PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 412 — № 460 (1973)

447. COMPLÉMENTS AU TRAITÉ DE MITRINOVIĆ III

SUR UN SCHÉMA GÉNÉRAL POUR OBTENIR DES INÉGALITÉS*

Robert Meynieux et *Gheorghe Tudor*

1. Soient A, B, G des groupes additifs (commutatifs). On considère une application Z-bilinéaire de $A\times B$ dans G, l'image du couple (a, b) étant notée ab. On a alors les deux identités

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu=\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[(a_\nu-a_{\nu+1})\sum_{k=1}^{\nu} b_k\right]+a_n\sum_{k=1}^{n} b_k, \tag{1}$$

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu=\sum_{\nu=1}^{n-1}\left[(a_\nu+a_{\nu+1})\sum_{k=1}^{\nu}(-1)^{\nu+k} b_k\right]+a_n\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k} b_k \tag{2}$$

qui se déduisent chacune de l'autre en multipliant a_ν et b_ν par $(-1)^\nu$, et dont la première est la formule de sommation partielle d'ABEL (voir par exemple [1] p. 192, problème 3). Le cas le plus simple est celui où A, B, G sont confondus avec le groupe additif d'un anneau, ab désignant le produit dans l'anneau (commutatif ou non), par exemple dans le corps des nombres complexes, ou le corps R des réels.

En particulier, dans ce dernier cas (celui des réels), supposons qu'il existe $\varepsilon=1$ ou -1 tel que les n réels $\varepsilon^{\nu-1}a_\nu$ soient $\geqq 0$ $(\nu=1, \ldots, n)$, et forment une suite non-croissante, et soient μ un minorant et M un majorant des n réels $\sum_{k=1}^{\nu}\varepsilon^{k-1}b_k$ $(\nu=1, \ldots, n)$. Alors on tire de (1), si $\varepsilon=1$, ou de (2), si $\varepsilon=-1$ la double inégalité:

$$a_1\mu\leqq\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu\leqq a_1 M. \tag{3}$$

Le cas $\varepsilon=-1$ se ramène d'ailleurs au cas $\varepsilon=1$ en multipliant a_ν et b_ν par $\varepsilon^{\nu-1}$.

Soient alors Y, X des ensembles quelconques, $v_k\,(k=1, \ldots, n)$ ε, f, F des fonctions $X\to R$, et $u_k\,(k=1, \ldots, n)$, ε' des fonctions $Y\to R$, telles que

---

* Présenté le 1 juin 1973 par B. CRSTICI.

$\varepsilon^2=\varepsilon'^2=1,\ f\leqq\sum_{\nu=1}^{k}\varepsilon^{\nu-1}v_\nu\leqq F\,(k=1,\dots,n)$, et $\varepsilon'^{k-1}u_k\geqq\varepsilon'^k u_{k+1}\geqq 0\,(k=1,\dots,n-1)$.
Alors de (3) résulte:

Théorème. *Dans les conditions qui viennent d'être indiquées, l'inégalité double*

$$u_1(y)f(x)\leqq\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu(y)\,v_\nu(x)\leqq u_1(y)\,F(x) \tag{3'}$$

a lieu pour tout couple $(y,x)\in Y\times X$ *tel que* $\varepsilon'(y)=\varepsilon(x)$ (*de valeur* 1 *ou* -1).

REMARQUE. Il se peut qu'en certains points $x\in X$ la fonction ε prenne indifféremment la valeur 1 ou -1 sans que les conditions imposées cessent d'être remplies. On peut alors dans (3') associer à ces points n'importe quel point $y\in Y$.

2. Nous allons généraliser quelques inégalités remarquables en partant de notre théorème.

Lemme. *On a l'inégalité*

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}+\varepsilon\sum_{k=1}^{q}\frac{\sin 2kx}{2k}>0 \tag{4}$$

dès que

$$0<x<\pi,\quad -1\leqq\varepsilon\leqq 1,\quad q=p \text{ ou } p-1. \tag{5}$$

Démonstration. Il suffit de la faire pour $\varepsilon^2=1$.

Pour $\varepsilon=1$ c'est l'inégalité de FEJÉR-JACKSON

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}>0,\quad 0<x<\pi \tag{6}$$

(voir par exemple [2] p. 255).

