PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 381 — № 409 (1972)

387. EIN SATZ ÜBER UMORDNUNGS-UNGLEICHUNGEN*

Eugen Beck

1. Einleitung

Ausdrücke von der Form

$$A(x, y):=\sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k), \tag{I}$$

bei denen die reellen Zahlen $x_k (k=1, \ldots, n)$ aus einem Intervall I_x, die $y_k (k=1, \ldots, n)$ aus einem Intervall I_y fest vorgegeben sind, und die Funktion $F(x, y)$ auf dem Rechteck $I_x \times I_y$ definiert ist, sind im allgemeinen von der gegenseitigen Anordnung der Zahlen $\{x_k\}$ und $\{y_k\}$ abhängig. $A(x, y)$ kann möglicherweise $n!$ verschiedene Werte annehmen. Denkt man sich etwa die Punktmenge $\{y_k\}$ nach *wachsender Größe* angeordnet — wir bezeichnen die umgeordneten Zahlen mit $\{y'_k\}$, setzen also

$$y':=\{y'_1, \ldots, y'_n\} \quad \text{mit} \quad y'_1 \leqq \cdots \leqq y'_n, \tag{1}$$

dann gehört im allgemeinen Fall zu dieser Anordnung eine ganz bestimmte Anordnung der $\{x_k\}$, etwa die Anordnung $(x_{\sigma_1}, \ldots x_{\sigma_n})$, bei der $A(x, y)$ seinen kleinsten Wert, und eine Anordnung $(x_{\tau_1}, \ldots, x_{\tau_n})$, bei der $A(x, y)$ seinen größten Wert annimmt. Umordnungs-Ungleichungen sind also von der Form

$$\sum_{k=1}^{n} F(x_{\sigma_k}, y'_k) \leqq \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y'_k) \leqq \sum_{k=1}^{n} F(x_{\tau_k}, y'_k). \tag{II}$$

Das einfachste Beispiel ist das innere Produkt $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$, das von PÓLYA und SZEGÖ anläßlich der Umkehrung der CAUCHYschen Ungleichung untersucht worden ist (vgl. [9] S. 57 Aufgabe 92 mit Lösung S. 213/214 und [3] S. 261 ff.). Bezeichnet man die nach *abnehmender Größe* geordnete Punktmenge $\{x_k\}$ mit

$$x^*:=\{x^*_1, \ldots, x^*_n\} \quad \text{mit} \quad x^*_1 \geqq x^*_2 \geqq \cdots \geqq x^*_n, \tag{2}$$

* Vorgelegt am 20. I 1972 von D. S. MITRINOVIĆ.

während x' analog zu (1) die nach *wachsender Größe* geordnete Punktmenge $\{x_k\}$ ist, dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^* y_k' \leqq \sum_{k=1}^{n} x_k y_k' \leqq \sum_{k=1}^{n} x_k' y_k' \quad (x_k \geqq 0, \quad y_k' \geqq 0), \tag{3}$$

d. h. der Ausdruck $\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ nimmt seinen größten Wert an, wenn die beiden Punktfolgen x und y gleichlaufend geordnet sind, und seinen kleinsten Wert, wenn x und y gegenlaufend geordnet sind. (Wegen dieser Bezeichnungen vgl. etwa [6], S. 10).

Eine (3) entsprechende Ungleichung, die wohl zuerst von H. D. RUDERMAN ([8]; vgl. auch A. OPPENHEIM [7] und H. MINC [5]) bewiesen worden ist, ist die folgende:

$$\prod_{k=1}^{n} (x_k' + y_k') \leqq \prod_{k=1}^{n} (x_k + y_k') \leqq \prod_{k=1}^{n} (x_k^* + y_k') \quad (x_k \geqq 0, \ y_k' \geqq 0). \tag{4}$$

D. LONDON [4] hat gezeigt, daß diese beiden Ungleichungen Sonderfälle allgemeinerer Umordnungs-Ungleichungen sind, bei denen eine Funktion $f(z)$ von *einer* Veränderlichen vorkommt. Im folgenden wird ein einfacher Satz hergeleitet, der sich auf die in (I) vorkommende Funktion $F(x, y)$ von *beiden* Veränderlichen bezieht, und der es u. a. erlaubt, die erwähnten Umordnungs--Ungleichungen durch Spezialisierung zu gewinnen.

