \ldots, y_k, y_{k+1}) + \cdots + a_{n-1} f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n, y_1, \ldots, y_{n+k-1}) = 0,$$

gde su $a_i (i = 0, 1, \ldots.\ n-1)$ realni (ili kompleksni) brojevi, a za prirodan broj k važi $1 \leq k \leq n$.

U slučajevima $k=1$ i $k=n$ određuje se opšte rešenje jednačine (6.4). Ako je $1<k<n$ daje se rešenje jednačine (6.4).

Odeljak A. Ovaj odeljak sastoji se od tri dela.

1. U ovaj tački razmatramo problem rešavanja jednačine (6.1).

Sličnim postupkom kao u (IV.**1.**) dokazuje se da važi:

Lema 1. *Funkcionalna jednačina* (6.1) *ekvivalentna je sa jednačinom*

I. $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = 0,$

ako je $a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 \neq 0;$

II. $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) + f(x_2, x_3, x_1, y_2, y_3) + f(x_3, x_1, x_2, y_3, y_1) = 0,$

ako je $a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 = 0;$

III. $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) - f(x_2, x_3, x_1, y_2, y_3) = 0,$

ako je $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 \neq 0;$

IV. $0 = 0,$

ako je $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 = 0.$

Propozicija 1. *Jednačina*

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) - f(x_2, x_3, x_1, y_2, y_3) = 0$$

ima opšte rešenje

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = c_0 \left[\Pi(x_1, x_2, x_3) + \Pi(x_2, x_3, x_1) + \Pi(x_3, x_1, x_2) \right],$$

gde je Π proizvoljna funkcija promenljivih x_1, x_2, x_3, a c_0 proizvoljna konstanta.

Dokaz. Jednačinu $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) - f(x_2, x_3, x_1, y_2, y_3) = 0$ napišimo u obliku $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = f(x_2, x_3, x_1, y_2, y_3)$. Leva strana jednačine ne zavisi od y_3, te stavljajući $y_3 = y_3^0$ dobijamo

$$(6.5)\qquad f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = f(x_2, x_3, x_1, y_2, y_3^0).$$

Uvodeći oznaku

$$f(x_2, x_3, x_1, y_2, y_3^0) = F(x_1, x_2, x_3, y_2)$$

jednačina (6.5) postaje

$$(6.6)\qquad f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = F(x_1, x_2, x_3, y_2).$$

Funkcija (6.6) nije rešenje jednačine. Da ona to bude potrebno je i dovoljno da važi

$$F(x_1, x_2, x_3, y_2) = F(x_2, x_3, x_1, y_3). \tag{6.7}$$

Kako leva strana ne zavisi od y_3, to se može staviti $y_3 = y_3^0$ u (6.6) i ona postaje

$$F(x_1, x_2, x_3, y_2) = G(x_1, x_2, x_3). \tag{6.8}$$

Na osnovu (6.8) formula (6.6) postaje

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = G(x_1, x_2, x_3). \tag{6.9}$$

Formula (6.9) je rešenje jednačine ako i samo ako važi

$$G(x_1, x_2, x_3) - G(x_2, x_3, x_1) = 0.$$

Jednačina $G(x_1, x_2, x_3) - G(x_2, x_3, x_1) = 0$ je ciklična i njeno opšte rešenje je (lema 2, glava IV)

$$G(x_1, x_2, x_3) = c_0 [\Pi(x_1, x_2, x_3) + \Pi(x_2, x_3, x_1) + \Pi(x_3, x_1, x_2)].$$

Prema tome, opšte rešenje jednačine je

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = c_0 [\Pi(x_1, x_2, x_3) + \Pi(x_2, x_3, x_1) + \Pi(x_3, x_1, x_2)]$$

Na osnovu prethodnih rezultata važi sledeća:

Teorema 1. *Opšte rešenje jednačine*

$$a_0 f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) + a_1 f(x_2, x_3, x_1, y_2, y_3) + a_2 f(x_3, x_1, x_2, y_3, y_1) = 0$$

dato je sledećim formulama:

1° $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) \equiv 0$,

ako je $a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 \neq 0$;

2° $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = \Pi(x_1, x_2, x_3, y_1) - \Pi(x_2, x_3, x_1, y_2)$,

ako je $a_0 + a_1 + a_2 \neq 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 = 0$;

3° $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = c_0 [\Pi(x_1, x_2, x_3) + \Pi(x_2, x_3, x_1) + \Pi(x_3, x_1, x_2)]$,

ako je $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 \neq 0$;

4° $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = \Pi(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)$,

ako je $a_0 + a_1 + a_2 = 0$ *i* $(a_0 - a_1)^2 + (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_0)^2 = 0$,
gde je Π *proizvoljna funkcija.*

2. U ovoj tački tretira se problem određivanja opšteg rešenja linearne paraciklične funkcionalne jednačine.

$$a_0 f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) + a_1 f(x_2, x_3, x_4, y_2, y_3) + a_2 f(x_3, x_4, x_1, y_3, y_4) + a_3 f(x_4, x_1, x_2, y_4, y_1) = 0. \tag{6.10}$$

Koristeći se istom metodom kao u (IV. 2.) dokazuje se da važi:

Lema 2. *Funkcionalna jednačina* (6.10) *ekvivalentna je sa:*

I. $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)=0$,

ako je $(a_0+a_2)^2-(a_1+a_3)^2 \neq 0, \quad (a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2 \neq 0$;

II. $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)+f(x_3, x_4\ x_1, y_3, y_4)=0$,

ako je $(a_0+a_2)^2-(a_1+a_3)^2 \neq 0,\ a_0=a_2$ *i* $a_1=a_3$;

III. $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)-f(x_3, x_4, x_1, y_3, y_4)=0$,

ako je $a_0+a_2=0,\ a_1+a_3=0$ *i* $a_0{}^2+a_1{}^2 \neq 0$;

