PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 357 — № 380 (1971)

362. UNIVERS DES AXIOMES IMPLICATIONNELS*

*Albert Sade***

Dans un précédent travail l'auteur a montré comment toutes les thèses construites au moyen du seul opérateur *C* (implication philonienne), sur un ensemble donné d'atomes, pouvaient être déduites d'un sous-ensemble d'entre elles, *T*, par substitution et isomorphisme. Un large examen des thèses connues avait permis de voir que, dans les limites de cette prospection, une partie seulement de *T* apparaissait dans la littérature, soit sous la forme d'axiomes, soit comme thèses dans un système d'axiomes donné.

Si l'on regarde un élément quelconque de *T* comme un axiome, celui-ci définit évidemment le foncteur *C*. Mais certains éléments de *T* définissent aussi d'autres foncteurs parmi les 16 opérateurs $\Phi = A, B, C, \ldots, X$, comme cela se produit pour certains systèmes d'axiomes: [1 p. 127 et p. 129], [2] et [3].

L'objet de ce travail est de déterminer, parmi les 32 modèles auxquels se ramènent toutes les thèses implicationnelles sur les trois atomes x, y, z, ceux qui peuvent, ou non, être utilisés comme axiomes en vue de définir tel foncteur déterminé, choisi parmi le 16 opérateurs Φ.

On trouve ainsi que les seules valeurs acceptables de Φ sont *C, V, B, D, E*, et on indique quels sont les axiomes correspondants.

1. Définitions. f étant une fonction (ou formule) définie arbitrairement au moyen de tout ou partie des 16 foncteurs $A, B, \ldots, X$ de la logique bivalente, sur un ensemble donné d'atomes $\mu = \{x, y, \ldots\}$, de cardinal c, on appelle *indice de vérité* de f, le quotient du nombre, a, des points pour lesquels f est vraie par le nombre total des points sur μ;

$$\mathrm{IV} f = a/2^c.$$

Les atomes ont pour indice 1/2; l'indice d'une thèse est 1, [5, № 2]. Deux formules, f et g, sont *équivalentes*, $f \sim g$, si elles ont la même matrice, c. à d. si elles prennent la même valeur en tout point, sur μ, [5, № 9].

Deux formules, f et g, sur μ, sont *isomorphes*, $f \cong g$, si l'on passe de l'une à l'autre par permutation des atomes, [5, № 6].

Si l'on considère seulement les formules construites avec le seul foncteur C (implication philonienne), toute fonction arbitrairement définie par sa matrice ne peut pas être réalisée au moyen d'une formule implicationnelle, par exemple si son indice de vérité est inférieur à 1/2. Les fonctions représentables par de telles formules sont dites *accessibles*, [5, № 22, déf I].

Une formule, f, *couvre* une fonction, g, si f est vraie toutes les fois que g est vraie,

$$(g = 1) \Rightarrow (f = 1) \qquad [5, \text{№ } 22, \text{ déf. II}].$$

* Présenté le 1 juin 1971 par D. S. Mitrinović.

** Annoncé dans „Notices Amer. Math. Soc. 1971 (octobre)".

2. Rappel de propriétés. Dans [5], № 24, (ij), on a montré que la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit accessible est que f couvre au moins un atome. Une condition nécessaire est que IV $f \geqq 1/2$.

On a fait voir ausi, (№ 25), que l'ensemble de toutes les fonctions accessibles que l'on peut construire sur $(x, y, \ldots)$ au moyen du seul foncteur C est un groupoïde par rapport à la loi de composition C. Le groupoïde quotient, $\mathcal{G}$, défini sur celui de toutes les formules par la partition d'équivalence, a pour cardinal

$$\text{Card } \mathcal{G} = \Sigma(-1)^{u+1}\binom{c}{u} 2 \exp 2^{c-u}, \quad (u = 1, 2, \ldots, c),$$

où c est le cardinal de l'ensemble des atomes [5, № 25, equ. 24].

