PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 330 — № 337 (1970)

335. EINIGE FLÄCHEN UND KURVEN DIE DEM ELLIPTISCHEN KEGEL ZUGEORDNET SIND*

Stanimir Fempl

Jedem Achsenschnitt eines geraden elliptischen Kegels (Basishalbachsen a u. b, Höhe H) kann man einen FEUERBACHkreis zuordnen der, wie bekannt, durch neun Punkte: Halbierungspunkte der Seiten, Höhenfusspunkte und Halbierungspunkte der oberen Höhenabschnitte hindurchgeht.

In dieser Arbeit bestimme ich in 1. den geometrischen Ort F sämtlicher FEUERBACHkreise, die Schnittlinien der so entstandenen Fläche mit dem Kegel, und gebe eine Genesis der einzelnen Kurven die die geometrischen Orte der erwähnten neun Punkte darstellen. In 2. wird die Komplanation des zwischen den beiden Schnittlinien liegenden Kegelteils ausgeführt. Im Resultate erscheinen elliptische Normalintegrale die sich auf Integrale I u. II Art (LEGENDREtypus) zurückführen lassen, so dass man für die Auswertung des erwähnten Flächenteils die bestehenden Tafeln für elliptische Integrale benutzen kann [1]. In 3. wird die Rektifikation der Kurve, die den geometrischen Ort der Halbierungspunkte der oberen Höhenabschnitte darstellt, ausgeführt. Im Resultat erscheint die JACOBIsche „Zeta"-funktion, deren einzelne Werte sich ebenfals in [1] befinden.

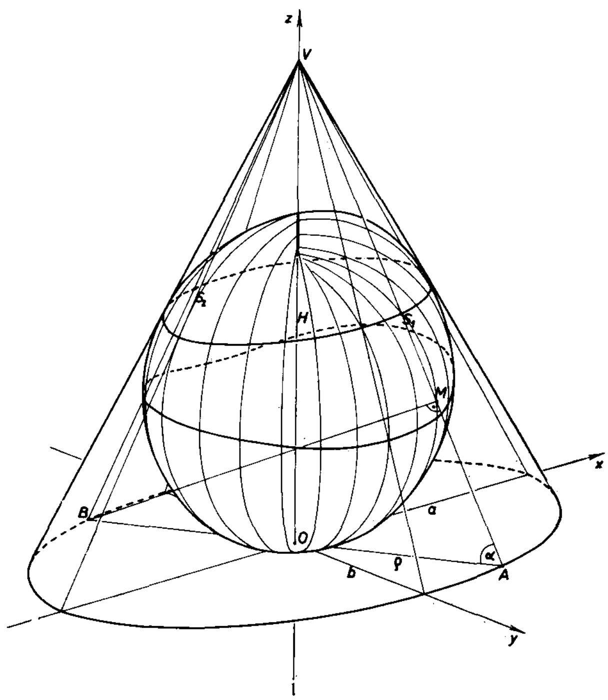

Abb. 1

* Presented June 2, 1970 by M. PRVANOVIĆ.

1. Man lege den Koordinatenursprung eines (linken) rechtwinkeligen Systems in den Basismittelpunkt, die Grundellipse in die XY-Ebene, so dass die Spitze V des Kegels in die Z-Achse fällt. Die Gleichung der Kegelfläche lautet

$$H^2(b^2x^2+a^2y^2)=a^2b^2(H-z)^2. \tag{1}$$

Wenn man das Komplement der exzentrischen Anomalie mit φ bezeichnet, so lautet die Gleichung eines beliebigen Achsenschnittes durch $A(a\sin\varphi,\ b\cos\varphi,\ 0)$, $B(-a\sin\varphi,\ -b\cos\varphi,\ 0)$, $V(0,0,H)$

$$bx-ay\operatorname{tg}\varphi=0. \tag{2}$$

Um den zugehörigen FEUERBACHkreis zu bestimmen, genügt es eine Sphäre durch drei Punkte $O(0,0,0)$, $S_1\left(\frac{a}{2}\sin\varphi,\ \frac{b}{2}\cos\varphi,\ \frac{H}{2}\right)$, $S_2\left(-\frac{a}{2}\sin\varphi,\ -\frac{b}{2}\cos\varphi,\ \frac{H}{2}\right)$ zu legen d. h.