IV. $0=0$,

ako je $a_0=a_1=a_2=a_3=0$;

V. $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)+f(x_2, x_3, x_4, y_2, y_3)=0$,

ako je $a_0+a_2=a_1+a_3 \neq 0,\ (a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2 \neq 0$;

VI. $$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)+f(x_2, x_3, x_4, y_2, y_3) \\ +f(x_3, x_4, x_1, y_3, y_4)+f(x_4, x_1, x_2, y_4, y_1)=0,$$

ako je $a_0=a_1=a_2=a_3 \neq 0$;

VII. $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)-f(x_2, x_3, x_4, y_2, y_3)=0$,

ako je $(a_0-a_2)^2+(a_1-a_3)^2 \neq 0$ *i* $a_1+a_3=-(a_0+a_2) \neq 0$;

VIII. $$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)-f(x_2, x_3, x_4, y_2, y_3) \\ +f(x_3, x_4, x_1, y_3, y_4)-f(x_4, x_1, x_2, y_4, y_1)=0,$$

ako je $a_1=-a_0,\ a_2=a_0,\ a_3=-a_0,\ a_0 \neq 0$.

Sada nalazimo opšte rešenje svake od navedenih jednačina.

Propozicija 2. *Opšte rešenje jednačine*

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)+f(x_3, x_4, x_1, y_3, y_4)=0 \tag{6.11}$$

dato je formulom

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)=c_0\left[\Pi(x_1, x_3)-\Pi(x_3, x_1)\right],$$

gde je Π *proizvoljna funkcija.*

Dokaz. Stavljajući $x_4=\overset{0}{x}_4,\ y_3=\overset{0}{y}_3,\ y_4=\overset{0}{y}_4$, iz (6.11) se dobija

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)=F(x_1, x_3),$$

gde funkcija F mora zadovoljiti uslov

$$F(x_1, x_3)+F(x_3, x_1)=0.$$

Poslednja jednačina je linearna, ciklična jednačina i njeno opšte rešenje glasi

$$F(x_1, x_3)=c_0\left[\Pi(x_1, x_3)-\Pi(x_3, x_1)\right].$$

Dakle,

$$f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = c_0 [\Pi(x_1, x_3) - \Pi(x_3, x_1)]$$

je opšte rešenje jednačine (6.11).

Sličnim postupkom određuju se opšta rešenja ostalih jednačina.

Na osnovu ovih rezultata zaključujemo da važi:

Teorema 2. *Opšte rešenje jednačine*

$$a_0 f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) + a_1 f(x_2, x_3, x_4, y_2, y_3) + a_2 f(x_3, x_4, x_1, y_3, y_4) + a_3 f(x_4, x_1, x_2, y_4, y_1) = 0$$

dato je sledećim formulama:

1° $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) \equiv 0$,

ako je $(a_0 + a_2)^2 - (a_1 + a_3)^2 \neq 0$, $(a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 \neq 0$;

2° $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = c_0 [\Pi(x_1, x_3) - \Pi(x_3, x_1)]$,

ako je $(a_0 + a_2)^2 - (a_1 + a_3)^2 \neq 0$, $a_0 = a_2$ *i* $a_1 = a_3$;

3° $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = c_0 [\Pi(x_1, x_3) + \Pi(x_3, x_1)]$,

ako je $a_0 + a_2 = 0$, $a_1 + a_3 = 0$ *i* $a_0^2 + a_1^2 \neq 0$;

4° $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = \Pi(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)$,

ako je $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$;

5° $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) \equiv 0$,

ako je $a_0 + a_2 = a_1 + a_3 \neq 0$, $(a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 \neq 0$;

6° $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = G(x_1, x_2, y_1) - G(x_2, x_3, y_2) + \Pi(x_1, x_3) - \Pi(x_3, x_1)$,

ako je $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 \neq 0$;

7° $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = \text{const}$,

ako je $(a_0 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 \neq 0$ *i* $a_1 + a_3 = -(a_0 + a_2) \neq 0$;

8° $f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = G(x_1, x_2, y_1) + G(x_2, x_3, y_2) - \Pi(x_1, x_3) + \Pi(x_3, x_1)$,

ako je $a_1 = -a_0$, $a_2 = a_0$, $a_3 = -a_0$, $a_0 \neq 0$.

3. U ovoj poslednjoj tački prvog odeljka razmatra se problem rešavanja jednačine

$$\begin{aligned} & a_0 f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) + a_1 f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_2, y_3, y_4, y_5) \\ (6.12) \quad & + a_2 f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, y_3, y_4, y_5, y_6) + a_3 f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, y_4, y_5, y_6, y_1) \\ & + a_4 f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, y_5, y_6, y_1, y_2) + a_5 f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, y_6, y_1, y_2, y_3) = 0. \end{aligned}$$

Stavimo

$$u_0=\sum_{k=0}^{5} a_k,\quad u_1=(a_0-a_1+a_3-a_4)^2+(a_1-a_2+a_4-a_5)^2+(a_2-a_3+a_5-a_0)^2,$$

$$u_2=\sum_{k=0}^{5}(-1)^k a_k,\quad u_3=(a_0+a_1-a_3-a_4)^2+(a_1+a_2-a_4-a_5)^2+(a_2+a_3-a_5-a_0)^2.$$

Koristeći postupak naveden u (IV, 3.) dokazuje se da važi:

