PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 320 — № 328 (1970)

324. SUR LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS PARABOLIQUES*

Jovan D. Kečkić

1. Dans le cas où les coefficients de l'équation parabolique

(1) $$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+2du_x+2eu_y+fu=0 \qquad (ac=b^2)$$

satisfont à la condition

(2) $$b\left(2d-a_x-\frac{b}{a}a_y\right)=a\left(2e-b_x-\frac{b}{a}b_y\right)$$

la détermination de la solution générale de (1) se ramène à l'intégration d'une équation différentielle ordinaire [**1**].

Ce fait n'était pas considéré comme important, étant donné qu'on n'a pas attribué un intérêt suffisant aux solutions générales des équations aux dérivées partielles. D'ailleurs, J. HADAMARD [**2**] a dit: "... dans l' étude des équations aux dérivées partielles, plus encore que dans celle des équations différentielles ordinaires, on doit cesser de rechercher, comme le voulait l'Analyse classique, l'*intégrale générale*, c'est-à-dire une expression satisfaisant forcément à l'équation donnée E et susceptible, grâce aux éléments arbitraires qu'elle contient (constantes ou fonctions), de représenter n'importe quelle solution de cette équation." C'est pourquoi des mathématiciens ont donné des procédés particuliers fournissant des solutions aux limites des équations aux dérivées partielles, sans développer une théorie générale.

2. Cependant, contrairement à ladite opinion de HADAMARD, nous avons obtenu un procédé fournissant une solution detérminée au sens de HADAMARD en partant de la solution générale. En fait, dans cette Note nous allons montrer comment on peut obtenir, à partir de la solution générale de l'équation (1) suivie de (2), la solution du problème de CAUCHY, vérifiant les coditions supplémentaires

(3) $$u(x,h(x))=\alpha(x), \qquad u_y(x,h(x))=\beta(x),$$

où h, α, β sont des fonctions données.

* Présenté le 17 juin 1970. par D. S. MITRINOVIĆ.

Toute équation parabolique (1), suivie de la condition (2), peut être écrite sous la forme suivante

$$A_2 u + m(x, y)\, Au + n(x, y)u = 0, \tag{4}$$

où

$$Au = f(x, y)u_x + g(x, y)u_y, \qquad A_2 u = A(Au).$$

Soit $p(x, y)$ une fonction non identique à une constante telle que $Ap = 0$, et $q(x, y)$ une fonction telle que $Aq = 1$. Alors $p_x q_y - p_y q_x$ n'est pas identiquement nulle, et on peut prendre p et q comme variables indépendantes. Cela étant, $u(x, y)$ devient une fonction $\eta(p, q)$ et on démontre que $\frac{\partial\eta}{\partial q} = Au, \frac{\partial^2\eta}{\partial q^2} = A_2 u$.

Posons

$$m(x, y) = K(p, q), \qquad n(x, y) = H(p, q),$$

et l'équation (4) devient alors

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial q^2} + K(p, q)\frac{\partial\eta}{\partial q} + H(p, q)\eta = 0, \tag{5}$$

ce qui est une équation différentielle ordinaire avec un paramètre p.

Soient $f_1(p, q)$ et $f_2(p, q)$ deux solutions linéairement indépendantes. La solution générale de (5) est

$$C_1(p) f_1(p, q) + C_2(p) f_2(p, q)$$

où C_1 et C_2 désignent des fonctions arbitraires.

Soit h une fonction donnée, et supposons que $p(x, h(x)) \equiv r(x)$ ait la fonction inverse r^{-1} (ce qui signifie à la fois que $r'(x) \not\equiv 0$, et que la ligne $y = h(x)$ n'est pas caractéristique de l'équation aux dérivées partielles donnée (5)).

Posons

$$t = r(x), \qquad x = r^{-1}(t), \qquad \alpha(r^{-1}(t)) = \alpha_1(t)$$

$$q(r^{-1}(t),\ h(r^{-1}(t))) = F(t)$$

$$Au = \frac{\partial\eta}{\partial q} = T(x) = T\big(r^{-1}(t)\big) = G(t), \tag{6}$$

où T est une fonction indéterminée pour le moment.