2. Der allgemeine Satz

Satz. *$F(x, y)$ besitze im Rechteck $I_x \times I_y$ partielle Ableitungen erster Ordnung und eine partielle Ableitung zweiter Ordnung* $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$.

a) Ist im ganzen Rechteck $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \geqq 0$, *dann wird das Maximum (Minimum) von $A(x, y)$ bei gleichlaufend (gegenlaufend) geordneten Punktmengen x, y angenommen, d. h. es gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} F(x_k^*, y_k') \leqq \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k') \leqq \sum_{k=1}^{n} F(x_k', y_k'). \tag{II'}$$

b) Ist im ganzen Rechteck $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \leqq 0$, *dann wird das Maximum (Minimum) von $A(x, y)$ bei gegenlaufend (gleichlaufend) geordneten Punktmengen x, y angenommen, d. h es gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} F(x_k', y_k') \leqq \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k') \leqq \sum_{k=1}^{n} F(x_k^*, y_k'). \tag{II''}$$

c) Ist im ganzen Rechteck $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} \neq 0$, *dann gilt das Gleichheitszeichen* 1) *auf der linken Seite von* (II') (*bzw.* (II'')), *wenn die* $\{x_k\}$ *gegenlaufend (gleichlaufend) angeordnet sind, und auf der rechten Seite, wenn die* $\{x_k\}$ *gleichlaufend (gegenlaufend) angeordnet sind;* 2) *sowohl links als auch rechts, wenn alle* x_k *oder alle* y_k *einander gleich sind.*

Beweis. Wir betrachten die Auswirkung einer Vertauschung zweier x-Werte und setzen

$$G(x) := F(x,\, y'_m) - F(x,\, y'_k) \quad \text{mit} \quad k < m.$$

Dann ist nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$G(x_m) - G(x_k) = (x_m - x_k)\left[\frac{\partial F}{\partial x}(\xi,\, y'_m) - \frac{\partial F}{\partial x}(\xi,\, y'_k)\right],$$

und nach nochmaliger Anwendung

$$G(x_m) - G(x_k) = (x_m - x_k)(y'_m - y'_k)\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}(\xi,\, \eta) \tag{5}$$

mit einer zwischen x_k und x_m liegenden Zahl ξ und mit $\eta \in (y'_k,\, y'_m)$. Schreibt man (5) ausführlich und in der Form

$$\begin{aligned}[F(x_m,\, y'_m) + F(x_k,\, y'_k)] &- [F(x_k,\, y'_m) + F(x_m,\, y'_k)] \\ &= (x_m - x_k)(y'_m - y'_k)\frac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}(\xi,\, \eta),\end{aligned}$$

so ergeben sich sofort die Behauptungen a) und b) des Satzes. Ist nämlich z. B. $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y}(\xi,\, \eta) \geqq 0$, so ergibt sich

$$F(x_m,\, y'_m) + F(x_k,\, y'_k) \underset{(<)}{\geqq} F(x_k,\, y'_m) + F(x_m,\, y'_k) \quad \text{für} \quad x_k \underset{(>)}{\leqq} x_m,$$

d. h. bei gleichlaufender Anordnung ergibt sich der größere Wert, bei gegenlaufender Anordnung der kleinere Wert.

Damit $A(x,\, y)$ unverändert bleibt, ist im Falle $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\, \partial y} \neq 0$ notwendig und hinreichend, daß für jedes Indexpaar $(k,\, m)$ die Ausdrücke $F(x_m,\, y'_m) + F(x_k,\, y'_k)$ und $F(x_k,\, y'_m) + F(x_m,\, y'_k)$ einander gleich sind. Dies ist aber nur in den in c 2) angegebenen Fällen möglich; in allen andern Fällen ist die rechte Seite in (5) mindestens einmal von Null verschieden. Die unter c 1) angegebenen Fälle sind ebenfalls trivial; in dem Ausdruck in der Mitte von (II') bzw. (II'') sind die x und y dann jeweils gerade so angeordnet, daß sich entweder das Maximum oder das Minimum von $A(x,\, y)$ ergibt.