Lema 3. *Funkcionalna jednačina* (6.12) *ekvivalentna je sa:*

I. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)=0,$

ako je $u_0\neq 0,\ u_1\neq 0,\ u_2\neq 0,\ u_3\neq 0;$

II. $$2f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)-f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_2, y_3, y_4, y_5)$$
$$+f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, y_3, y_4, y_5, y_6)+f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, y_5, y_6, y_1, y_2)$$
$$-f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, y_6, y_1, y_2, y_3)=0,$$

ako je $u_0\neq 0,\ u_1\neq 0,\ u_2\neq 0,\ u_3=0;$

III. $$2f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)-f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, y_3, y_4, y_5, y_6)$$
$$+f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, y_6, y_1, y_2, y_3)=0,$$

ako je $u_0\neq 0,\ u_1\neq 0,\ u_2=0,\ u_3\neq 0;$

IV. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)+f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, y_4, y_5, y_6, y_1)=0,$

ako je $u_0\neq 0.\ u_1\neq 0,\ u_2=0,\ u_3=0;$

V. $$2f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)+f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_2, y_3, y_4, y_5)$$
$$+f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, y_3, y_4, y_5, y_6)+f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, y_5, y_6, y_1, y_2)$$
$$+f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, y_6, y_1, y_2, y_3)=0,$$

ako je $u_0\neq 0,\ u_1=0,\ u_2\neq 0,\ u_3\neq 0;$

VI. $$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)+f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, y_3, y_4, y_5, y_6)$$
$$+f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, y_5, y_6, y_1, y_2)=0,$$

ako je $u_0\neq 0,\ u_1=0,\ u_2\neq 0,\ u_3=0;$

VII. $$2f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)+f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_2, y_3, y_4, y_5)$$
$$+f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, y_5, y_6, y_1, y_2)+2f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, y_6, y_1, y_2, y_3)=0,$$

ako je $u_0\neq 0,\ u_1=0,\ u_2=0,\ u_3\neq 0;$

VIII. $$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)+f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_2, y_3, y_4, y_5)$$
$$+f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, y_3, y_4, y_5, y_6)+f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, y_4, y_5, y_6, y_1)$$
$$+f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, y_5, y_6, y_1, y_2)+f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, y_6, y_1, y_2, y_3)=0,$$

ako je $u_0\neq 0,\ u_1=0,\ u_2=0,\ u_3=0;$

IX. $2f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) - f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_2, y_3, y_4, y_5)$

$$-f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, y_5, y_6, y_1, y_2) = 0,$$

ako je $u_0 = 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 \neq 0$;

X. $2f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) - 2f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_2, y_3, y_4, y_5)$

$$+f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, y_3, y_4, y_5, y_6) - f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, y_6, y_1, y_2, y_3) = 0,$$

ako je $u_0 = 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 = 0$;

XI. $2f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) - f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_2, y_3, y_4, y_5)$

$$-f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, y_3, y_4, y_5, y_6) - f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, y_5, y_6, y_1, y_2)$$

$$+f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, y_6, y_1, y_2, y_3) = 0,$$

ako je $u_0 = 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 = 0,\ u_3 \neq 0$;

XII. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) - f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_2, y_3, y_4, y_5)$

$$+f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, y_4, y_5, y_6, y_1) - f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, y_5, y_6, y_1, y_2) = 0,$$

ako je $u_0 = 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0$;

XIII. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) - f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, y_4, y_5, y_6, y_1) = 0,$

ako je $u_0 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 \neq 0$;

XIV. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) - f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_2, y_3, y_4, y_5)$

$$+f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, y_3, y_4, y_5, y_6) - f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, y_4, y_5, y_6, y_1)$$

$$+f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, y_5, y_6, y_1, y_2) - f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, y_6, y_1, y_2, y_3) = 0,$$

ako je $u_0 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 = 0$;

XV. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) - f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, y_3, y_4, y_5, y_6)$

$$-f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, y_4, y_5, y_6, y_1) + f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, y_6, y_1, y_2, y_3) = 0,$$

ako je $u_0 = 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 \neq 0$;

XVI. $0 = 0,$

ako je $u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = 0.$

Teorema 3. *Opšte rešenje jednačine*

$$a_0 f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) + a_1 f(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_2, y_3, y_4, y_5)$$
$$+ a_2 f(x_3, x_4, x_5, x_6, x_1, y_3, y_4, y_5, y_6) + a_3 f(x_4, x_5, x_6, x_1, x_2, y_4, y_5, y_6, y_1)$$
$$+ a_4 f(x_5, x_6, x_1, x_2, x_3, y_5, y_6, y_1, y_2) + a_5 f(x_6, x_1, x_2, x_3, x_4, y_6, y_1, y_2, y_3) = 0$$

određeno je sledećim formulama:

1° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) \equiv 0,$

ako je $u_0 \neq 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 \neq 0$;

2° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) = \Pi(x_1, x_4) - \Pi(x_2, x_5)$

$$+ \Pi(x_4, x_1) - \Pi(x_5, x_2),$$

ako je $u_0 \neq 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 = 0;$

3° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) \equiv 0,$

ako je $u_0 \neq 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 = 0,\ u_3 \neq 0;$

4° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)$

$$= \Pi(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4) - \Pi(x_4, x_5, x_1, x_2, y_4, y_1),$$

ako je $u_0 \neq 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0;$

5° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)$

$$= \Pi(x_1, x_4) - \Pi(x_2, x_5) + \Pi(x_4, x_1) - \Pi(x_5, x_2),$$

ako je $u_0 \neq 0,\ u_1 = 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 \neq 0;$

6° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)$

$$= \Pi(x_1, x_2, x_3, x_5, y_1, y_2) - \Pi(x_3, x_4, x_5, x_1, y_3, y_4),$$

ako je $u_0 \neq 0,\ u_1 = 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 = 0;$

7° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) = \Pi(x_1, x_2, y_1) - 2\,\Pi(x_2, x_3, y_2)$

$$+ 2\,\Pi(x_3, x_4, y_3) - \Pi(x_4, x_5, y_4)$$
$$+ A(x_1, x_4) - A(x_2, x_5) + A(x_4, x_1) - A(x_5, x_2),$$

ako je $u_0 \neq 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 \neq 0;$

8° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)$

$$= \Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3) - \Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, y_2, y_3, y_4)$$
$$+ A(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4) - A(x_4, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)$$
$$+ B(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4) - B(x_4, x_5, x_1, x_2, y_4, y_1),$$

ako je $u_0 \neq 0,\ u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0;$

9° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4) = \text{const},$

ako je $u_0 = 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 \neq 0;$

10° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)$

$$= \Pi(x_1, x_2, y_1) + 2\,\Pi(x_2, x_3, y_2) + 2\,\Pi(x_3, x_4, y_3) + \Pi(x_4, x_5, y_4)$$
$$+ A(x_1, x_4) + A(x_2, x_5) - A(x_4, x_1) - A(x_5, x_2),$$

ako je $u_0 = 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 \neq 0,\ u_3 = 0;$

11° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)$

$$= \Pi(x_1, x_3, x_5) + \Pi(x_3, x_5, x_1) + \Pi(x_5, x_1, x_3),$$

ako je $u_0 = 0,\ u_1 \neq 0,\ u_2 = 0,\ u_3 \neq 0;$

12° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)$

$$= \Pi(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) + \Pi(x_2, x_3, x_4, y_2, y_3) + \Pi(x_3, x_4, x_5, y_3, y_4)$$
$$+ A(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4) - A(x_4, x_5, x_1, x_2, y_4, y_1)$$
$$+ B(x_1, x_3, x_5) + B(x_3, x_5, x_1) + B(x_5, x_1, x_3)$$

ako je $u_0=0,\ u_1\neq 0,\ u_2=0,\ u_3=0;$

13° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)$

$$=\Pi(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4)+\Pi(x_4, x_5, x_1, x_2, y_4, y_1),$$

ako je $u_0=0,\ u_1=0,\ u_2\neq 0,\ u_3\neq 0;$

14° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)$

$$=\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)+\Pi(x_2, x_3, x_4, x_5, y_2, y_3, y_4)$$

$$+A(x_1, x_3, x_4, x_5, y_3, y_4)-A(x_5, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)$$

$$+B(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4)+B(x_4, x_5, x_1, x_2, y_4, y_1),$$

ako je $u_0=0,\ u_1=0,\ u_2\neq 0,\ u_3=0;$

15° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)$

$$=\Pi(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2)-\Pi(x_2, x_3, x_4, y_2, y_3)+\Pi(x_3, x_4, x_5, y_3, y_4)$$

$$+A(x_1, x_2, x_4, x_5, y_1, y_4)+A(x_4, x_5, x_1, x_2, y_4, y_1)$$

$$+B(x_1, x_3, x_5)+B(x_3, x_5, x_1)+B(x_5, x_1, x_3),$$

ako je $u_0=0,\ u_1=0,\ u_2=0,\ u_3\neq 0;$

16° $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4)=\Pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4),$

ako je $u_0=u_1=u_2=u_3=0.$

Π, A, B su proizvoljne funkcije.

Odeljak B. Neka $x_i, y_i\in S\,(i=1, \ldots, n)$ gde je S neprazan skup, n fiksiran prirodan broj i $y_{n+\nu}=y_\nu$ za svaki prirodan broj $\nu=1, \ldots, n$.

U ovom odeljku razmatra se problem određivanja rešenja sledeće klase jednačina

$$a_0 f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)+a_1 f(x_2, \ldots, x_n, x_1, y_2, \ldots, y_{k+1})$$
$$+\cdots+a_{n-1} f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n, y_1, \ldots, y_{k-1})=0, \tag{6.13}$$

gde su $a_i\,(i=0, 1, \ldots, n-1)$ realni (ili kompleksni) brojevi, $1\leqq k\leqq n$ i nepoznata funkcija f preslikava S u skup realnih (ili kompleksnih) brojeva.

Izložićemo najpre dva partikularna slučaja i to $k=1\,(n>1)$ i $k=n$.

Odredimo opšte rešenje jednačine

$$a_0 f(x_1, \ldots, x_n, y_1)+a_1 f(x_2, \ldots, x_n, x_1, y_2)$$
$$+\cdots+a_{n-1} f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n)=0. \tag{6.14}$$

Cikličkom permutacijom promenljivih dobija se još $n-1$ jednačina

$$
(6.15)\quad
\begin{aligned}
&a_{n-1}f(x_1, \ldots, x_n, y_1)+a_0 f(x_2, \ldots, x_n, x_1, y_2)\\
&\qquad+\cdots+a_{n-2}f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n)=0\\
&\qquad\vdots\\
&a_1 f(x_1, \ldots, x_n, y_1)+a_2 f(x_2, \ldots, x_n, x_1, y_2)\\
&\qquad+\cdots+a_0 f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n)=0.
\end{aligned}
$$

Sistem koji obrazuju jednačine (6.14) i (6.15) može se napisati u matričnom obliku

$$A\cdot F=O,$$

gde su:

$$
A=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 \cdots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_0 & a_{n-2}\\ \vdots & & \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{bmatrix},\quad
F=\begin{bmatrix} f(x_1, \ldots, x_n, y_1)\\ f(x_2, \ldots, x_n, x_1, y_2)\\ \vdots\\ f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n)\end{bmatrix},\quad
O=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}.
$$

Važi sledeća teorema.

Teorema 4. *Opšte rešenje jednačine* (6.14) *dato je formulom*

$$F=C\Pi$$

gde je $C(t_1, \ldots, t_l)$, *sa proizvoljnim parametrima* $t_i (i=1, \ldots, l)$ *opšti oblik svih cikličnih matrica reda* n *koje zadovoljavaju jednačinu* $A\cdot C=O$ *i gde je*

$$
\Pi=\begin{bmatrix}\Pi(x_1, \ldots, x_n)\\ \Pi(x_2, \ldots, x_n, x_1)\\ \vdots\\ \Pi(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})\end{bmatrix},
$$
Π proizvoljna funkcija od $x_1, \ldots, x_n$.

