UNIV. BEOGRAD. PUBL. ELEKTROTEHN. FAK.
Ser. Mat. Fiz. № 498—№ 541 (1975), 163—166.

529. SUR UNE MÉTHODE DE RÉSOLUTION NUMÉRIQUE D'ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES EN PARTICULIER DANS LE CAS DE RACINES MULTIPLES*

J. C. Daubisse

A method for computer-aided calculation on the order of multiplicity for multiple roots of polynomials is given in this paper. The finding of this order permits the use of a Newton's method the convergence of which is always quadratic. Moreover, it is then possible, to use results concerning the errors of calculation of a multiple root. The eventual precision is generally as good as for a simple root.

1. Annexe. Relation entre les erreurs de racines multiples.

Soit: le polynôme $P_n(z)=(z-a)^p \prod_{i=1}^{n-p}(z-\alpha_i)$ et

$a+\Delta_i$ les $(p-1)$ premières racines calculées.

Nous avons:

$$P_n(z)=\left(\prod_{i=1}^{p-1}\big(z-(a+\Delta_i)\big)\right)*\left[z^{n-p+1}-z^{n-p}\Big(\big(a-\sum_{i=1}^{p-1}\Delta_i\big)+\sum_{i=1}^{n-p}\alpha_i\Big)+\cdots+\left(\prod_{i=1}^{n-p}\alpha_i\right)\big(a-\sum_{i=1}^{p-1}\Delta_i\big)\right]+E,$$

avec $E=f(\Delta_k^r\,\Delta_l^s\,\Delta_m^t\cdots)$ avec $r+s+t+\cdots\geqq 2$.

Le polynôme quotient de degré $n-p+1$ a pour racine en particulier $z=a-\sum_{i=1}^{p-1}\Delta_i$. Donc, mises à part les erreurs inhérentes au calcul par ordinateur, la somme des erreurs commises sur la racine multiple a est nulle à E près.

REMARQUE. Les autres racines α_i ne devraient pas être en principe perturbées par les erreurs sur la racine multiple a.

En conclusion, si l'on peut connaître l'ordre de multiplicité exact d'une racine, une amélioration considérable du résultat sera obtenue en faisant la moyenne des solutions données par le calcul.

2. Méthode de Newton-P. Soit $f(z)$ un polynôme à racines multiples. Considérons la fonction $F(z)=\frac{f(z)}{f'(z)}$ holomorphe dans tout le plan et dont les zéros, identiques à ceux de $f(z)$, sont simples. En appliquant la méthode de NEWTON-RAPHSON classique (du 2 ème ordre pour des racines simples — cas de $F(z)$ —), nous obtenons:

$$z_{n+1}=z_n-\left(\frac{f'^2(z)}{f'^2(z_n)-f(z_n)f''(z_n)}\right)*\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}.$$

* Présenté le 9 avril 1975 par D. S. MITRINOVIĆ et D. Đ. TOŠIĆ.

REMARQUE. En simplifiant, nous retrouvons une formule du 2 ème ordre connue.

Soit $f(z)=(z-\alpha)^p(z)\quad h(\alpha)\neq 0$

$$\lim_{z\to\alpha}\frac{f'^2(z_n)}{f'^2(z_n)-f(z_n)f''(z_n)}=p \text{ (ordre de multiplicité de } \alpha).$$

Si p est déterminé ainsi, il suffit alors d'appliquer la formule du second ordre quel que soit l'ordre de la multiplicitè:

$$(1)\qquad z_{n+1}=z_n-p\,\frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

que nous appelerons Newton-P.

2.1. Convergence. Au voisinage de la racine nous avons:

$$*\ \frac{f'^2(z)}{f'^2(z)-f(z)f''(z)}=p+\frac{2}{(p+1)}\,\frac{f^{(p+1)}(\alpha)}{f^{(p)}(\alpha)}\,(z-\alpha)+O(z-\alpha)^2$$

Ce quotient converge donc linéairement vers p quand $z\to\alpha$.

* Pour Newton-P nous aurions de même:

$$\frac{\alpha-z_{n+1}}{(\alpha-z_n)^2}\to\frac{f^{(p+1)}(\alpha)}{p(p+1)f^{(p)}(\alpha)}\quad \text{quand } z\to\alpha \text{ (cf. aussi [1]).}$$

REMARQUES. Soit p l'ordre de multiplicité exact. Soit q l'ordre de multiplicité obtenu par le calcul de la limite de $\dfrac{f'^2(z)}{f'^2(z)-f(z)f''(z)}$ quand $z\to\alpha$.

Si $p\neq q$, nous utiliserons alors la formule $z_{n+1}=z_n-q\,\dfrac{f(z_n)}{f'(z_n)}$.