$$x^2+y^2+z^2+\lambda\left(y-\frac{bx}{a}\operatorname{ctg}\varphi\right)-\frac{H^2+a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}{2H}z=0 \quad (\lambda \text{ beliebig}),$$

und wegen (2),

$$x^2+y^2+z^2-\frac{H^2+a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}{2H}z=0. \tag{3}$$

Die Gleichungen (2) u. (3) bestimmen dem Achsenschnitte ABV zugehörigen FEUERBACHkreis. Indem man noch φ eliminiert, erhält man den gesuchten geometrischen Ort

$$x^2+y^2+z^2-\frac{1}{2}\left[\frac{a^2b^2(x^2+y^2)}{H(b^2x^2+a^2y^2)}+H\right]z=0. \tag{4}$$

Wie man sieht, diese Fläche ist symetrisch in Bezug auf die Koordinatenebenen $x=0$ und $y=0$, und sie berührt die Ebene $z=0$ im Koordinatenanfang. Sie besitzt mit der Kegelfläche (1) noch zwei Schnittlinien. Diese Schnittlinien erhält man, indem man den Wert für $b^2x^2+a^2y^2$ aus (1) in die letzte Gleichung einsetzt. Es folgt

$$(x^2+y^2+z^2)\left[1-\frac{Hz}{2(H-z)^2}\right]=\frac{H^2z(H-2z)}{2(H-z)^2}$$

und diese Gleichung kann man in der Form

$$(H-2z)[(x^2+y^2+z^2)(2H-z)-H^2z]=0$$

schreiben. Auf diese Weise erhält man zwei Schnittlinien. Die erste — wen man noch $z=H/2$ in (1) setzt-hat die Gleichungen

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2/4, \quad z=H/2, \tag{5}$$

ist also eine Ellipse mit Halbachsen $a/2$ und $b/2$, mit dem Abstand $H/2$ vom Kegelbasis, was auch auf Grund eines einfachen geometrischen Überlegens zu ewarten war. Indessen, die zweite Linie, deren Gleichungen man in der Form

$$x^2+y^2=(H-z)^2\frac{z}{2H-z}, \quad H^2(b^2x^2+a^2y^2)=a^2b^2(H-z)^2 \tag{6}$$

schreiben kann und die eine Raumkurve darstellt, besitzt eine interessante Genesis. Nämlich, eine durch O und den beliebigen Punkt $P(x,\ 0,\ z)$ der Kurve

$$x^2 = (H-z)^2 \frac{z}{2H-z}, \qquad y = 0 \tag{7}$$

laufende Gerade schneidet die Gerade $z=H$ der Ebene $y=0$ im Punkte $A(Hx/z,\ 0,\ H)$, und man ersieht leicht dass $AB=AP$ ist, wo B den Punkt $(0, 0, H)$ darstellt. Eine solche Eigenschaft besitzt aber die Strophoide. Die erste Gleichung (6) stellt also eine Fläche dar, die durch Rotation der Strophoide (7) um die Z-Achse entstanden ist. Diese Strophoide berührt die X-Achse im Koordinatenanfang, ihr Doppelpunkt ist der Punkt $(0, 0, H)$ und ihre Asymptote ist die Gerade $z=2H$, $y=0$.

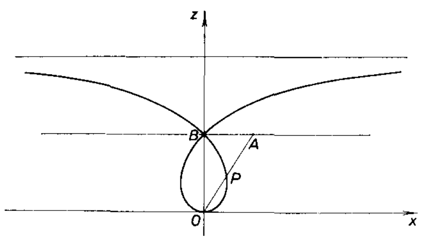

Abb. 2.

