UNIV. BEOGRAD PUBL. ELEKTROTEHN. FAK.
Ser. Mat. Fiz. № 498—№ 541 (1975), 167—169.

530. ZUR ADDITIVEN ERZEUGUNG DER FOLGE $\cdots(-2)^k\ (-1)^k\ 0^k\ 1^k\ 2^k\cdots$*

Ivan Paasche

1. Um $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ in der Gestalt

$$f(x)=A(x-1)^3+B(x-1)^2+C(x-1)+D$$

zu entwickeln, benutzt man nach **[1]** S. 49—50 das HORNERschema

$$\begin{array}{cccc}
a & b & c & d \\
 & a & a+b & a+b+c \\
\hline
a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\
 & a & 2a+b & \\
\hline
a & 2a+b & 3a+2b+c & \\
 & a & & \\
\hline
a & 3a+b & &
\end{array} \tag{1}$$

mit dem Ergebnis

$$f(x)=a(x-1)^3+(3a+b)(x-1)^2+(3a+2b+c)(x-1)+(a+b+c+d).$$

Die Tatsache. daß gerade nach Potenzen von $x-1$ (und nicht von $x-\xi$) entwickelt wird, kann man sich zunutze machen und (1) in der handlichen verkürzten Gestalt

$$\begin{array}{cccc}
a & b & c & d \\
\hline
a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\
a & 2a+b & 3a+2b+c & \\
a & 3a+b & & \\
a & & &
\end{array} \tag{2}$$

schreiben, die übrigens in **[2]** auch für sonstige ξ vorgeführt wird. Transponiert lautet (2)

$$\begin{array}{c|cccc}
a & a & a & a & a \\
b & a+b & 2a+b & 3a+b & \\
c & a+b+c & 3a+2b+c & & \\
d & a+b+c+d & & &
\end{array}$$

Hiernach ist klar, wie man die spezielle Funktion $f(x)=x^3=1\,x^3+0\,x^2+0\,x+0$ sukzessive als $x^3=f_0(x-0)=f_1(x-1)=f_2(x-2)=\cdots$ zu entwickeln hat:

$$\begin{array}{cc|cccc|cccc|cccc|c}
1\,x^3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
0\,x^2 & 0 & 1 & 2 & 3 & & 3 & 4 & 5 & 6 & 6 & 7 & 8 & 9 & 9 & \cdot\ \cdot\ \cdot \\
0\,x^1 & 0 & 1 & 3 & & & 3 & 7 & 12 & & 12 & 19 & 27 & & 27 & \cdot\ \cdot \\
0\,x^0 & 0 & \mathbf{1} & & & & 1 & \mathbf{8} & & & 8 & \mathbf{27} & & & 27 & \cdot
\end{array}$$

* Presented June 2, 1975 by D. S. MITRINOVIĆ.

$$x^3 = (\mathbf{1}\ 3\ 3\ 1)\begin{pmatrix}(x-1)^0\\(x-1)^1\\(x-1)^2\\(x-1)^3\end{pmatrix} = (\mathbf{8}\ 12\ 6\ 1)\begin{pmatrix}(x-2)^0\\(x-2)^1\\(x-2)^2\\(x-2)^3\end{pmatrix} = (\mathbf{27}\ 27\ 9\ 1)\begin{pmatrix}(x-3)^0\\(x-3)^1\\(x-3)^2\\(x-3)^3\end{pmatrix} = \cdots\cdot$$

Die durch die fetten Zahlen 1 8 27... $= 1^3\ 2^3\ 3^3\cdots$ angedeutete evidente Tatsache $n^3 = f_0(n) = f_n(0)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist ein Spezialfall des MOESSNERschen Satzes

(3) $\qquad n^k = f_0(n) = f_n(0) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots;\ n = 1, 2, 3, \ldots)$

für die Funktionenfolge $x^k = f_0(x-0) = f_1(x-1) = f_2(x-2) = \cdots$ Natürlich hängen die Polynome f nicht nur vom Argument $x-\xi$ sondern auch vom Exponenten k ab. — Auf die nebenstehende praktische Koeffizientenanordnung bei jedem der obigen HORNERschemata nebst Skalarprodukt sei besonders hingewiesen.

$$\begin{array}{ccccc} & & & A & A\\ & & B & & B\\ & C & & & C\\ D & & & & D\\ D & C & B & A & \end{array}$$

2. Der MOESSNERsche Satz hat hiernach die einheitliche additive Erzeugung der Potenzen $1^k\ 2^k\ 3^k\ldots$ aus der Einheitsfolge 1 1 1 ... zum Gegenstand. Er wird am bequemsten in der Gestalt des folgenden Streichungs—und Summationsschemas geschrieben:

$\boxed{k=1}$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot\\ \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{3} & & \mathbf{4} & \end{array}$$

$\boxed{k=2}$

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot\\ 1 & 2 & & 3 & 4 & & 5 & 6 & & 7 & \cdot & \\ \mathbf{1} & & & \mathbf{4} & & & \mathbf{9} & & & \mathbf{16} & & \end{array}$$