Dokaz. Jednačina (6.14), za $a_0\neq 0$, ekvivalentna je sa

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1)=-\frac{a_1}{a_0}f(x_2, \ldots, x_n, x_1, y_2)-\cdots-\frac{a_{n-1}}{a_0}f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n).$$

Stavljajući $y_2=y_2^0, \ldots, y_n=y_n^0$, gde su $y_2^0, \ldots, y_n^0$ proizvoljne konstante koje pripadaju skupu S, dobija se

$$
(6.16)\quad
\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_n, y_1)=&-\frac{a_1}{a_0}f(x_2, \ldots, x_n, x_1, y_2^0)\\
&-\cdots-\frac{a_{n-1}}{a_0}f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n^0).
\end{aligned}
$$

Desna strana poslednje jednačine zavisi, dakle samo od $x_1, \ldots, x_n$. Označimo taj izraz sa $h(x_1, \ldots, x_n)$.

Dakle, (6.16) dobija sledeći oblik

$$(6.17)\qquad f(x_1, \ldots, x_n, y_1)=h(x_1, \ldots, x_n).$$

Formula (6.17) je opšte rešenje jednačine (6.14) ako i samo ako važi

(6.18) $a_0 h(x_1, \ldots, x_n) + a_1 h(x_2, \ldots, x_n, x_1) + \cdots + a_{n-1} h(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0.$

Ova jednačina je ciklična homogena funkcionalna jednačina sa konstantnim koeficijentima i njeno opšte rešenje u matričnom obliku, prema [34] glasi:

$$H = C\Pi,$$

gde su matrice: $H = \begin{bmatrix} h(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ h(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}) \end{bmatrix} = F, \; \Pi = \begin{bmatrix} \Pi(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \Pi(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}) \end{bmatrix},$

i matrica C zadovoljava uslov $A \cdot C = O$.

Prema tome, opšte rešenje jednačine (6.14) dato je formulom

$$F = C\Pi,$$

što je i trebalo dokazati.

Pređimo na slučaj $k = n$. Označimo parove (x_1, y_1) sa $X_1, \ldots, (x_n, y_n)$ sa X_n. Jednačina (6.13) dobija sledeći oblik

$$a_0 f(X_1, \ldots, X_n) + a_1 f(X_2, \ldots, X_n, X_1) + \cdots + a_{n-1} f(X_n, X_1, \ldots, X_{n-1}) = 0.$$

Ova jednačina je ciklična homogena funkcionalna jednačina i njeno opšte rešenje dato je formulom

$$F = C\Pi,$$

gde su matrice: $F = \begin{bmatrix} f(X_1, \ldots, X_n) \\ \vdots \\ f(X_n, X_1, \ldots, X_{n-1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n, y_1 \ldots y_{n-1}) \end{bmatrix},$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ \Pi(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n, y_1, \ldots, y_{n-1}) \end{bmatrix}.$$

Razmotrimo sada slučaj $1 < k < n$. U tom cilju umesto jednačine (6.13) posmatraćemo jednačinu

$$\begin{aligned} & a_0 f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k; \mathrm{y}_{k+1}, \ldots, \mathrm{y}_n) \\ (6.13') \quad & + a_1 f(x_2, \ldots, x_n, x_1, y_2, \ldots, y_k, y_{k+1}; \mathrm{y}_{k+2}, \ldots, \mathrm{y}_n, \mathrm{y}_1) \\ & + \cdots + a_{n-1} f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n, y_1, \ldots, y_{n+k-1}; \mathrm{y}_{n+k}, \ldots, \mathrm{y}_{n-1}) = 0. \end{aligned}$$

Jednačina (6.13') je ciklična homogena sa konstantnim koeficijentima.

Cikličnom permutacijom promenljivih dobijaju se sledeće jednačine

$$(6.19) \quad \begin{aligned} & a_{n-1} f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k; \mathrm{y}_{k+1}, \ldots, \mathrm{y}_n) \\ & + a_0 f(x_2, \ldots, x_n, x_1, y_2, \ldots, y_{k+1}; \mathrm{y}_{k+2}, \ldots, \mathrm{y}_n, \mathrm{y}_1) \\ & + \cdots + a_{n-2} f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n, y_1, \ldots, y_{n+k-1}; \mathrm{y}_{n+k}, \ldots, \mathrm{y}_{n-1}) = 0. \\ & \vdots \\ & a_1 f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k; \mathrm{y}_{k+1}, \ldots, \mathrm{y}_n) \\ & + a_2 f(x_2, \ldots, x_n, x_1, y_2, \ldots, y_{k+1}; \mathrm{y}_{k+2}, \ldots, \mathrm{y}_n, \mathrm{y}_1) \\ & + \cdots + a_0 f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n, y_1, \ldots, y_{n+k-1}; \mathrm{y}_{n+k}, \ldots, \mathrm{y}_{n-1}) = 0. \end{aligned}$$

Sistem koji obrazuju jednačine (6.13') i (6.19) može se predstaviti u obliku

$$
(6.20)\qquad
\begin{aligned}
a_0 f + a_1 f^1 + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} &= 0,\\
a_{n-1} f + a_0 f^1 + \cdots + a_{n-2} f^{n-1} &= 0,\\
&\vdots\\
a_1 f + a_2 f^1 + \cdots + a_0 f^{n-1} &= 0.
\end{aligned}
$$

Sistem (6.20) je sistem linearnih, homogenih algebarskih jednačina sa nepoznatim $f,\ f^1,\ \ldots,\ f^{n-1}$.

