

421. EINIGE ABSCHÄTZUNGEN DER GRENZEN DER WURZELN  
ALGEBRAISCHER GLEICHUNGEN\*

*Jovan M. Nahman*

Following the idea of the LOBACHEWSKY-GRÄFFE method for solving the algebraic equations, the author derives some results, new to his knowledge, relevant to the upper bounds of the roots of the algebraic equations.

The following results are obtained:

1. The absolute values of the roots of the algebraic equation

$$(A) \quad \sum_{r=0}^n a_r z^{n-r} = 0 \quad (a_0 \neq 0),$$

are less than the number

$$(B) \quad R = [M(n+1-g)]^{\frac{1}{u}}$$

where

$$M = \max \left( \left| \frac{a_r}{a_0} \right| \right) \quad (r = 0, 1, \dots, n),$$

$$g = \begin{cases} 0 & n = 2s \\ 1 & n = 2s-1 \end{cases} \quad s \in N,$$

$u$  = the number of the biggest roots.

By means of the formula (B) two further results are derived:

2. Let us designate the roots of the equation (A) in accordance with their absolute values as

$$|z_1| \geq \dots \geq |z_{k-1}| \geq |z_k| \geq |z_{k+1}| \geq \dots \geq |z_n|.$$

It is always

$$|z_k| < [M(n+1-g)]^{\frac{1}{k}} \quad (k = 1, \dots, n).$$

3. The absolute values of the roots of an algebraic equation with real coefficients are less than the number

$$R = \max (R_r, \sqrt{M(n+1-g)})$$

where  $R_r$  = the upper bound of the real roots of the algebraic equation.

\* Vorgelegt am 9. Jänner 1973, von B. CRSTIC.

### 1. Die algebraische Gleichung

$$(1) \quad \sum_{r=0}^n a_r z^{n-r} = 0 \quad (a_0 \neq 0),$$

nach Division durch  $a_0$  bringt man auf die Form

$$(2) \quad \sum_{r=0}^n {}_0c_r z^{n-r} = 0$$

mit

$${}_0c_r = \frac{a_r}{a_0} \quad (r=0, 1, \dots, n).$$

Die Abschätzung von Moduln der größten Wurzeln der Gleichung werden wir mittels der Idee der Methode von LOBATSCHIEWSKI-GRÄFFE für Ermittlung der Wurzeln algebraischer Gleichungen ausführen.

Beweisen wir zuerst den

**Satz 1.** Die Moduln von Koeffizienten  ${}_m c_r$ , ( $r=0, 1, \dots, n$ ), in der algebraischen Gleichung deren Wurzeln nach  $m$ -fachen Quadrierung der Wurzeln der Gleichung (1) erhalten worden sind, befriedigen die Ungleichung

$$|{}_m c_r| < M^{2^m} (n+1-g)^{2^m-1},$$

$$M \equiv \max (|{}_0 c_r|) = \max \left( \left| \frac{a_r}{a_0} \right| \right) \quad (r=0, 1, \dots, n),$$

$$g \equiv \begin{cases} 0 & n \text{ gerade Zahl} \\ 1 & n \text{ ungerade Zahl.} \end{cases}$$

*Beweis.* Den Koeffizient beliebigen, zum Beispiel  $r$ -en (zählend von links nach rechts) Gliedes in der algebraischen Gleichung, deren Wurzeln die Quadraten der Wurzeln von der Gleichung (2) darstellen, rechnet man nach der Formel

$$(3) \quad (-1)^r {}_1c_r = {}_0c_r^2 + 2 \sum_{1 \leq i \leq \min(r, n-r)} (-1)^i {}_0c_{r-i} \cdot {}_0c_{r+i}.$$

Index „ $i$ “ in (3) nimmt den Wert der kleineren von zwei Zahlen,  $r$  und  $n-r$ . Alle Koeffizienten  ${}_0c_k$  mit dem Index „ $k$ “ kleinerem als „ $0$ “ oder größerem als „ $n$ “ bestehen in der Gleichung (2) nicht, sie sind gleich Null.

Gemäß (3) kann man schreiben

$$(4) \quad |{}_1c_r| \leq |{}_0c_r|^2 + 2 \sum_{1 \leq i \leq \min(r, n-r)} |{}_0c_{r-i}| \cdot |{}_0c_{r+i}|$$

oder, wenn wir in unsere Betrachtungen die Zahl „ $M$ “ einführen (Satz 1),

$$(5) \quad |{}_1c_r| < M^2 + 2 (\min(r, n-r)) M^2.$$

Für beliebiger „ $r$ “ gilt immer (die Zahl „ $g$ “ wird im Satz 1 definiert)

$$(6) \quad \min(r, n-r) \leq \frac{n-g}{2}.$$

Aus (6) und (5) folgt

$$(7) \quad |{}_1c_r| < M^2 + 2 \frac{n-g}{2} M^2 = M^2 (n+1-g).$$

Da es in der ermittelten majorierenden Formel die Indizes der Koeffizienten nicht gibt, gilt sie für jeden ( $r=0, 1, \dots, n$ ), bzw. für alle Koeffizienten der durch die Quadrierung erhaltenen Gleichung.