$\boxed{k=3}$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & 2 & 3 & & 4 & 5 & 6 & & 7 & 8 & 9 & & 10 & \cdot & \cdot & \\ 1 & 3 & & & 7 & 12 & & & 19 & 27 & & & 37 & \cdot & & \\ \mathbf{1} & & & & \mathbf{8} & & & & \mathbf{27} & & & & \mathbf{64} & & & \end{array}$$

etc. in inf. Dem obigen wohl schönsten und einfachsten Beweis des MOESSNERschen Satzes von J. VAN YZEREN [3] — wir geben ihm die symmetrische Gestalt (3)— gingen kompliziertere von O. PERRON [5], H. SALIÉ [6], I. PAASCHE [7] [8] [9] voraus. Zweck der vorliegenden Note soll nun noch die Fortsetzung des Streichungs — und Summationsschemas nach links sein, also in den Bereich $\cdots (-2)^k\ (-1)^k\ 0^k$ hinein:

$\boxed{k=1}$

$$\begin{array}{cccccccc} \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ \cdot & & \mathbf{-2} & & \mathbf{-1} & & \mathbf{-0} & \end{array}$$

$\boxed{k=2}$

$$\begin{array}{cccccccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ \cdot & \cdot & & -5 & -4 & & -3 & -2 & & -1 & -0 & \\ \cdot & & & \mathbf{4} & & & \mathbf{1} & & & \mathbf{0} & & \end{array}$$

$\boxed{k=3}$

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ \cdot & \cdot & \cdot & & -8 & -7 & -6 & & -5 & -4 & -3 & & -2 & -1 & -0 & \\ \cdot & \cdot & & & 19 & 12 & & & 7 & 3 & & & 1 & 0 & & \\ \cdot & & & & \mathbf{-8} & & & & \mathbf{-1} & & & & \mathbf{-0} & & & \end{array}$$

etc. in inf. Jede Zeile dieser linken Fortsetzuneg enthält die absolut gleichen Zahlen, wie sie schon im rechten Teil auftraten, nur in umgekehrter Reihenfolge. Man kann daher dem Beweis nach J. VAN YZEREN auch das iterierte HORNERschema von $\cdots = f_{-2}(x+2) = f_{-1}(x+1) = f_{-0}(x+0) = x^k$ zugrundelegen.

3. Zum Schluß sei noch bemerkt, daß die Potenzen auch durch kleinere Hilfszahlen als oben bei MOESSNER erzeugt werden können:

$\boxed{k=1}$	**1**	1	**2**	2	**3**	3	**4**	·

$\boxed{k=2}$	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	·	·
	1	2		**4**	6		**9**	12		**16**	·	

	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	·	·	·
$\boxed{k=3}$	1	2	3		5	7	9		12	15	18		22	·	·	
	1	3			**8**	15			**27**	42			**64**	·		

etc. in inf. Beweis z. B. durch die Formel (1) aus [**6**], indem man bei letzterem Zahlenschema jedesmal die Zeile (Beh.:) 1^k, 1^k+2^k, $1^k+2^k+3^k, \ldots,$ nämlich die unteren Spitzen der Zahlendreiecke anfügt. Auch dieses Zahlenschema läßt sich nach links in jeder Zeile mit den absolut gleichen Zahlen wie rechts fortsetzen (zuvor wieder einige Nullen):

$\boxed{k=1}$	·	**−3**	−3	**−2**	−2	**−1**	−1	**−0**	−0

$\boxed{k=2}$	·	−3	−3	−3	−2	−2	−2	−1	−1	−1	−0	−0	−0
		9	6		**4**	2		**1**	0		**0**	0	

	·	−3	−3	−3	−3	−2	−2	−2	−2	−1	−1	−1	−1	−0	−0	−0	−0
$\boxed{k=3}$		15	12	9		7	5	3		2	1	0		0	0	0	
		−27	−15			**−8**	−3			**−1**	−0			**−0**	−0		

etc. in inf.

LITERATUR

1. G. SCHULZ: *Formelsammlung zur praktischen Mathematik.* Berlin — Leipzig 1937.
2. D. S. MITRINOVIĆ, D. MIHAILOVIĆ, P. M. VASIĆ: *Linearna Algebra, Polinomi, Analitička Geometrija*, 4. Aufl. Beograd 1968.
3. J. VAN YZEREN: Amer. Math. Monthly **66** (1959), 53—54.
4. C. T. LONG: ibid. **73** (1966), 846—851.
5. O. PERRON: Sitz. Bayer. Akad. Wiss. 1951, S. 31—34.
6. H. SALIÉ: ibid. 1952, S. 7—11.
7. I. PAASCHE: ibid. 1952, S. 1—5.
8. I. PAASCHE: Arch. Math. **6** (1955), 194—199.
9. I. PAASCHE: Compositio Math. **12** (1955), 263—270.
10. I. PAASCHE: Math. Ann. **134** (1957), 95—100.
11. I. PAASCHE: Der math. u. natw. Unterricht **6** (1953/54), 26—28 und 142.

D-8031 Stockdorf/Lk. Starnberg
Kobellstr. 1
B.D.R.