3. Beispiele

Bei den folgenden Beispielen wird angenommen, daß die auftretenden allgemeinen Funktionen die Forderungen des Satzes hinsichtlich der Existenz der partiellen Ableitungen erfüllen. Bei den auftretenden speziellen Funktionen sind diese Forderungen erfüllt.

a) Bei dem von PÓLYA und SZEGÖ behandelten inneren Produkt ist $F(x, y) \equiv xy$, also $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1$. Nach unserem Satz gilt also stets die Ungleichung (3); die $\{x_k\}$ und $\{y_k\}$ können dabei sehr wohl auch negativ sein.

b) In dem allgemeineren Fall $F(x, y) \equiv f(x) g(y)$ ist $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f'(x) g'(y)$. Ist $f'(x) g'(y) \underset{(<)}{\geqq} 0$ in $I_x \times I_y$, so ergeben sich die Ungleichungen

$$(6) \qquad \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) g(y_k') \underset{(>)}{\leqq} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) g(y_k') \underset{(>)}{\leqq} \sum_{k=1}^{n} f(x_k') g(y_k').$$

c) Ist $F(x, y) \equiv f(xy)$, dann ist $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f'(xy) + xyf''(xy)$. Ist $z := xy$ und ist die Funktion $f'(z) + zf''(z) \underset{(<)}{\geqq} 0$ in einem Intervall I_z, dann gilt für alle $x \in I_x$, $y \in I_y$ mit $xy \in I_z$

$$(7) \qquad \sum_{k=1}^{n} f(x_k^* y_k') \underset{(>)}{\leqq} \sum_{k=1}^{n} f(x_k y_k') \underset{(>)}{\leqq} \sum_{k=1}^{n} f(x_k' y_k').$$

Die Bedingung über $f(z)$ kann auch so gefaßt werden: die Funktion $f(e^u)$ soll konvex (konkav) sein für alle u-Werte mit $e^u \in I_z$.

d) Setzt man $F(x, y) = \log|x+y|$, so ist $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -(x+y)^{-2} < 0$, Ist $z := x+y$ und I_z ein Intervall, in dem $\log|z|$ stetig ist, dann gilt für alle $x \in I_x$, $y \in I_y$ mit $x+y \in I_z$

$$(8) \qquad \prod_{k=1}^{n} |x_k' + y_k'| \leqq \prod_{k=1}^{n} |x_k + y_k'| \leqq \prod_{k=1}^{n} |x_k^* + y_k'|.$$

Dies sind i. w. die von RUDERMAN [8] angegebenen Ungleichungen (4).

e) Etwas allgemeiner ergibt sich für $F(x, y) \equiv f(x+y)$ unter der Voraussetzung, daß $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f''(x+y) \underset{(<)}{\geqq} 0$ ist für $(x, y) \in I_x \times I_y$,

$$(9) \qquad \sum_{k=1}^{n} f(x_k^* + y_k') \underset{(>)}{\leqq} \sum_{k=1}^{n} f(x_k + y_k') \underset{(>)}{\leqq} \sum_{k=1}^{n} f(x_k' + y_k').$$

f) Für $F(x, y) \equiv x \log(1+y)$ ($x \in I_x$ mit beliebigem I_x, $y > 0$) ist $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1/(1+y) > 0$. Daher gilt

$$(10) \qquad \prod_{k=1}^{n} (1+y_k')^{x_k^*} \leqq \prod_{k=1}^{n} (1+y_k')^{x_k} \leqq \prod_{k=1}^{n} (1+y_k')^{x_k'}.$$

g) Ist $F(x, y) \equiv x^y$ ($x > 1$, $y > 0$), dann ist $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(1 + y \log x) > 0$. Es gilt daher

$$(11) \qquad \sum_{k=1}^{n} x_k^{*\,y_k'} \leqq \sum_{k=1}^{n} x_k^{\,y_k'} \leqq \sum_{k=1}^{n} x_k'^{\,y_k'}.$$