Les expressions suivantes

$$\varphi(p,q) = \frac{f_1(p, F(p)) f_2(p, q) - f_2(p, F(p)) f_1(p, q)}{f_1(p, F(p)) f_2'(p, F(p)) - f_2(p, F(p)) f_1'(p, F(p))},$$

$$\psi(p,q) = \frac{f_2'(p, F(p)) f_1(p, q) - f_1'(p, F(p)) f_2(p, q)}{f_1(p, F(p)) f_2'(p, F(p)) - f_2((p, F(p)) f_1'(p, F(p))}$$

sont chacune une solution de l'équation de (5). De plus, nous avons

$$\varphi(p, F(p)) = 0, \quad \psi(p, F(p)) = 1,$$

$$\varphi_q(p, F(p)) = 1, \quad \psi_q(p, F(p)) = 0.$$

Donc,

$$G(p)\,\varphi(p,q) + \alpha_1(p)\,\psi(p,q) \tag{7}$$

est la solution de (5) qui pour $q = F(p)$ se réduit à $\alpha_1(p)$, tandis que sa dériveé par rapport à q se réduit à $G(p)$.

Déterminons à présent la fonction G, c'est-à-dire T, afin que la solution (7) soit la solution du problème de CAUCHY donné. Nous avons

$$u(x, h(x)) = \alpha(x), \quad u_y(x, h(x)) = \beta(x).$$

A partir de ce système nous obtenons

$$u_x + h' u_y = \alpha', \quad f u_x + g u_y = T,$$

c'est-à-dire

$$T(x) = \big(g(x, h(x)) - f(x, h(x))\,h'(x)\big)\beta(x) + f(x, h(x))\,\alpha'(x). \tag{8}$$

Par conséquent, la solution (7), où G est déterminé par (8) et (6), et α_1, φ, ψ dans ce qui précède, présente la solution du problème de CAUCHY proposé plus haut.

EXEMPLE. En posant $f(x,y) \equiv x$, $g(x,y) \equiv y$, nous obtenons l'équation de BERTRAND [3] que voici:

$$x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + x u_x + y u_y = n^2 u \qquad (n = \text{const.}) \tag{9}$$

Sa solution générale est

$$C_1\left(\frac{x}{y}\right) x^n + C_2\left(\frac{x}{y}\right) x^{-n},$$

où C_1, C_2 sont des fonctions arbitraires.

On est tout naturelement amené à poser $p(x,y) = \frac{x}{y}$, $q(x,y) = \log x$. Alors nous avons $t = \frac{x}{h(x)}$, $\log x = F\left(\frac{x}{h(x)}\right)$, sous la condition que $\frac{x}{h(x)}$ ne se réduise pas à une constante. Nous avons

$$u(x, h(x)) = \alpha(x) = \alpha_1(t)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial q} = (h - xh')\,\beta(x) + x\alpha'(x) = G(t).$$

Par exemple, nous pouvons poser $h(x) = x^2$, $\alpha(x) = x^3$ et $\beta(x) = x^2$. Alors $r(x) = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{t}$, et $\frac{\partial \eta}{\partial q} = 3x^3 - x^4$, c'est-à-dire $G(t) = \frac{3}{t^3} - \frac{1}{t^4}$, et la solution cherchée en p, q est

$$\frac{1}{n}\left(\frac{3}{p^3} - \frac{1}{p^4}\right) \operatorname{sh} n(q + \log p) + \frac{1}{p^3} \operatorname{ch} n(q + \log p),$$

et en posant $p=\frac{x}{y}$, $q=\log x$, nous trouvons que

$$u(x,y)=\frac{1}{2n}\left(\left[(n+3)\frac{x}{y}-1\right]\left(\frac{x}{y}\right)^{n-4}x^{n}+\left[(n-3)\frac{x}{y}+1\right]\left(\frac{x}{y}\right)^{-n-4}x^{-n}\right)$$

est la solution de l'équation (9) satisfaisant aux conditions

$$u(x,x^2)=x^3, \quad u_y(x,x^2)+x^2.$$

* * *

Je suis redevable à M. M. Janet qui a eu la bonté de lire cette Note dans sa première rédaction et de m'avoir donné des observations grâce auxquelles le texte final est considérablemenet amélioré.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Riquier: *Sur la recherche des cas d'intégrabilité complète ou incomplète de l'équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.* Bull. Soc. Math. France **56** (1928), 174—214.

2. J. Hadamard: *Divers types de conditions définies et d'équations aux dérivées partielles.* Encyclopédie Française, troisième partie: La Mathématique, Paris 1937, p. 1·82-1.

3. J. Bertrand: *Traité de Calcul Différentiel.* Paris 1864, p. 223.

Katedra za matematiku
Elektrotehnički fakultet
Beograd, Jugoslavija.