Potreban i dovoljan uslov da sistem (6.20) ima netrivijalna rešenja je

$$
\det A = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & & a_{n-2} \\ \vdots & & & \\ a_1 & a_2 & & a_0 \end{vmatrix} = 0.
$$

Ova determinanta je ciklična i važi jednakost

$$
\det A = E(\varepsilon_0) \cdot E(\varepsilon_1) \cdots E(\varepsilon_{n-1}),
$$

gde su $\varepsilon_i (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ različita rešenja binomne jednačine

$$
b(x) \equiv 1 - x^n = 0.
$$

Dakle, jednačina (6.13') ima netrivijalna rešenja ako i samo ako karakteristična jednačina $E(x) \equiv a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} = 0$ ima zajednička rešenja sa binomnom jednačinom $b(x) \equiv 1 - x^n = 0$.

Opšte rešenje jednačine (6.13') prema [**34**] dato je formulom

$$
\begin{aligned}
&f(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ \ldots,\ y_k;\ y_{k+1},\ \ldots,\ y_n)\\
&\quad = b_0\, \Pi(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ \ldots,\ y_m;\ y_{m+1},\ \ldots,\ y_n)\\
&\quad + b_1\, \Pi(x_2,\ \ldots,\ x_n,\ x_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m,\ y_{m+1};\ y_{m+2},\ \ldots,\ y_n,\ y_1) + \cdots\\
&\quad + b_s\, \Pi(x_{s+1},\ldots,x_n,x_1,\ldots,x_s,y_{s+1},\ldots,y_{m+s};\ y_{m+s+1},\ldots,y_n,y_1,\ldots,y_s),
\end{aligned}
$$

gde su $b_i (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1)$ realni (ili kompleksni) brojevi,

$$
b_0 + b_1 x + \cdots + b_s x^s = F(x).
$$

Jednačinu (6.13) zvaćemo „skresana" jednačina jednačine (6.13').

Dokazaćemo da važi sledeća teorema.

Teorema 5. *Svaka funkcija f data formulom*

$$
(6.21)\qquad
\begin{aligned}
&f(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ \ldots,\ y_k)\\
&\quad = b_0\, \Pi(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_1,\ \ldots,\ y_m) + b_1\, \Pi(x_2,\ \ldots,\ x_n,\ x_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{m+1})\\
&\quad + \cdots + b_s\, \Pi(x_{s+1},\ \ldots,\ x_n,\ x_1,\ \ldots,\ x_s,\ y_{s+1},\ \ldots,\ y_{m+s})
\end{aligned}
$$

gde je $m=k-s$, $m\in\mathbf{N}$, $\Pi(x_1, \ldots, x_n, y_s, \ldots, y_m)$ *proizvoljna funkcija, zadovoljava jednačinu* (6.13).

Ako je $k-s\leqq 0$, *tada je* Π *proizvoljna funkcija samo od* $x_1, \ldots, x_n$.

Dokaz. Dokažimo da je $f=F(\Pi)$, gde je $\Pi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ proizvoljna funkcija, rešenje jednačina (6.13).

Zaista, imamo

$$D(f)=D\big(F(\Pi)\big)=b(\Pi)=0,$$

odakle sleduje $E(f)=0$, što je trebalo dokazati.

U vezi sa prethodnim razmatranjima može se formulisati sledeći problem.

Neka je J bilo koja ciklična jednačina po $x_1, x_2, \ldots, x_n$, neka je $\mathcal{O}$ formula njenog opšteg rešenja koja sadrži proizvoljnu funkciju Π. Ako je J' „skresana" ciklična jednačina dobijena iz J, da li se nekim „kresanjem" funkcije Π u formuli $\mathcal{O}$ dolazi do opšteg rešenja $\mathcal{O}'$ jednačine J'?

BIBLIOGRAFIJA

1. ACZÉL, J. — *Lectures on Functional Equation and Their Applications.* New York 1966.
2. ACZÉL, J., GHERMĂNESCU, M., HOSSZÚ, M. — *On cyclic equations.* Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. **5 (1960)**, 215—221.
3. ADAMOVIĆ, D. D. — *Sur une classe d'équations fonctionnelles linéaires.* Publ. Inst. Math. (Beograd) **8** (22) (1968), 106—120.
4. CRSTICI, B. — *Sur les équations fonctionnelles avec argument fonctionel périodique.* Mathematica (Cluj) **9** (33) **(1966), 1—15.**
5. DRĂGILĂ, P. et VASIĆ, P. M. — *Équations fonctionnelles cycliques linéaires non homogènes.* Ces Publications № **210** — № **228** (1967), 11—16.
6. ĐOKOVIĆ, D. Ž. — *A special cyclic functional equations.* These Publications **143**—№ **155** (1965), 45—50.
7. GHERMĂNESCU, M. — *Sur quelques équations fonctionnelles linéaires.* Bull. Soc. Math. France **68** (1940), 109—128.
8. GHERMĂNESCU, M. — *Ecuaţii funcţionale.* Bucuresti, 1960.
9. HOSSZÚ, M. — *A lineáris függvényegyenletek egy osztályárol.* Magyar Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl. **11 (1961)**, 249—261.
10. KUCZMA, M. — *Functional equations in a single variable.* Warszawa 1968.
11. LÖWENHEIM, L. — *Über die Auflösungen von Gleichungen im logischen Gebietskalkul.* Math. Ann. **68** (1919), 169—207.
12. MITRINOVIĆ, D. S. — *Sur une équation fonctionnelle binome.* C. R. Acad. Sci. Paris **258** (1964), 5577—5580.
13. MITRINOVIĆ, D. S. et ĐOKOVIĆ, D. Ž. — *Sur une classe d'équations fonctionnelles cyclique,* C. R. Acad. Sci. Paris **252** (1961), 1090—1092.
14. MITRINOVIĆ, D. S. — *Équations fonctionnelles cycliques généralisées.* C. R. Acad. Sci. Paris **267** (1963), 2951—2952.
15. MITRINOVIĆ, D. S. et ĐOKOVIĆ, D. Ž. — *Propriétés d'une matrice cyclique et ses applications à une équation fonctionnelles.* C. R. Acad. Sci. Paris **255** (1962), 3109—3110.
16. MITRINOVIĆ, D. S. et ĐOKOVIĆ, D. Ž. — *Propriétés d'une matrice cyclique et ses applications.* Publ. Inst. Math. (Beograd) **2** (16), (1962) 53—54.
17. MITRINOVIĆ, D. S. — *Équations fonctionnelles linéaires paracypliques de premières espèce.* Publ. Inst. Math. (Beograd) **3** (17) (1963), 115—128.
18. MITRINOVIĆ, D. S. — *Sur les équations fonctionnelles linéaires paracycliques de seconde espèce.* Glasnik Mat. — Fiz. Astronom. Društvo Mat. Fiz. Hrvatske (2) **18** (1963), 177—182.
19. PREŠIĆ, S. B. et ZARIĆ, B. M. — *Sur un theorème concernant le cas général d'équation fonctionnelle cyclique, linéaire, homogène à coefficients constants.* Publ. Inst. Math. (Beograd) **11** (25) (1971), 119—120.
20. PREŠIĆ, S. B. — *A method for solving a classe of cyclique functional equation.* Mat. Vesnik **5** (20) (1968), 375—377.
21. PREŠIĆ, S. B. — *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéaires.* Ces Publications № **115** — № **121** (1963), 21—28.

