PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 302 — № 319 (1970)

310. ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ m-ЗНАЧНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ*

Живко Тошич

В работе рассматриваются аналитические представления многозначных логических функций с помощью функций суммы и произведения по модулю m, постоянных функций и функций одного переменного, как для случая, когда m простое число, так и для случая, когда m составное число. При доказательствах используются стандартные алгебраические методы, особенно теория матриц.

Рассматриваются аналитические представления m-значных логических функций с помощью функционально полной системы функций, содержащей функции суммы и произведения по модулю m. В случае, когда m простое число, эти функции используются в теории кодирования [1], а также их можно использовать при синтезе m-значных логических функций, так как функции суммы и произведения по модулю m вместе с константами $0, 1, \ldots, m-1$ образуют функционально полную систему функций. В случае, когда m составное число, эта система не является функционально полной.

В статье показана возможность дополнения этой системы до функционально полной добавлением некоторого числа функций одной переменной. При этом полиномиальным представлением будем называть сумму произведений функций одной переменной $h_j(x)$. Сумма и произведение берутся по модулю m.

Эта работа представлят собой продолжение работы [6] (смотрите и [2]). В ней для аналитических представлений используются матричные выражения. При этом все операции с матрицами производятся в кольце наименьших неотрицательных вычетов по модулю m, и по обычним правилам линейной алгебры.

Рассмотрим множество $E_m=\{0, 1, \ldots, m-1\}$. Элементы Декартова произведения $E_m{}^n=E_m \times E_m \times \cdots \times E_m$ будем обозначать вектором

$$X=(x_1, x_2, \ldots, x_n). \tag{1}$$

Упорядоченный набор значений вектора X будем обозначать вектором $T=(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

---

* Представлено 25. II 1970 В. Девидеом.

Функцию, определенную на множестве E_m и принимающую значения из множества E_m, будем называть m-значной логической функцией. Значение функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на наборе $T=(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ будем обозначать следующим образом: $f(T)$ или $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Если переменная x_i принимает значение t_i, будем пользоваться обозначением

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \text{ или } f(x_i=t_i).$$

Система m-значных функций называется функционально полной, если все функции n переменных могут быть представлены суперпозицией функций этой системы. Мы будем рассматривать так называемую ослабленную функциональную полноту, когда в функционально полную систему функций входят и константы $0, 1, \ldots, m-1$, так как при технической реализации они всегда имеются в распоряжении.

Рассмотрим в m-значной логике все функции одной переменной, заданные своими значениями $f(0), f(1), \ldots, f(m-1)$. Пусть задано множество, которое состоит из функций $h_0(x), h_1(x), \ldots, h_{m-1}(x)$. Это множество будем характеризовать следующей матрицей

$$L=\left\|\begin{matrix} h_0(0) & h_1(0) & \cdots & h_{m-1}(0) \\ h_0(1) & h_1(1) & & h_{m-1}(1) \\ \vdots & & & \\ h_0(m-1) & h_1(m-1) & & h_{m-1}(m-1) \end{matrix}\right\|. \tag{2}$$

Найдем условие, которому должны удовлетворять функции $h_j(x)$ $(j=0, 1, \ldots, m-1)$, для того, чтобы любую функцию одной переменной можно было представить следующим образом

$$f(x)=\sum_{j=0}^{m-1} b_j h_j(x) \tag{3}$$

где b_j $(j=0, 1, \ldots, m-1)$ представляют собой целочисленные коэффициенты, принимающие значения из множества E_m. Умножение и сложение производятся в кольце вычетов по модулю m.

Введем следующие обозначения (знаком * будем обозначать транспонирование вектора или матрицы):

$$B^*=\| b_0, b_1, \ldots, b_{m-1} \|,$$
$$H=\| h_0(x), h_1(x), \ldots, h_{m-1}(x) \|.$$

Тогда выражение (3) можно представить в матричном виде следующим образом

$$f(x)=HB. \tag{4}$$

Подстановкой значений x в (3) получим следующую систему сравнений

$$f(k)=\sum_{j=0}^{m-1} b_j h_j(k) \qquad (k=0, 1, \ldots, m-1). \tag{5}$$

Если обозначить $F^*=\| f(0), f(1), \ldots, f(m-1) \|$, то систему (5) можно представить в матричном виде следующим образом

$$F=LB. \tag{6}$$

Уравнение (6) будет иметь однозначное решение по B в том случае, если матрица L имеет обратную матрицу. Условием существования обратной матрицы является (смотрите [7])

(7) $$(D, m) = 1$$

где $D = \det L$.

