PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 381 — № 409 (1972)

390. SUR UNE INEGALITÉ CONSIDÉRÉE PAR D. S. MITRINOVIĆ*

Tasko Savov

Nous considérons les fonctions

(1) $$\varphi_1(x) = (1 - x^p)^m \qquad (p>0, \quad m>0; \quad 0<x<1),$$

(2) $$\varphi_2(x) = (1 - x^q)^n \qquad (q>0, \quad n>0; \quad 0<x<1).$$

Prof. D. S. MITRINOVIĆ [1] a proposé le problème suivant: Y-a-t-il des valeurs de $x \in (0, 1)$ pour lesquelles

$$\varphi_1(x) < \varphi_2(x); \qquad \varphi_1(x) > \varphi_2(x)?$$

Prof. CHR. KARANICOLOFF [2] a prouvé qu'on a pour $0<p<q$, $0<m<n$

(3) $$\varphi_1(x) < \varphi_2(x) \qquad (0<x<x'),$$

(4) $$\varphi_1(x) > \varphi_2(x) \qquad (x'<x<1),$$

où $x' \in (0, 1)$ est la racine de l'équation

$$\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 0.$$

De la démonstration du prof. KARANICOLOFF {voir [2] pages 160—161} suivent les inéqalités

(5) $$\varphi_1(x_0) < \varphi_2(x_0)$$

où $x_0 \in (0, 1)$ est le zéro unique de

(6) $$\varphi(x) = (nq - mp)\, x^q - nqx^{q-p} + mp;$$

donc

(7) $$\varphi(x_0) = 0, \qquad 0<x_0<1;$$

on a aussi

(8) $$\varphi(x) > 0, \qquad 0<x<x_0,$$

(9) $$\varphi(x) < 0, \qquad x_0<x<1.$$

* Présenté le 15 janvier 1972 par R. P. BEESACK et D. ADAMOVIĆ.

En relation du problème proposé, nous allous faire une amélioration des inégalités (3) et (4).

Nous allons démontrer le théorème suivant, sous les hypotèses

$$0<p<q, \qquad 0<m<n.$$

Si $K_0=\frac{\varphi_1(x_0)}{\varphi_2(x_0)}$, où x_0 est la racine de (6), alors:

I. Pour $0<M<K_0$, l'inégalité suivante est en vigueur

$$\varphi_1(x)>M\varphi_2(x) \qquad (0<x<1). \tag{10}$$

II. Pour $K_0<M<1$ les inégalités suivantes sont en vigueur

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x)>M\varphi_2(x) && (0<x<x_1), \\ &\varphi_1(x)<M\varphi_2(x) && (x_1<x<x_2), \\ &\varphi_1(x)>M\varphi_2(x) && (x_2<x<1), \end{aligned} \tag{11}$$

où x_1 et x_2 sont les racines de l'équation

$$\varphi_1(x)-M\varphi_2(x)=0 \qquad (0<x_1<x_2<1). \tag{12}$$

III. Pour $M=K_0$, on a dans (0, 1)

$$\varphi_1(x)>M\varphi_2(x) \ (x\neq x_0), \qquad \varphi_1(x_0)=M\varphi_2(x_0).$$

Démonstration. De (5) il suit que $K_0=\frac{\varphi_1(x_0)}{\varphi_2(x_0)}<1$.

Nous prenons la fonction auxiliaire

$$f(x)=\ln\frac{\varphi_1(x)}{M\varphi_2(x)}, \qquad 0<M<1. \tag{13}$$

En prenant en considération (1) et (2), on obtient

$$f(x)=m\ln(1-x^p)-n\ln(1-x^q)-\ln M, \tag{14}$$

d'où

$$f'(x)=-\frac{x^{p-1}}{(1-x^p)(1-x^q)}\cdot\varphi(x) \tag{15}$$

et $\varphi(x)$ est présenté par (6).