Le cas $\varepsilon=-1$ s'en déduit par le changement de x en $\pi-x$:

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{\sin kx}{k}>0,\quad 0<x<\pi. \tag{7}$$

Le cas $\varepsilon=0$ est particulièrement remarquable:

$$\sum_{k=1}^{p}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}>0,\quad 0<x<\pi. \tag{8}$$

Proposition. *Si les fonctions* u_ν *vérifient dans* Y *les conditions de notre théorème, avec* $u_1>0$, *alors on a l'inégalité*

$$\sum_{\nu=1}^{p}u_{2\nu-1}(y)\frac{\sin(2\nu-1)x}{2\nu-1}+\varepsilon\sum_{\nu=1}^{q}u_{2\nu}(y)\frac{\sin 2\nu x}{2\nu}>0 \tag{9}$$

dès que

$$0<x<\pi,\quad -1\leqq\varepsilon\leqq 1,\quad q=p \text{ ou } p-1.$$

Démonstration. Il suffit de la faire pour $\varepsilon^2=1$. Pour cela on applique notre théorème et la remarque qui le suit, en tenant compte du lemme, en posant $v_\nu(x)=\varepsilon^{\nu-1}\frac{\sin \nu x}{\nu}$ et remarquant qu'on peut prendre $f>0$.

3. De la même manière nous pouvons généraliser d'autres inégalités remarquables. Par exemple, l'inégalité de W. H. YOUNG

$$1+\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\cos \nu x}{\nu}>0 \tag{10}$$

dès que $0<x<\pi$ (voir par exemple [**2**], p. 252), entraîne

$$u_0(x)+\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu(x)\frac{\cos \nu x}{\nu}>0 \tag{11}$$

dès que $0<x<\pi$, et $u_\nu(x)$ $(\nu=0, 1, \ldots, n)$ vérifient les conditions de notre théorème.

Ces généralisations nous les avons faites en vue d'en déduire des inégalités intégrales intéressantes. Par exemple, l'inégalité

$$\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu(x)\frac{\sin \nu x}{\nu}>0, \quad x\in]0, \pi[\tag{12}$$

tirée de notre proposition n'apporte rien de nouveau [par rapport à la même inégalité avec u_ν constantes vérifiant les conditions

$$u_{2\nu}<0, \quad u_{2\nu-1}\geqq|u_{2\nu}|\geqq u_{2\nu+1},$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}u_\nu\frac{\sin \nu x}{\nu}>0, \quad x\in]0, \pi[\tag{12'}$$

résultat connu, ou en tout cas se pouvant déduire facilement des résultats connus. Mais la forme (12) nous permet d'obtenir plusieurs inégalités intégrales. Par exemple, en prenant $u_\nu(x)=\cos^{\nu-1}x$, nous obtenons les inégalités intégrales

$$\int_0^x \cos^n t\cdot\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\,dt>x, \quad x\in\left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \tag{13}$$

$$\int_0^x \cos^n t\cdot\frac{\sin(n+1)t}{\sin t}\,dt<x, \quad x\in\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[. \tag{13'}$$

La démonstration directe des inégalités (13) et (13') ne nous semble pas facile.

Nous donnons encore un exemple. De l'inégalité (11) en prenant $u_\nu(x)=\cos^{\nu-1}x$ pour $\nu\geqq 1$ et $u_0=1$ nous obtenons

$$0<\int_0^x \frac{1-\cos^n t\cos(n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t<\ln\left(e\sqrt{n}\sec\frac{x}{2}\right)^2. \tag{14}$$

Voici une démonstration indépendante du notre théorème de l'inégalité (14). Si l'on retranche $2\ln\sec\frac{x}{2}$ $(0<x<\pi)$ on obtient l'intégrale (pour $n\geqq 1$):

$$\int_0^x \operatorname{cotg} t\,[1-(\cos t)^{n-1}\cos(n+1)\,t]\,\mathrm{d}t=f(x)$$

avec $f(x)=f(\pi-x)$, puisque la dérivée $f'(x)$ égale $-f'(\pi-x)$; et $f'(x)\geqq 0$, pour $0<x\leqq\frac{\pi}{2}$, donc $f(x)>0$, et le maximum de $f(x)$ est $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. D'autre part

$$\begin{aligned} f(x)&=\sum_{\nu=1}^{n}\int_0^x (\cos t)^{\nu-1}\frac{\cos\nu t-\cos t\cos(\nu+1)\,t}{\sin t}\,\mathrm{d}t\\ &=\sum_{\nu=1}^{n}\int_0^x (\cos t)^{\nu-1}\sin(\nu+1)\,t\,\mathrm{d}t\\ &=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1-(\cos x)^\nu\cos\nu x}{\nu}. \end{aligned}$$

Mais nous n'avons besoin que de $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu}\leqq 1+\ln n.$

Les inégalités (14) sont ainsi améliorées ce qui n'empêche pas notre théorème d'être justifié, puisqu'il permet de les considérer.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Dieudonné: *Calcul infinitésimal.* Paris 1968.
2. D. S. Mitrinović: *Analytic Inequalities.* Berlin-Heidelberg-New York 1970.

Institut Politechnique „Traian Vuia"
Département de mathématique
Timişoara, Roumanie