Was den geometrischen Ort der Mittelpunkte der erwähnten Höhenabschnitte anbelangt, und zwar von denjenigen Höhen die auf den Mantellinien senkrecht stehen — da ein solcher Punkt Koordinaten

$$x = \frac{a}{2} \sin\varphi, \quad y = \frac{b}{2} \cos\varphi, \quad z = \frac{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi}{2H} \tag{8}$$

besitzt — lauten die Gleichungen des geometrischen Ortes

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2/4, \qquad x^2 + y^2 = Hz/2 \tag{9}$$

d. h. die Kurve stellt den Schnitt eines elliptischen Zylinders mit einem Rotationsparaboloid (um die Z-Achse) dar. Auch diese Kurve ist keine ebene Kurve.

Schliesslich, der geometrische Ort der Mittelpunkte der Höhenabschnitte die die Kegelspitze mit dem Orthozentrum verbinden, ist eine Strecke mit den Endpunkten $\big(0, 0, (H^2+a^2)/2H\big)$ und $\big(0, 0, (H^2+b^2)/2H\big)$ die auf der Kegelhöhe liegen.

2. Um die Oberfläche des Kegelteils zwischen seinen Schnittlinien (5) und (6) mit der Fläche F zu berechnen, wird es zweckmässig sein, den Kegelmantel in die Ebene auszubreiten. Wen die kleinste Mantellinie $s_2 = \sqrt{b^2+H^2}$ in die Polarachse fällt und die Kegelspitze im Pol liegt, so ist der Polarwinkel

$$\Theta = \Pi(n, k, \varphi) = \sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}} \int_0^\varphi \frac{\sqrt{1-k^2 \sin^2\varphi}}{1+n \sin^2\varphi}\, d\varphi \tag{10}$$

was ich in einer meiner früheren Arbeit zeigte [2]; hier ist

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{R^2-s_2^2}{s_1^2-R^2} \tag{11}$$

wo R den Radiusvektor bedeutet, und $s_1 = \sqrt{a^2+H^2}$ die grösste Mantellinie. Hier ist noch

$$k = \frac{He}{as_2} \ (<1) \qquad n = \frac{e^2}{s_2^2} \qquad (e^2 = a^2 - b^2). \tag{12}$$

Für die ausgebreitete Kurve (5) besitzt Θ denselben Wert, nur ist der Radiusvektor

$r=R/2$. Indessen, für die Kurve (6) ist (Abb. 1) der Radiusvektor $r=R-\overline{AM}$, und wegen $\overline{AM}=2\varrho\cos\alpha=2\varrho^2/R$ $(\varrho^2=a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)$ ist $r=(R^2-2\varrho^2)/R$ d.h., wegen $R^2-\varrho^2=H^2$ ist $r=(H^2-\varrho^2)/\sqrt{H^2+\varrho^2}$, also

$$r=\frac{H^2-(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)}{\sqrt{H^2+a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}}, \tag{13}$$

und die Grösse Θ hat denselben Wert (10). Auf diese Weise stellen die Gleichungen (10) u. (13) parametrische Gleichungen der ausgebreiteten Kurve (6) dar.

Der Mantelteil des Kegels zwischen der Kegelspitze und Kurve (6), wegen Symetrie, ist

$$M_1=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\Omega} r^2\,d\Theta,$$

wo Ω den vierten Teil der Mantelöfnung bedeutet [2]. Da noch

$$d\Theta=\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+k^2}}\cdot\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+n\sin^2\varphi}\,d\varphi=\frac{a}{s_2}\,\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{1+n\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

$$H^2+a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi=s_2{}^2(1+n\sin^2\varphi),$$

$$H^2-(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)=2H^2-s_2{}^2(1+n\sin^2\varphi)$$

ist, so wird

$$M_1=\frac{2a}{s_2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{4H^4-4H^2s_2{}^2(1+n\sin^2\varphi)+s_2{}^4(1+n\sin^2\varphi)^2}{s_2{}^2(1+n\sin^2\varphi)^2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

d. h.