De (15) et (7) nous avons $f'(x)=0$ $(0<x<1)$ pour $\varphi(x)=0$, c'est-à-dire pour $x=x_0$.

De (15), (8) et (9) on conclut que

$$\begin{aligned} &f'(x)<0, \text{ c. à. d. } f(x) \text{ décroit pour } 0<x<x_0, \\ &f'(x)>0, \text{ c. à. d. } f(x) \text{ croit pour } x_0<x<1. \end{aligned} \tag{16}$$

On vérifie facilement que l'on a $f(0)=-\ln M>0$; $f(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=+\infty$.

Il s'en suit que l'équation $f(x)=0$ peut avoir 0 ou 2 racines réelles.
I. $f(x)=0$ n'a pas de racines réelles en (0, 1). Alors

$$f(x_0)>0, \quad \ln\frac{\varphi_1(x_0)}{M\varphi_2(x_0)}>0 \tag{17}$$

d'où l'on obtient

$$\frac{\varphi_1(x_0)}{M\varphi_2(x_0)}>1, \tag{18}$$

$$M<\frac{\varphi_1(x_0)}{\varphi_2(x_0)}=K_0. \tag{19}$$

Ainsi, si l'on a (19), alors $f(x)>0$ $(0<x<1)$ et en antilogarithmant (13) on obtient

$$\frac{\varphi_1(x)}{M\varphi_2(x)}>1, \quad \varphi_1(x)>M\varphi_2(x) \quad (0<M<K_0). \tag{20}$$

II. $f(x)=0$ a deux racines réelles x_1 et x_2 $(0<x_1<x_2<1)$.

Alors,

$$f(x_0)<0, \quad \ln\frac{\varphi_1(x_0)}{M\varphi_2(x_0)}<0,$$

d'où résultent les inégalités

$$\frac{\varphi_1(x_0)}{M\varphi_2(x_0)}<1, \qquad M>\frac{\varphi_1(x_0)}{\varphi_2(x_0)}=K_0. \tag{21}$$

Mais les racines de l'équation $f(x)=0$ sont les racines de l'équation (12) aussi. Ainsi,

$$\begin{aligned} &f(x)>0 \quad (0<x<x_1),\\ &f(x)<0 \quad (x_1<x<x_2),\\ &f(x)>0 \quad (x_2<x<1) \end{aligned} \tag{22}$$

et en prenant en considération (13) et en antilogarithmant on obtient

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x)>M\varphi_2(x) \qquad (0<x<x_1),\\ &\varphi_1(x)<M\varphi_2(x) \qquad (x_1<x<x_2),\\ &\varphi_1(x)>M\varphi_2(x) \qquad (x_2<x<1), \end{aligned} \tag{23}$$

où x_1 et x_2 sont les racines de (12) et $K_0<M<1$.

III. $f(x)=0$ a une racine double dans (0, 1). Alors $f(x_0)=0$ et par suite $\frac{\varphi_1(x_0)}{M\varphi_2(x_0)}=1$, c'est-à-dire $M_0=\frac{\varphi_1(x_0)}{\varphi_2(x_0)}$.

Dans ce cas, on a $f(x)>0$ $(x\neq x_0)$, $f(x_0)=0$ et par suite

$$\varphi_1(x)>M\varphi_2(x) \ (0<x<1,\ x\neq x_0), \ \varphi_1(x_0)=M\varphi_2(x_0).$$

Avec cela le théorème est démontré.

LITTERATURE

1. D. S. Mitrinović: *Sur une inégalité algébrique*. Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № **84**—№ **91** (1963), 3—7.

2. Chr. Karanicoloff: *Sur une inégalité concernant la fonction puissance*. Matematički vesnik **1** (16), (1964), 159—161.

3. D. S. Mitrinović: *Analytic Inequalities*. Berlin—Heidelberg—New York, 1970, pp. 278—279.

„P. R. Slavejkov" bl. 38, br. 5
Burgas, Bulgaria