22. PREŠIĆ, S. B. — *Certaines équations matricielles.* Ces Publications № **115** — № **121** (1963), 31—32.

23. PREŠIĆ, S. B. — *Méthode de résolution d'une classe d'équations fonctionnelles linéaires et non homogènes.* Ces Publications № **247** — № **273** (1969), 67—72.

24. PREŠIĆ, S. B. — *Une classe d'équations matricielles et l'équation fonctionnelle $f^2=f$.* Publ. Inst. Math. (Beograd) **8** (22) (1969), 143—148.

25. VASIĆ, P. M., JANIĆ, R. R., ĐORĐEVIĆ, R. Ž. — *Sur les équations fonctionnelles linéaires paracycliques de première espèce.* Ces Publications № **132** — № **142** (1965), 39—50.

26. VASIĆ, P. M. — *Résolution d'une classe d'équations fonctionnelles.* Ces Publications № **181** — № **196** (1967), 53—60.

27. VASIĆ, P. M. et ĐORĐEVIĆ, R. Ž. — *Sur l'équation fonctionnelle cyclique généralisée.* Ces Publications № **132** — № **142** (1965), 33—38.

28. VASIĆ, P. M. et JANIĆ, R. R. — *On some functional equations.* These Publications № **330** — № **337** (1970), 55—62.

29. ZARIĆ, B. M. — *Sur une équation fonctionnelle cyclique linéaire et homogène.* Ces Publications № **274** — № **301** (1969), 159—167.

30. ZARIĆ, B. M. — *Sur une équation fonctionnelle cyclique linéaire non homogène.* Mat. Vesnik **7** (22) (1970), 227—234.

31. ZARIĆ, B. M. — *Équation fonctionnelle cyclique linéaire et non homogène.* Publ. Inst. Math. (Beograd) **10** (24) (1970), 87—101.

32. ZARIĆ, B. M. — *Solution générale d'une classe des équations fonctionnelles cycliques linéaires et homogènes.* Mat. Vesnik **8** (23) (1971), 17—23.

33. ZARIĆ, B. M. — *Solution générale d'une classe d'équations fonctionnelles cycliques linéaires et non homogènes.* Mat. Vesnik **8** (23) (1971), 171—180.

34. ZARIĆ, B. M. — *Sur une formule des solutions générales d'équations fonctionnelle cyclique, linéaire, homogène à coefficients constants.* Mat. Vesnik **8** (23) (1971), 395—397.

Résumé

CONTRIBUTIONS A LA THEORIE DES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LINÉAIRES CYCLIQUES

Budimir M. Zarić

Ce travail, thèse de doctorat, de l'auteur se rapporte aux problèmes généraux et spéciaux de la résolution des équations fonctionnelles linéaires cycliques.

Il continue les résultats classiques et quelques résultats plus nouveaux de la théorie des équations fonctionnelles linéaires.

Il est composé des chapitres suivantes:

I. Considerations, introductives et quelques résultats généraux;
II. Résultats obtenus au moyen de la méthode matricielle de S. B. Prešić;
III. Solution reproductive de l'équation $E(f)=0$;
IV. Applications des résultats précédents aux cas particuliers;
V. Equations linéaires cycliques non homogènes.
VI. Quelques résultats concernants les équations fonctionnelles paracycliques;
VII. Bibliographie.

I. Dans le premier chapitre, on précise tout d'abord le type d'équations fonctionnelles dont il s'agit dans les premières quatre parties du travail et puis on énonce et démontre qulques résultats simples utilisés plusieures fois dans le travail (lemmes 1 et 2). Ensuite encore toujours dans la première partie de ce chapitre, on cite le théorème de Ghermanescu sur la forme de la solution générale du type considéré d'équation fonctionnelle, et l'on expose sa démonstration, un peu différent de celle donnée dans [8] et plus précise que celle-là.

Dans la deuxième partie du premier chapitre on considère un cas particulier — l'équation fonctionnelle binomiale, c'est-à-dire l'équation de la forme $f=af^p$.

On y cite tout d'abord quelques résultats de D. S. Mitrinović, et l'on obtient ensuite, après quelques lemmes et un théorème de caractère assez général, une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation de la forme $E(f)=0$ soit equivalente à l'équation binomiale.

II. Dans la première partie du deuxième chapitre on a exposé les résultats de l'application de la méthode matricielle de S. B. Prešić.

La seconde partie contient l'exposé d'une méthode nouvelle d'obtenir la solution générale de l'équation $E(f)=0$. On y a cherché la solution général de cette équation sous la forme

$$F=B\Pi,$$

où B est une matrice cyclique aux éléments constants. On a examiné d'abord sous quelles conditions, relatives à la matrice B, l'équation $F=B\Pi$ définit la fonction f d'une manière univoque. On a démontré le fait suivant: en supposant que tous les éléments de B soient constants, l'équation $F=B\Pi$ définit la fonction f d'une manière univoque si et seulement si la matrice B est cyclique.