Au voisinage de la racine, nous avons:

$$(z_{n+1}-\alpha)=(z_n-\alpha)\left(1-\frac{q}{p}\right)+\frac{q}{p^2}\,\frac{f^{(p+1)}(\alpha)}{(p+1)f^{(p)}(\alpha)}(z_n-\alpha)^2+\cdots \quad \text{(cf. aussi [2]).}$$

Donc, si $p\neq q$ la convergence est linéaire, mais sera d'autant meilleure que q sera voisin de p.

2.2 Détermination expérimentale de l'ordre de multiplicité (cf. graphe 1). Soit le polynôme $(z-1)^4(z-2)^3(z-3)^2(z-4)=0$.

Les premières itérations sont obtenues à l'aide de la méthode classique de NEWTON. Le quotient $\dfrac{f'^2(z)}{f'^2(z)-f(z)f''(z)}$ est calculé à chaque itération.

La courbe 1.1. représente les variations de ce quotient en fonction des itérations effectuées; la courbe 1.2. représente les variations de $|p_2-p_1|$ en fonction des itérations (p_1 et p_2 étant les deux dernières valeurs calculées du quotient).

Nous pouvons constater une stabilisation de ce coefficient au voisinage de l'ordre de multiplicité réel dès que l'on est suffisamment proche de la racine (région I). De même, la différence $|p_2-p_1|$ diminue *régulièrement* lorsqu'on s'approche de la racine. Le test $|p_2-p_1|<0.1$ est dans ce cas suffisant pour déterminer l'ordre de multiplicité avec cependant la restriction que la convergence ait effectivement commencé (afin d'éviter les oscillations éventuelles lors des premières itérations).

Il suffit alors d'utiliser Newton-P, d'où une accélération de la convergence et amélioration des résultats. En outre, la propriété définie en annexe, permet souvent de doubler le nombre de décimales exactes (cf. résultats en 3.).

2.3 Cas des racines voisines (cf. graphe 2). Soit m le nombre de racines „voisines“. Région (I): si la valeur initiale est éloignée de ces racines, lors des premières itérations, le quotient $\dfrac{f'^2}{f'^2-ff''}$ est à peu près stationnaire et vaut m.

La différence $|p_2-p_1|$ est alors voisine de 0 donc < 0.1. Le test défini en **2.2.** est alors en défaut.

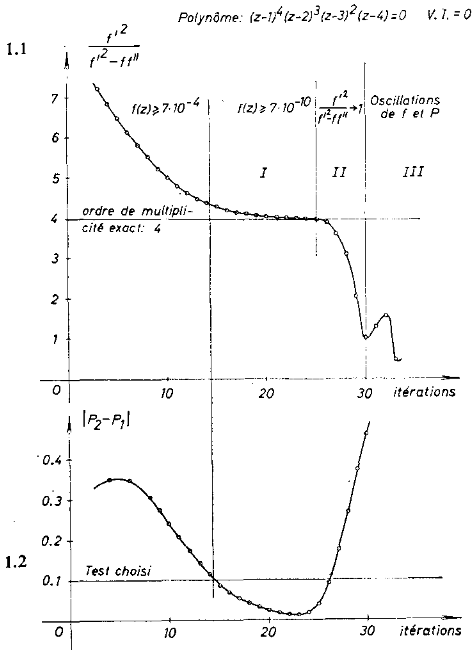

Fig. 1

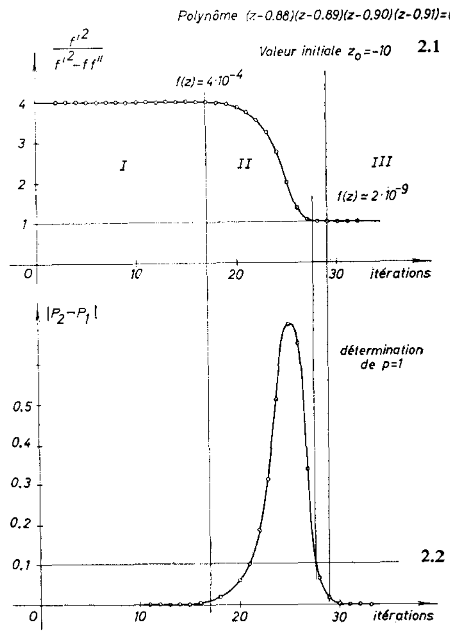

Fig. 2

Régions (II) et (III): lorsque nous sommes au voisinage de la racine, ce coefficient décroît brutalement et tend vers la vraie multiplicité. Les racines voisines ont alors perdu leur caractère de m-multiplicité. La variation de $|p_2-p_1|$ est significative, elle nous permet d'ajuster le test de **2.2.**

Nous dirons avoir trouvé p lorsque:

la convergence est effectivement commencée,

$|p_2-p_1|<0.1$,

la courbe $|p_2-p_1|$ *décroît.*

Ces tests ont été suffisants lors des essais effectués pour des racines multiples réelles ou complexes.