Обозначим $L^{-1} = W$. Теперь на основании (6) будет

(8) $$B = L^{-1} F = WF.$$

Подставляя это значение в (4) получим

(9) $$f(x) = HL^{-1} F = HWF.$$

Таким образом получаем однозначное представление любой функции одной переменной с помощью множенства из m функций одной переменной, которые должны удовлетворять условию (7), констант $0, 1, \ldots, m-1$ и операций суммы и произведения по модулю m. Ниже докажем, что эта система функций яавляется функционально полной в m-значной логике.

Элементы вектора B в (8) соответствуют производным m-значных функций [6] для случая $q = 0$. Название „производная логической функции" идет от Акерса [8]. Этот же автор для полиномиальных представлений исполь- зует термин „разложение в ряд" так как эти представления похожи на разложения в ряды Маклорена и Тейлора.

Рассмотрим теперь возможность представления функций одной переменной в следущем виде

(10) $$f(x) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j h_j (x+q) \qquad (q \in E_m).$$

Если обозначим $H_q = \| h_0 (x+q), \quad h_1 (x+q), \ldots, h_{m-1} (x+q) \|$, $C^* = \| c_0, c_1, \ldots, c_{m-1} \|$, тогда выражение (10) можно представить в матричном виде следующим образом

(11) $$f(x) = H_q C.$$

Подстановкой значений x в (10) получим следующую систему сравнений

(12) $$f(k) = \sum_{j=0}^{m-1} c_j h_j (k+q) \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Это выражение представим в матричном виде следующим образом

(13) $$F = L_q C$$

где матрица L_q получена из матрицы L циклическим сдвигом всех строк на q мест вверх.

Систему (12) можно представить ещё следующим образом

$$(14)\qquad f(m-q+k)=\sum_{j=0}^{m-1} c_j h_j(k) \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1)$$

или, в матричром виде

$$(15)\qquad F_q=LC$$

где $F_q^*=\|f(m-q),\ f(m-q+1),\ \ldots,\ f(m-q-1)\|$.

Вектор F_q получен циклическим сдвигом значений заданной функции на q мест вниз.

Если (13) и (15) подставить в (11) получим

$$(16)\qquad f(x)=H_qW_qF,$$

$$(17)\qquad f(x)=H_qWF_q.$$

Матрица W_q является обратной к матрице L_q. На основании правил получения обратной матрицы следует, что матрицу W_q можно получить из матрицы W циклическим сдвигом столбцов на q мест влево. Так как матрица L_q получается из матрицы L перестановкой строк то её определитель будет удовлетворять условию (7) (смотрите [9]).

Напомним, что кроме хорошо известных правил определения обратной матрицы, можно воспользоватся и специальными методами, рассмотренными в [**10**].

Рассмотрим теперь матричные представления полиномиальных форм для любой функции n переменных.

Введем следующие обозначения:

$$H_i(q_i)=\|h_0(x_i+q_i),\ h_1(x_i+q_i),\ \ldots,\ h_{m-1}(x_i+q_i)\|,$$

$$H_{i,j}(q_i,\ q_j)=\|h_0(x_j+q_j)\,H_i(q_i),\ h_1(x_j+q_j)\,H_i(q_i),\ \ldots,\ h_{m-1}(x_j+q_j)\,H_i(q_i)\|,$$

$$\begin{aligned}H_{i,\ldots,j,k}(q_i,\ \ldots,\ q_j,\ q_k)=\|&h_0(x_k+q_k)\,H_{i,\ldots,j}(q_i,\ \ldots,\ q_j),\\ &h_1(x_k+q_k)\,H_{i,\ldots,j}(q_i,\ \ldots,\ q_j),\ \ldots,\\ &h_{m-1}(x_k+q_k)\,H_{i,\ldots,j}(q_i,\ \ldots,\ q_j)\|,\end{aligned}$$