Le résultat principal de ce chapitre est une formule qui comprend toutes les solutions générales de la forme

(1) $$f=b_0\,\Pi+b_1\,\Pi^1+\cdots+b_{n-1}\,\Pi^{n-1}.$$

Il est formulé par l'énoncé suivant:

Si $C(t_1,\ldots,t_l)$, où les paramètres $t_1,\ldots,t_l$ sont arbitraires, représentes une forme générale de toutes les matrices cycliques C satisfaisant à l'équation $A\cdot C=O$ (A étant la matrice de l'équation fonctionnelle $E(f)=0$), alors la formule

$$F=C(t_1,\ldots,t_l)\,\Pi$$

contient toutes les formules de la forme fournissant les solutions générales de l'équation $E(f)=0$.

III. Dans le troisième chapitre on traite le problème de l'unicité de la solution reproductive de l'équation $E(f)=0$.

On dit qu'une solution de cette équation de la forme

(2) $$f=R(\Pi)=b_0\,\Pi^1+\cdots+b_{n-1}\,\Pi^{n-1}$$

est une solution générale reproductive si elle est générale et remplit la condition

$$RR\equiv R\ \big(\mathrm{mod}\,b(x)\big).$$

Après avoir établi le fait que toute solution de la forme (2) peut-être exprimée sous la forme $f=R(\Pi)=F\big(\varphi(\Pi)\big)$, $\varphi(x)$ étant un polynome, on aboutit au résultat suivant, principal dans ce chapitre.

L'équation $E(f)=0$ possède la solution générale reproductive unique, cette solution est donnée par

$$f=F\big(K_0(\Pi)\big),$$

où $K_0(x)$ est le polynome de degré inférieur à celui de $D(x)$ lequel est lié au polynome $L_0(x)$ de degré inférieur à celui de $F(x)$ par l'identité

$$1=F(x)\,K_0(x)+L_0(x)\,D(x),$$

$F(x)$ et $D(x)$ étant deux polynomes déterminés, liés à l'équation $E(f)=0$.

IV. Le chapitre suivant traite le problème de résoudre et d'exprimer par formules la solution générale et la solution générale reproductive de l'équation $E(f)=0$ dans les cas $n=3{,}4$ et 6. On démontre tout d'abord en se servant de méthodes particulières, que l'équation considérée équivalente à l'une des quatre équations déterminées (appelées équations canoniques) dans le cas $n=3$, avec l'une des huit si $n=4$ et avec l'une des seize si $n=6$. On donne ensuite un procédé pour déterminer, pour chaque équation $E(f)=0$ dans les cas $n=3,4,6$, celle des équations canoniques qui lui est équivalente. Pour chaque équation canonique on a déterminé sa solution générale et sa solution générale reproductive.

V. Le sujet du cinquième chapitre est le problème de la résolution de l'équation $E(f)=g$, la fonction g étant donnée. Cette équation non homogène n'est pas possible pour toutes fonctions g. On a trouvé une condition nécessaire de sa possibilité sous la forme

$$CG=O,$$

où C est une matrice cyclique satisfaisant à $AC=O$.

Une solution générale de l'équation considérée est donnée par la formule

$$F = C\Pi - BG,$$

où C est une matrice cyclique satisfaisant à $AC = O$ et B est une solution quelconque de l'équation matricielle $ABA + A = O$.

Toute équation $E(f) = g$ est équivalente à l'une des 4 équations non homogènes canoniques pour $n = 3$, l'une des 8 pour $n = 4$ et à l'une des 16 pour $n = 6$. On a donné le critère de ces équivalences de même que les solutions générales de toutes équations canoniques.

VI. Le sixième chapitre est composé de deux partie.

La première se rapporte à la résolution de quelques classes d'équations paracycliques, par exemple des équations de la forme suivante:

$$a_0 f(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) + a_1 f(x_2, x_3, x_4, y_2, y_3)$$
$$+ a_2 f(x_3, x_4, x_1, y_3, y_4) + a_3 f(x_4, x_1, x_2, y_4) = 0.$$

La deuxième partie traite le problème de déterminer les solutions de l'équation

$$a_0 f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) + a_1 f(x_2, \ldots, x_n, x_1, y_2, \ldots, y_{k+1})$$
$$+ \cdots + a_{n-1} f(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n, y_1, \ldots, y_{k-1}) = 0,$$

où les coefficients $a_i \, (i = 0, 1, \ldots, n-1)$ sont des nombres réels (ou complexes) et k satisfait à $1 \leqq k \leqq n$.

VII. On a énuméré dans la Bibliographie la littérature qui a été soit citée dans le texte de ce travail soit utilisée en tant que littérature générale concernant les équations fonctionnelles.

S A D R Ž A J

PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

Adresser les échanges contre ces *Publications* et toute correspondance à:
Katedra matematike, Elektrotehnički fakultet
11001 *Beograd, poštanski fah* 816, *Yougoslavia*

Ces *Publications* sont éditées par la Faculté d'Électrotechnique de Belgrade avec le concours de la Faculté d'Électronique de Niš

*

The Journal publishes papers up to four printed pages, as a rule, relevant to pure and applied mathematics in general, but, in particular, papers concerning differential and functional equtions, special functions, inequalities, combinatorial and numerical analysis. The papers in Serbo-Croatian, Russian, French, English and German are accepted.

The Journal also publishes original contributions from general physics and especially in engineering physics.

YU ISSN 0350—0128

U N I V E R Z I T E T U B E O G R A D U

PUBLIKACIJE

ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA

SERIJA:

MATEMATIKA I FIZIKA

№ 542 (1976)

BEOGRAD