REMARQUES. Nous avons pu ainsi séparer des racines „voisines" telles que si, d est la distance minimale les séparant et $|z|$ leur module moyen, $\dfrac{d}{|z|}$ est < 0.0001 (coefficient séparateur). Si $\dfrac{d}{|z|}$ est trop petit, la séparation ne peut avoir lieu. Si la précision souhaitée est faible, les racines très voisines ne seront pas séparées, mais ceci sans dommage pour l'utilisateur.

3. Résultats. Les calculs ont été effectués sur un ordinateur IBM 370—135 en FORTRAN IV double précision (16 chiffres significatifs).

3.1. $(z-1)^4(z-2)^3(z-3)^2(z-4)=0$, $\varepsilon = 1.10^{-12}$, Valeurs initiales 0

Newton-simple	*Newton-P*	Mult. calculée
0.999 442 667 191 014 4 D+00	0.999 984 820 006 529 2 D+00	4
0.100 023 062 597 436 1 D+01	0.999 984 820 006 529 2 D+00	
0.999 941 294 187 153 0 D+00	0.100 002 050 526 573 2 D+01	
0.100 038 653 234 346 6 D+01	0.100 000 985 684 117 6 D+01	
0.198 844 657 057 935 6 D+01	0.199 935 777 022 570 6 D+01	3
0.201 012 500 029 508 0 D+01	0.200 023 158 737 947 5 D+01	
0.200 172 286 366 092 6 D+01	0.200 041 142 791 875 1 D+01	
0.298 453 189 144 930 3 D+01	0.299 980 755 903 075 0 D+01	2
0.301 523 124 993 474 5 D+01	0.300 019 121 853 234 7 D+01	
0.399 994 130 438 458 9 D+01	0.400 000 043 479 299 8 D+01	1
en 150 itérations	en 99 itérations	

Remarques. En utilisant les résultats de l'annexe, nous avons:

$$\frac{z_1+z_2+z_3+z_4}{4} = 0.100\ 000\ 000\ 052\ 999\ 1\ \mathrm{D}+01 \text{ de multiplicité } 4$$

$$\frac{z_5+z_6+z_7}{3} = 0.200\ 000\ 026\ 184\ 131\ 0\ \mathrm{D}+01 \text{ de multiplicité } 3$$

$$\frac{z_8+z_9}{2} = 0.299\ 999\ 938\ 878\ 154\ 8\ \mathrm{D}+01 \text{ de multiplicité } 2$$

3.2. $(z-i)^3(z+i)^3$

Newton-simple	Ité.	*Newton-P*	Mult. calculée	Ité.
0. + i 0.999 959 325 ···	23	0. + i 1.000 000 397 423 613	3	8
0. − i 0.999 945 555 ···	23	0. − i 1.000 000 237 933 366	3	8
0. + i 1.000 011 296 ···	15	0. + i 0.999 999 796 599 322 6	2	8
0. − i 1.000 030 152 ···	15	0. − i 0.999 999 883 662 329 9	2	8
0. + i 1.000 029 376 ···	6	0. + i 0.999 999 805 976 985 0	1	6
0. − i 1.000 024 428 ···	0	0. − i 0.999 999 878 404 235 0	1	0
	83			38

Remarques. Par Newton-P, nous obtenons donc deux racines de multiplicité 3, qui sont

$$\frac{z_1+z_3+z_5}{3} = 0.999\ 999\ 999\ 999\ 97 \text{ kao } i \text{ et } \frac{z_2+z_4+z_6}{3} = -0.999\ 999\ 999\ 999\ 97\, i$$

De plus, nous avons: $\sum_1^6 \Delta_i = 0$.

Conclusion. Par rapport à la méthode de Newton classique, la détermination de l'ordre de multiplicité permet un gain important sur le nombre d'itérations et sur la précision. De plus, en utilisant les résultats de l'annexe, nous doublons approximativement le nombre de décimales justes.

En conséquence, la précision des résultats sur une racine multiple est souvent comparable à celle obtenue sur une racine simple.

L'utilisation de l'ordre de multiplicité calculé peut être adaptée à d'autres méthodes, en particulier à celle de Laguerre dont la convergence est alors cubique quelque soit l'ordre de multiplicité de la racine considèrée (cf. [3]).

BIBLIOGRAPHIE

1. A. Ostrowski: *Solution of equations and systems of equations.* New York 1966.
2. L. Collatz: *Functionalanalysis und numerische mathematik.* Berlin-New York Heidelberg 1964.
3. J. C. Daubisse: *Etude de certaines méthodes de résolution numérique d'équations algébriques, notamment dans le cas de racines multiples ou voisines.* Thèse de Docteur-Ingénieur. Nantes, 1972.

Dèpartement de mathématiques et informatique
Université de Nantes — France