L'étude du système $\mathcal{G}$ a permis de dresser des tables de toutes les formules $a \Rightarrow b$, $(a, b \in \mathcal{G})$ qui sont équivalentes à un élément donné de $\mathcal{G}$ et définissent ainsi les classes d'équivalence de chacun de ces éléments. En particulier, le bloc des formules Cab dont l'indice de vérité est l'unité fournit toutes les thèses sur μ. Le nombre des thèses Cab, où a est donné, est

$$\text{Card } \mathcal{G}\, a = \text{Card } \mathcal{B}\, a_0; \quad \text{Card } a_0 = 2^c (\text{I} - \text{IV a}),$$

où a_0 est l'ensemble des points nuls de a, [5, № 28, (ijj)].

3. Univers des thèses sur (x, y, z). Pour $c = 3$, on trouve 219 tautologies. Si l'on écarte les 38 formes banales Cff, et parmi les autres, les 37 implications Cft, où t est lui-même une tautologie, il reste 144 thèses. La partition d'isomorphisme réduit le nombre des thèses distinctes, non isomorphes, à 31.

L'univers des thèses sur (x, y, z) se déduit de l'ensemble de ces 31 modèles et de la forme $Caa = t\,32$ ou aussi $t\,33 = Cat$, par application des règles suivantes: [5, № 31].

(i) De toute thèse, t, on en déduit une autre en remplaçant dans t, n'importe quelle sous-formule de t, appartenant à $\mathcal{G}$, par une formule équivalente.

(ij) De toute thèse on en déduit une autre par permutation arbitraire des atomes.

Un examen assez étendu des thèses connues a révélé qu'environ la moitié seulement des modèles sur trois atomes apparaissait dans la partie prospectée de la littérature.

4. Thèses considérés comme des axiomes. Il est clair que chacun de ces modèles, regardé comme une équation fonctionnelle, a pour solution le foncteur

$$Cxy = xy + x + 1 \qquad [4, \text{ p. } 235],$$

et que, considéré, comme un axiome, il doit définir la fonction implicationnelle philonienne. Mais certaines de ces thèses peuvent avoir, outre la solution C, une autre solution. Par exemple, soit la thèse

$$T\,5 = \Phi\Phi\Phi\, yxz\, \Phi\Phi\, yzz$$

regardée comme une équation fonctionnelle par rapport à l'opérateur inconnu Φ.

Représentant Φ par un polynôme à coefficients indéterminés, [4, p. 233, seq.], et procédant comme en [2] et [3], on trouve les trois solutions suivantes

$$\Phi_1 = Vxy = 1,$$
$$\Phi_2 = Cxy = xy + x + 1,$$
$$\Phi_3 = Bxy = xy + y + 1,$$

et ainsi, même en convenant d'éliminer par avance la solution banale et inévitable Vxy, la formule $t5$ ne peut être choisie dans un système d'axiomes, pour définir l'opérateur C, puisqu'elle définit pareillement B.

La table du № 6 donne, pour chacune des formules t, les foncteurs qui la satisfont, c. à d. les opérateurs par rapport auxquels t est une tautologie.

Les résultats ont été calculés, 1°, par résolution directe des 31 équations fonctionnelles, 2°, en dressant la table de vérité de chacune de ces 31 fonctions, relative à chacune des 16 valeurs de Φ, ($\Phi = A, B, C, \ldots, X$). Les recherches sont facilitées par la prise en considération des propriétés générales suivantes.

5. Foncteurs exclus ou soumis à conditions. (i) *Aucune formule, construite sur un seul opérateur, ne peut être tautologique si cet opérateur,* Φ, *satisfait à la condition* $\Phi\, 00 = 0$.

Preuve. Si P est le point dont toutes les coordonnées sont nulles, puisque le foncteur Φ satisfait à la relation $\Phi\, 00 = 0$, le produit de deux atomes quelconques est nul en P. Donc, en ce point P, tous les produits successifs que l'on peut effectuer depuis les atomes jusqu'à la valeur d'une formule quelconque donnée, sont nuls et la formule elle-même prend la valeur 0 au point P. Elle n'est donc pas tautologique. En conséquence,

Aucune thèse, construite sur un seul opérateur, et considérée comme un axiome, ne peut définir l'une des fonctions

$$A,\ M,\ L,\ K,\ J,\ I,\ H,\ O.$$

(ij) *Une équation fonctionnelle, avec un seul foncteur inconnu* Φ, *ne peut jamais avoir pour solution* $\Phi = F$ *ou* G.