$$M_1=\frac{2a}{s_2}\left\{\frac{4H^4}{s_2{}^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{(1+n\sin^2\varphi)^2}\,d\varphi-4H^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-k^2\sin\varphi}}{1+n\sin^2\varphi}\,d\varphi+s_2{}^2E\right\}. \tag{14}$$

Das dritte Integral E ist ein vollständiges elliptisches Normalintegral II Gattung (LEGENDREtypus), das zweite integral ist $s_2\Pi(n,k,\pi/2)/a$ auf Grund (10), während sich das erste Integral in der form

$$\frac{n+k^2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\frac{k^2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{15}$$

schreiben lässt. Bezeichnet man

$$Z_\nu=\int\frac{dx}{(1+nx^2)^\nu X}\left(X=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\right),$$

so gilt die Rekursionsformel [3]

$$(2\nu-2)\alpha Z_\nu-(2\nu-3)\beta Z_{\nu-1}+(2\nu-4)\gamma Z_{\nu-2}-(2\nu-5)\delta Z_{\nu-3}$$

$$=\frac{xX}{(1+nx^2)^{\nu-1}}+\text{const.},$$

$\alpha=(n+1)(n+k^2)/n^2$, $\beta=[n(n+2)+(2n+3)k^2]/n^2$, $\gamma=[n+(n+3)k^2]/n^2$, $\delta=k^2/n^2$,

und das erwähnte erste Integral ($\sin\varphi=x$) erscheint in der Form

$$(n+k^2)Z_2/n-k^2Z_1/n,$$

wenn man noch die Integralgrenzen in Betracht nimmt. Nach dieser Formel erhält man für $\nu=2$ den Wert

$$Z_2=\frac{1}{2\alpha}(\beta Z_1-\delta Z_{-1})$$

und die Grösse Z_1 stellt ein vollständiges elliptisches Normalintegral III Gattung dar (LEGENDREtypus), dass man mit Π_0 bezeichnet. Die Grösse Z_{-1} hat den Wert

$$Z_{-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+n\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi=\frac{n+k^2}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}-\frac{n}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi.$$

Da noch das zweite Integral rechts von Z_{-1} ein vollständiges elliptisches Normalintegral I Gatuung darstellt und dass man mit K bezeichnet, so ist $Z_{-1}=(n+k^2)K/k^2-nE/k^2$ so dass auf Grund (12),

$$Z_2=\frac{s_1^2+s_2^2+H^2}{2s_1^2}\Pi_0+\frac{a^2s_2^2}{2s_1^4}E-\frac{s_2^2}{2s_1^2}K$$

ist. Weiterhin ist $\mathit{Л}(n,k,\pi/2)=\mathit{Л}_0$ in der Form

(16) $$\mathit{Л}_0=\frac{1}{as_2}(s_1^2\Pi_0-H^2K)$$

ausdrückbar, was man leicht ersieht. Demnach erhält man mit Rücksicht auf (15) für (14) den Wert

$$M_1=\frac{4H^4}{as_2}K+\frac{2a}{s_2}\left(s_2^2+\frac{2H^4}{s_1^2}\right)E-\frac{4H^2}{as_2}\left(s_1^2+\frac{a^2b^2}{s_2^2}\right)\Pi_0.$$

Die Mantelfläche des Kegels ist [4]: $M_2=2a\sqrt{b^2+H^2}E=2as_2E$ und die Mantelfläche zweischen der Kurve (5) und Kegelspitze ist $as_2E/2$. Deshalb ist die Oberfläche des Kegelteils zwischen den Kurven (5) u. (6): $M=M_1-M_2$ d. h.