Aus entsprechenden Formeln für die Koeffizienten der Gleichungen deren Wurzeln durch zwei- und dreifacher Quadrierung der Wurzeln der Gleichung (1) erhalten worden sind, kann man die Gültigkeit der folgenden allgemeinen Abschätzung voraussetzen

$$(8) \quad |{}_m c_r| < M^{2^m} (n+1-g)^{2^m-1}.$$

Die Formel (8) gilt für  $m=1, 2$  und  $3$ . Gehend aus der Voraussetzung, daß die Formel richtig für „ $m$ “ ist, soll man ihre Gültigkeit für „ $m+1$ “ zeigen.

In Übereinstimmung mit (4) kann man schreiben

$$|{}_{m+1}c_r| \leq |{}_m c_r|^2 + 2 \sum_{1 \leq i \leq \min(r, n-r)} |{}_m c_{r-i}| \cdot |{}_m c_{r+i}|$$

oder hinsichtlich (6) und (8)

$$(9) \quad \begin{aligned} |{}_{m+1}c_r| &< [M^{2^m} (n+1-g)^{2^m-1}]^2 + 2 \frac{n-g}{2} M^{2^m} (n+1-g)^{2^m-1} M^{2^m} (n+1-g)^{2^m-1} \\ &= [M^{2^{m+1}} (n+1-g)^{2^{m+1}-2}] \cdot \left(1 + 2 \frac{n-g}{2}\right) \\ &= M^{2^{m+1}} \cdot (n+1-g)^{2^{m+1}-1}. \end{aligned}$$

Die Formel (9) wird aus (8) beim Ersetzen von „ $m$ “ durch „ $m+1$ “ erhalten. Die Formel (8) gilt folglich auch für „ $m+1$ “. Damit wird der Induktionsbeweis geschlossen. Der Satz 1 wird bewiesen.

2. Setzen wir voraus, daß die Gleichung (1) mehr nach dem Modul gleiche größte Wurzeln, zum Beispiel „ $u$ “ solcher Wurzeln, hat.

Nach dem Wurzelsatz von VIETA für die Gleichung deren Wurzeln  $m$ -fach quadrierten Wurzeln der Gleichung (1) sind, besteht zwischen den Wurzeln die Beziehung

$$(10) \quad \sum_{\leq j_1 < \dots < j_u \leq n} z_{j_1}^{2^m} \cdot z_{j_2}^{2^m} \cdot \dots \cdot z_{j_u}^{2^m} = (-1)^u {}_m c_u.$$

Die Summe in (10) enthält alle Kombinationen der Produkte aus „ $u$ “  $m$ -fach quadrierten Wurzeln der Gleichung (1).

Dividieren und multiplizieren wir die Summe in (10) mit dem Produkt der quadrierten Moduln der größten Wurzeln. Das Modul der größten Wurzeln bezeichnen wir mit  $|z_1|$ .

Man erhält so

$$(11) \quad |z_1|^{2^m u} \cdot \left[ \prod_{i=1}^u \exp(j 2^m \varphi_i) + \sum'_{1 \leq j_1 < \dots < j_u \leq n} \left( \frac{z_{j_1}}{|z_1|} \right)^{2^m} \cdot \left( \frac{z_{j_2}}{|z_1|} \right)^{2^m} \cdot \dots \cdot \left( \frac{z_{j_u}}{|z_1|} \right)^{2^m} \right] \\ = (-1)^u {}_m c_u.$$

Die Summe  $\sum'$  enthält das Produkt der ersten, größten „ $u$ “ quadrierten Wurzeln nicht.  $\varphi_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), sind die Argumente der größten Wurzeln.

Bezeichnen wir

$$(12) \quad h \equiv \sum'_{j \leq j_1 < \dots < j_u \leq n} \left( \frac{z_{j_1}}{|z_1|} \right)^{2^m} \cdot \dots \cdot \left( \frac{z_{j_u}}{|z_1|} \right)^{2^m}.$$

Da

$$\prod_{i=1}^u \exp(j 2^m \varphi_i) = \exp \left( j 2^m \sum_{i=1}^u \varphi_i \right) \equiv \exp(j \alpha) = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

ist, folgt aus (11)

$$(13) \quad |z_1|^u = \frac{|{}_m c_u| \frac{1}{2^m}}{|\cos \alpha + j \sin \alpha + h| \frac{1}{2^m}} = \frac{|{}_m c_u| \frac{1}{2^m}}{[1 + 2(\operatorname{Re}\{h\} \cos \alpha + \operatorname{Im}\{h\} \sin \alpha) + |h|^2] \frac{1}{2^{m+1}}}.$$

Nach dem Satz 1 kann man schreiben

$$(14) \quad |z_1|^u < \frac{M(n+1-g)^{1-\frac{1}{2^m}}}{[1 + 2(\operatorname{Re}\{h\} \cos \alpha + \operatorname{Im}\{h\} \sin \alpha) + |h|^2] \frac{1}{2^{m+1}}}.$$

Die Abschätzung (14) gilt bei jedem beliebig großen „ $m$ “.