Car, par définition de F, ($Fxy = x + 1$), la valeur d'une formule quelconque ayant x pour premier atome à gauche, est x ou $x + 1$ et par conséquent ne peut pas être identique à l'unité. L'argument est analogue pour $G\,xy = y + 1$.

(ijj) *Pour qu'une formule* $t = Xab$, *construite sur le seul opérateur* X, *soit tautologique, il faut et il suffit que ses deux composants,* a *et* b, *soient identiquement nuls;* c. à d. que ni a ni b ne puissent prendre la valeur 1.

Cela résulte de la définition de X ($X = 0$, sauf $X00 = 1$).

Chacune des t_i, dans le cas de $\mu = (x, y, z)$, contient comme composants, a ou b, l'une des 9 formules suivantes:

$$yz \cdot z; \quad yx \cdot z; \quad xz\,(yz \cdot z); \quad (x \cdot yz)\,z; \quad z;$$

$$(xz \cdot y)\,z; \quad xz; \quad yz \cdot xz; \quad x \cdot yz.$$

Or, toutes ces formules, supposées construites avec X, peuvent prendre la valeur 1 par un choix convenable des x, y, z. Ainsi, *Aucune des* t_i *n'est une thèse par rapport à* X.

(iv). *Pour que l'opérateur* E, ($Exy = 1 \leftrightarrow x = y$), *soit solution d'une équation fonctionnelle* $t = 1$, *il faut et il suffit que chaque atome apparaisse un nombre pair de fois dans* t, *c. à. d. que*:

Dans toute thèse construite avec le seul foncteur E, *chaque atome figure un nombre pair de fois et réciproquement.*

C'est une conséquence immédiate de la représentation de E sur le corps du second ordre [**4**, p. 235]

$$Exy = x + y + 1$$

et d'une remarque sur l'ordre d'une formule, f, [5, № 4], à savoir: Dans une formule, f, sur un seul foncteur, Φ, le nombre des lettres Φ s'appelle *l'ordre* de f; il est égal au nombre des atomes, distincts ou non, de f, diminué d'une unité.

Sont dans le cas de (iv) les t_i portant les numéros $i=6$, 10, 21, 24, 28, 32 et on vérifie sur la table du № 6 qu'elles admettent bien la solution E.

(v) *Si l'image dans le miroir d'une thèse en C est encore une thèse en C, alors ces deux thèses sont aussi des thèses en B et, regardées comme des équations fonctionnelles, elles admettent les solutions B et C.*

Cela résulte de la symétrie des opérateurs B et C, $Bxy=Cyx$.

EXEMPLE. $t5=(yx\cdot z)(yz\cdot z)$ a pour image dans le miroir $(z\cdot zy)(z\cdot xy)$; or $\models CCzCzyCzCxy$, donc $t5$ est aussi une thèse en B, $\models BBByxzBByzz$.

Satisfont aux conditions de (v) les t_i portant les numéros $i=5$, 9, 15, 16, 19, 22, 29, 30 et 32.

6. Table des thèses regardées comme des axiomes. La notation pour a et b est abrégée de la manière suivante: On écrit xy pour $\Phi\, xy$ et $xy\cdot z$ pour $\Phi\Phi\, xyz$; $a=f_u$ et $b=f_v$ sont les éléments de $\mathcal{G}$, de rang u et v dans la table [5], № 26. L'axiome t_i est défini par $t_i=\Phi\, ab$, a et b étant les valeurs de f_u et f_v, sur la même ligne que t_i. La sixième colonne contient la thèse t_i exprimée par rapport à C. La septième fournit les valeurs de Φ pour lesquelles $t_i=\Phi\, ab$ est une thèse.