(17) $$M=\frac{4H^4}{as_2}K+\frac{a}{2s_2}\left(3s_2^2+\frac{8H^4}{s_1^2}\right)E-\frac{4H^2}{as_2}\left(s_1^2+\frac{a^2b^2}{s_2^2}\right)\Pi_0.$$

Das vollständige Integral Π_0 dritter Gattung kann man auf vollständige und unvollständige Integrale I u. II Gatuung reduzieren. In meiner Arbeit [2] zeigte ich dass die Funktion $\mathit{\Pi}_0$ durch eine lineäre Kombination von vollständigen und unvollständigen elliptischen Normalintegralen I u. II. Gattung ausdruckbar ist, nämlich

$$\mathit{\Pi}_0 = EF(k',\psi) + KE(k',\psi) - KF(k',\psi), \tag{18}$$

wo die unvollständige Integrale $F(k',\psi)$ und $E(k',\psi)$ einen komplementären Modul $k' = \sqrt{1-k^2}$ besitzen, und deren Amplitude ψ sich durch $\operatorname{tg}\psi = \sqrt{n/k}$ ausdrücken lässt. Wenn man noch Π_0 auf Grund (16) mittels $\mathit{\Pi}_0$ ausdrückt und den erhaltenen Wert in (17) einträgt, so gelangt man zum Wert für den Mantelteil M:

$$M = \frac{a}{2s_2}\left(3s_2^{\,2} + \frac{8H^4}{s_1^{\,2}}\right)E - \frac{4H^4ab^2}{s_1^{\,2}s_2^{\,3}}K - 4H^2\left(1 + \frac{a^2b^2}{s_1^{\,2}s_2^{\,2}}\right)\mathit{\Pi}_0. \tag{19}$$

Dabei ist der Modul k mit (12) gegeben, während die Amplitude ψ in (18) den Wert

$$\psi = \operatorname{arctg}(a/H) \tag{20}$$

besitzt, d.h. sie stellt den Komplement des Neigungswinkels der grössten Mantellinie gegen die Grundfläche des Kegels.

Beispielsweise sei $a=6$, $b=4$, $H=10$. Nach der Berechnung ergibt sich $M \approx 21{,}30$.

3. Der Umfang der Kurve (9) ist, auf Grund (8),

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{H^2(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi) + 4e^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{4H^2}}\,d\varphi.$$

Dieses hyperelliptische Integral führt gleich auf ein elliptisches auf Grund der Substitution $\sin^2\varphi = t$. Es folgt

$$s = \frac{1}{H}\int_0^1 \sqrt{\frac{-4e^4t^2 + (4e^2 - H^2)e^2t + H^2a^2}{(1-t)t}}\,dt = \frac{2e^2}{H}\int_0^1 \sqrt{\frac{(t_1-t)(t-t_2)}{(1-t)t}}\,dt \tag{21}$$

wo

$$t_{1,2} = \frac{1}{8e^2}\left[4e^2 - H^2 \pm \sqrt{16e^4 + 8H^2(a^2+b^2) + H^4}\,\right],$$

und man ersieht dass $t_1 > 1$, $t_2 < 0$.

In den bekannten Tafeln von Byrd und Friedman [**1**, S. 113] findet man

$$\int_c^y \sqrt{\frac{(a-t)(t-d)}{(b-t)(t-c)}}\,dt = (c-d)(a-c)g\int_0^{u_1} \frac{\mathrm{dn}^2 u\,du}{(1-\alpha^2\,\mathrm{sn}^2 u)^2} \tag{22}$$

unter Voraussetzung

$$(23)\quad \begin{cases} a>b\geqq y>c>d, & \operatorname{sn}^2u=\dfrac{(b-d)(t-c)}{(b-c)(t-d)},\quad k^2=\dfrac{(b-c)(a-d)}{(a-c)(b-d)}, \\ g=\dfrac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} & 0<\alpha^2=\dfrac{b-c}{b-d}<k^2,\quad \varphi=\operatorname{am}u_1=\sin^{-1}\sqrt{\dfrac{(b-d)(y-c)}{(b-c)(y-d)}}, \\ & \operatorname{sn}u_1=\sin\varphi. \end{cases}$$