Aus der Definition (12) beschliesst man, daß

$$(15) \quad h < \sum'_{j \leq j_1 < \dots < j_u \leq n} \left| \frac{z_{j_1}}{z_1} \right|^{2^m} \cdot \dots \cdot \left| \frac{z_{j_u}}{z_1} \right|^{2^m} < CK^{2^m}$$

wird, wenn wir mit „ $K$ “ das Verhältnis zwischen dem Modul der Wurzel nächsten zu den größten Wurzeln und dem Modul dieser letzten bezeichnen ( $K < 1$ ). „ $C$ “ bezeichnet die Anzahl der Summanden in der Summe

$$C = \binom{n}{u} - 1.$$

Die Zahl „ $h$ “ kann man daher mit genügend großem „ $m$ “ beliebig klein machen

$$(16) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} |h| = 0.$$

Da

$$\begin{aligned} |2(\operatorname{Re}\{h\} \cos \alpha + \operatorname{Im}\{h\} \sin \alpha) + |h|^2| &\leq 2|h|(|\cos \alpha| + |\sin \alpha|) + |h|^2 \\ &\leq 2\sqrt{2}|h| + |h|^2 \end{aligned}$$

ist, aus (16) folgt

$$(17) \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} [2(\operatorname{Re}\{h\} \cos \alpha + \operatorname{Im}\{h\} \sin \alpha) + |h|^2] = 0.$$

Die majorierende Formel (14) mit  $m \rightarrow +\infty$  wird so

$$(18) \quad |z_1|^m < M(n+1-g).$$

Formulieren wir aus der Ungleichung (18) den

**Satz 2.** Die Wurzeln der Gleichung (1) sind sicher nach dem Modul kleiner als die Zahl

$$R = [M(n+1-g)]^{\frac{1}{n}}.$$

3. Aus dem Satz 2 erhält man einfach den

**Satz 3.** Bezeichnen wir die Wurzeln der algebraischen Gleichung (1) mit den Indizes  $1, \dots, n$  nach der Größe ihrer Moduln

$$|z_1| \geq |z_2| \geq \dots \geq |z_{k-1}| \geq |z_k| \geq |z_{k+1}| \geq \dots \geq |z_n|.$$

Für die Wurzeln gilt

$$|z_k| < [M(n+1-g)]^{\frac{1}{k}} \quad (k = 1, \dots, n).$$

**Beweis.** Der größtmögliche Betrag von  $|z_k|$  wird, wenn

$$|z_k| = |z_{k-1}| = \dots = |z_2| = |z_1|,$$

ist.

In Übereinstimmung mit dem Satz 2 wird dann

$$(19) \quad |z_k| < [M(n+1-g)]^{\frac{1}{k}}.$$

Die Formel (19) gibt so die allgemeine Abschätzung des Moduls  $|z_k|$ . Der Satz 3 wird bewiesen.

4. Mit Hilfe des Satzes 2 kann man für die algebraischen Gleichungen mit sämtlich reellen Koeffizienten den folgenden Satz ausführen.

**Satz 4.** Die Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit reellen Koeffizienten sind nach dem Modul kleiner als die Zahl

$$R = \max(R_r, R')$$

mit

$$R' = \sqrt{M(n+1-g)},$$

wo  $R_r$  die Grenze des absoluten Betrages der reellen Wurzeln der Gleichung darstellt.

**Beweis.** Setzen wir voraus, daß die größte Wurzel der Gleichung eine komplexe Wurzel ist. Da die Gleichung mit sämtlich reellen Koeffizienten ist, wird die größte Wurzel mit der entsprechenden konjugierten Wurzel desselben Moduls verbunden. Die Grenze der Wurzeln wird so in Übereinstimmung mit dem Satz 2

$$R' = \sqrt{M(n+1-g)}.$$

Falls die größte eine reelle Wurzel ist, wird die Grenze der Wurzeln der Gleichung gleich  $R_r$ .

In allen anderen möglichen Fällen mit mehr als zwei nach dem Modul größten Wurzeln wird gemäß dem Satz 2 die Grenze der Wurzeln, da  $M(n+1-g) \geq 1$  ist, sicher immer kleiner als  $R'$ .

Die Wurzeln der algebraischen Gleichung können daher nimmer nach den Moduln so groß als die Zahl

$$R = \max(R_r, R),$$

sein. Der Satz 4 wird bewiesen.

Der Verfasser möchte an dieser Stelle Prof. Dr. D. S. MITRINOVIĆ für sein Interesse und Entgegenkommen, sowie Dr. D. SIMEUNOVIĆ für seine Vorschläge hinsichtlich des Satzes 3 verbindlich danken.