t	f_u	u	f_v	v	$\models$	Φ
$t1$	z	0	$(x\cdot yz)\,z$	1	$CzCCxCyzz$	C, V
$t2$	z	0	$yx\cdot z$	2	$CzCCyxz$	C, V
$t3$	z	0	$yz\cdot z$	6	$CzCCyzz$	C, V
$t4$	$(x\cdot yz)\,z$	1	$yz\cdot z$	6	$CCCxCyzzCCyzz$	C, V
$t5$	$yx\cdot z$	2	$yz\cdot z$	6	$CCCyxzCCyzz$	C, V, B
$t6$	z	0	$xy\,(yx\cdot z)$	12	$CzCCxyCCyxz$	C, V, E
$t7$	$yx\cdot z$	2	$xy\,(yx\cdot z)$	12	$CCCyxzCCxyCCyxz$	C, V
$t8$	z	0	$xz\,(yz\cdot z)$	18	$CzCCxzCCyzz$	C, V
$t9$	$(x\cdot yz)\,z$	1	$xz\,(yz\cdot z)$	18	$CCCxCyzzCCxzCCyzz$	C, V, B
$t10$	$yx\cdot z$	2	$xz\,(yz\cdot z)$	18	$CCCyxzCCxzCCyzz$	C, V, E
$t11$	$yz\cdot z$	6	$xz\,(yz\cdot z)$	18	$CCCyzzCCxzCCyzz$	C, V
$t12$	$xy\,(yx\cdot z)$	12	$xz\,(yz\cdot z)$	18	$CCCxyCCyxzCCxzCCyzz$	C, V
$t13$	z	0	$(xz\cdot y)\,z$	19	$CzCCCxzyz$	C, V
$t14$	z	0	$[xy\,(yz\cdot z)]\,z$	20	$CzCCCxyCCyxzz$	$C\ V, D$
$t15$	$(x\cdot yz)\,z$	1	$[xy\,(yx\cdot z)]\,z$	20	$CCCxCyzzCCCxyCCyxzz$	C, V, B
$t16$	$(xz\cdot y)\,z$	19	$[xy\,(yx\cdot z)]\,z$	20	$CCCCxzyzCCCxyCCyxzz$	C, V, B
$t17$	z	0	xz	21	$CzCxz$	C, V
$t18$	$yx\cdot z$	2	xz	21	$CCCyxzCxz$	C, V
$t19$	$(xz\cdot y)\,z$	19	xz	21	$CCCCxzyzCxz$	C, V, B'
$t20$	z	0	$yz\cdot xz$	25	$CzCCyzCxz$	C, V
$t21$	$(x\cdot yz)\,z$	1	$yz\cdot xz$	25	$CCCxCyzzCCyzCxz$	C, V, E
$t22$	$yx\cdot z$	2	$yz\cdot xz$	25	$CCCyxzCCyzCxz$	C, V, B
$t23$	$yz\cdot z$	6	$yz\cdot xz$	25	$CCCyzzCCyzCxz$	C, V
$t24$	$(xz\cdot y)\,z$	19	$yz\cdot xz$	25	$CCCCxzyzCCyzCxz$	C, V, E
$t25$	$[xy\,(yx\cdot z)]\,z$	20	$yz\cdot xz$	25	$CCCCxyCCyxzzCCyzCxz$	C, V, D

t	f_u	u	f_v	v	$\models$	Φ
$t26$	xz	21	$yz \cdot xz$	25	$CCxzCCyzCxz$	C, V
$t27$	z	0	$x \cdot yz$	31	$CzCxCyz$	C, V
$t28$	$yx \cdot z$	2	$x \cdot yz$	31	$CCCyxzCxCyz$	C, V, E
$t29$	$xy\,(yx \cdot z)$	12	$x \cdot yz$	31	$CCCxyCCyxzCxCyz$	C, V, B
$t30$	$(xz \cdot y)\,z$	19	$x \cdot yz$	31	$CCCCxzyzCxCyz$	C, V, B
$t31$	xz	21	$x \cdot yz$	31	$CCxzCxCyz$	C, V
$t32$	a	u	a	u	Caa	C, V, B, E

RÉFÉRENCES

1. A. SADE: *Algèbre de Lukasiewicz dans la logique trivalente.* Ces Publications № **247**— —№ **273** (1969), 123-130.
2. A. SADE: *Sur le premier système de Lukasiewicz.* Archivum Math. Brno, **5**, Fasc. 4, (1969), 207-214.
3. A. SADE: *Sur les axiomes de Götlind.* Notre-Dame J. of Formal Logic, **11** (1970), 81-88.
4. A. SADE: *Morphismes sur le système des opérateurs propositionnels.* Math. Nachr. **44** (1970), 231-251.
5. A. SADE: *Indice de vérité. Fonctions implicationnelles accessibles. Recensement des thèses.* Notre-Dame J. of Formal Logic (1971).

364, Cours de la République
Pertuis (Vaucluse)
France