Alle diese Bedingungen erfüllen die Grössen in (21) wenn man nur $a=t_1$, $b=1$, $c=0$, $d=t_2$, $y=1$ annimmt. Es ist noch [**1**, S. 218]

$$(24)\quad \int_0^{u_1} \frac{\operatorname{dn}^2u\,du}{(1-\alpha^2\operatorname{sn}^2u)^2}=-\frac{1}{2\alpha^2(\alpha^2-1)}\left[\alpha^2E(u)+(k^2-\alpha^2)u+(2\alpha^2-\alpha^4-k^2)\Pi(u,\alpha^2)-\frac{\alpha^4\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u}{1-\alpha^2\operatorname{sn}^2u}\right]_0^{u_1},$$

Da im Falle (21) die Grösse φ den Wert $\pi/2$ besitzt, so erhält man wegen $\operatorname{am}u_1=\pi/2$ für die Grösse u_1 den Wert K. Für die untere Itegrationsgrenze $u=0$ ist $E(0)=0$, $\Pi(0,\alpha^2)=0$, $\operatorname{sn}0=0$. Da noch für die obere grenze $\operatorname{cn}u_1=0$ ist, werden die Integrale in (24) Normalintegrale E, K, Π_0 und das letzte Gleid in (24) fällt ab. So gelangt man zur Formel

$$(25)\quad \int_0^{u_1} \frac{\operatorname{dn}^2u\,du}{(1-\alpha^2\operatorname{sn}^2u)^2}=-\frac{1}{2\alpha^2(\alpha^2-1)}[\alpha^2E+(k^2-\alpha^2)K+(2\alpha^2-\alpha^4-k^2)\Pi_0].$$

Für das Integral $\Pi_0=\Pi(\pi/2,\alpha^2,k)$ gilt [**1**, S. 229]

$$(26)\quad \Pi_0=K+\frac{\alpha KZ(\beta,k)}{\sqrt{(1-\alpha^2)(k^2-\alpha^2)}}\quad\left(\sin\beta=\frac{\alpha}{k}\right)$$

unter der Bedingung $0<\alpha^2<k^2$, die im Fall (21) erfüllt ist. Die Grösse $Z(\beta,k)$ ist die JACOBIsche „Zetafunktion", für sie gilt [**1**, S. 229]

$$(27)\quad KZ(\beta,k)=KE(\beta,k)-EF(\beta,k),$$

und die einzelne numerische Werte für $KZ(\beta,k)$ befinden sich in den Tafeln [**1**].

Nach Einsetzung $a=t_1$, $b=1$, $y=1$, $c=0$, $d=t_2$ in (22) bis (27) gelangt man zur Umfangsformel

$$s=\frac{\sqrt{A+B}}{2}\left(E+\frac{A-B}{2b^2H^2}K\right)-\frac{H}{2}KZ(\beta,k),$$

wo

$$A=4e^4+H^2(a^2+b^2),\qquad B=e^2\sqrt{16e^4+8H^2(a^2+b^2)+H^4}$$

ist, und wo

$$\sin\beta=\sqrt{\frac{1}{2}\left[1+\frac{(4e^2-H^2)}{B}e^2\right]},\qquad k^2=\frac{B(A-B)}{2a^2b^2H^4}$$

bedeutet.

Für den Fall $a=6$, $b=4$, $H=10$, ergibt sich $s\approx 18{,}62$.

LITERATUR

1. P. BYRD and M. FRIEDMAN: *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists.* Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.

2. S. FEMPL: *O jednom tipu eliptičkog integrala III vrste i o njegovim primenama.* Zbornik radova Matematičkog instituta SAN knj. 7, 1959, S. 107-120.

3. SERRET-SCHEFFERS: *Lehrbuch der Differential-und Integralrechnung,* II. Leipzig-Berlin 1921.

3. D. S. MITRINOVIĆ, D. Ž. ĐOKOVIĆ: *Specijalne funkcije.* Beograd 1964.

Katedra za matematiku
Elektrotehnički fakultet
Beograd, Jugoslavija