Die folgenden Beispiele lassen sich zwar mit der Substitution $t_k := x_x^{-1}$ auf frühere zurückführen; sie können aber ebenso einfach direkt hergeleitet werden.

h) Es sei $F(x, y) \equiv y/x$ ($y \in I_y$ mit beliebigem I_y, $x \in I_x$ mit $0 \notin I_x$), dann gilt wegen $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -x^{-2} < 0$

$$(12) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k'}{x_k'} \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k'}{x_k} \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k'}{x_k^*}.$$

i) Etwas allgemeiner sei $F(x, y) \equiv f\left(1+\frac{y}{x}\right)$ mit $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -x^{-2}\left[f'\left(1+\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}f''\left(1+\frac{y}{x}\right)\right]$. Das Intervall I_x enthalte nicht den Nullpunkt; für die Funktion $f(1+z)$ gelte im Intervall $I_z\left(\text{mit } \frac{y}{x} \in I_z\right)$ $f'(1+z)+zf''(1+z) \underset{(<)}{\geqq} 0$, dann ist

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{y_k'}{x_k'}\right) \underset{(>)}{\leqq} \sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{y_k'}{x_k}\right) \underset{(>)}{\leqq} \sum_{k=1}^{n} f\left(1+\frac{y_k'}{x_k^*}\right). \tag{13}$$

Diese Ungleichungen sind dieselben wie bei D. London ([4], S. 750); die Voraussetzungen sind jedoch ein wenig verschieden. Die $\{x_k\}$ und $\{y_k\}$ brauchen hier nicht unbedingt positiv zu sein; dagegen werden bei D. London keine Ableitungen benötigt.

j) Setzt man schließlich $F(x, y) \equiv f\left(\frac{y}{x}\right)$ mit $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -x^{-2}\left[f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)\right]$, so gilt für jedes Intervall I_x, das den Nullpunkt nicht enthält, und für jedes Intervall $I_z\left(\text{mit } \frac{y}{x} \in I_z\right)$, auf dem $f'(z)+zf''(z) \underset{(<)}{\geqq} 0$ ist,

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{y_k'}{x_k'}\right) \underset{(>)}{\leqq} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{y_k'}{x_k}\right) \underset{(>)}{\leqq} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{y_k'}{x_k^*}\right).$$

Diese Ungleichungen sind Gegenstand des zweiten Satzes von D. London ([4], S. 752). Auch hier bestehen dieselben Unterschiede hinsichtlich der Gültigkeit wie bei i).

EINSCHLÄGIGE LITERATUR

1. G. F. D. Duff: *Differences, derivatives and decreasing rearrangements.* Canadian J. Math. **19** (1967), 1153—1178.
2. G. F. D. Duff: *Integral inequalities for equimeasurable rearrangements.* Canadian J. Math. **22** (1970), 408—430.
3. G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya: *Inequalities,* 2 nd ed. Cambridge London and New York, 1952.
4. D. London: *Rearrangement inequalities involving convex functions.* Pacific J. Math **34** (1970), 749—753.
5. H. Minc: *Rearrangement inequalities.* Trans. Amer. Math. Soc. **159** (1971), 497—504.
6. D. S. Mitrinović: *Analytic Inequalites.* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 165), Berlin—Heidelberg—New York, 1970.
7. A. Oppenheim: *Inequalities connected with definite hermitian forms,* II. Amer. Math Monthly **61** (1954), 463—466.
8. H. D. Ruderman: *Two new inequalities.* Amer. Math. Monthly **59** (1952), 29—32.
9. G. Pólya — G. Szegö: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* I. 4. Aufl. Berlin, 1970.

Herschelstrasse 7 A
7 Stuttgart 80
Deutschland