$$F_i^*(q_i)=\|f(x_i=m-q_i),\ f(x_i=m-q_i+1),\ \ldots,\ f(x_i=m-q_i-1)\|,$$

$$\begin{aligned}&F_{i,j}^*(q_i,\ q_j)\\ &=\|F_i^*(q_i;\ x_j=m-q_j),\ F_i^*(q_i;\ x_j=m-q_j+1),\ \ldots,\ F_i^*(q_i;\ x_j=m-q_j-1)\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{i,\ldots,j,k}^*(q_i,\ \ldots,\ q_j,\ q_k)=\|&F_{i,\ldots,j}^*(q_i,\ \ldots,\ q_j;\ x_k=m-q_k),\\ &F_{i,\ldots,j}^*(q_i,\ \ldots,\ q_j;\ x_k=m-q_k+1),\ \ldots,\\ &F_{i,\ldots,j}^*(q_i,\ \ldots,\ q_j;\ x_k=m-q_k-1)\|\end{aligned}$$

$$W_i(q_i)=\begin{Vmatrix} w_{0,q_i} & w_{0,q_i+1} & \cdots & w_{0,q_i+m-1} \\ w_{1,q_i} & w_{1,q_i+1} & & w_{1,q_i+m-1} \\ \vdots & & & \\ w_{m-1,q_i} & w_{m-1,q_i+1} & & w_{m-1,q_i+m-1} \end{Vmatrix}$$

$$W_{i,j}(q_i, q_j)=W_i(q_i)\otimes W_j(q_j). \tag{18}$$

причем $F_i^*(q_i; x_j=r)$ означает, что во всех элементах вектора $F_i^*(q_i)$ переменная x_j заменяется константой r.

В формуле (18) через $\otimes$ обозначено тензорное (Кронекеровское) произведение двух матриц [**11**]. Для матриц $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ Кронекеровским произведением будет матрица равная: $C=(a_{ij}B)$. Напомним, что для Кронекеровского произведения матриц имеет место ассоциативный закон, и что обратная матрица Кронекеровского произведения равна Кронекеровскому произведению обратных матриц (при условии, что эти матрицы существуют).

Пусть задана какая-нибудь функция n переменных своей таблицей истинности, или своим аналитическим выражением в какой-нибудь функционально полной системе функций.

Повторение такой же процедуры как и для функций одной переменной получим следующий результат

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)=H_i(q_i)\, W(q_i)\, F_i(0), \tag{19}$$

$$f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)=H_i(q_i)\, W_i(0)\, F_i(q_i). \tag{20}$$

Эти выражения будем называть формулами разложения функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по функциям $h_j(x_i)$ $(j=0, 1, \ldots, m-1)$ и переменной x_i.

На основании (19) и (20) методом полной математической индукции доказывается следующее предложение:

Любая m-значная функция n переменных может быть представлена следующим образом

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) &= H_{1,2,\ldots,i}(w_1, q_2, \ldots, q_i)\, W_{1,2,\ldots,i}(q_1, q_2, \ldots, q_i) \\ &\quad \times F_{1,2,\ldots,i}(0, 0, \ldots, 0) \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) &= H_{1,2,\ldots,i}(q_1, q_2, \ldots, q_i)\, W_{1,2,\ldots,i}(0, 0, \ldots, 0) \\ &\quad \times F_{1,2,\ldots,i}(q_1, q_2, \ldots, q_i). \end{aligned} \tag{22}$$

Эти выражения при $i=n$ представляют собой аналитические выражения для любой функции n переменных. Это линейные полиномы по функциям $h_j(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. У. Питерсон: *Коды, исправяющие ошибки.* Москва, 1964.
2. Д. А. Поспелов: *Логические методы анализа и синтеза схем*, издание 2-е. Москва 1968.
3. M. J. Gazale: *Les structures de communication à m valeurs et les calculatrices numériques.* Paris, 1959.
4. Гр. К. Моисил: *Алгебраическая теория дискретных автоматических устройств.* Москва, 1963.
5. O. Lowenschuss: *Non-binary switching theory.* IRE Nat. Conv. Record, **6** (1958), № 4, 305—317.
6. Д. А. Поспелов, Ж. Тошич: *Полиномиальные представления в многозначных логиках.* Сб. „Многозначные элементы и структуры", Москва, 1967 стр. 115—121.
7. Л. Я. Окунев: *Краткий курс теории чисел.* Москва, 1956.
8. S. B. Akers: *On a theory of Boolean functions.* J. Soc. Ind. and Appl. Math. **7** (1959) № 4, 487—498.
9. D. S. Mitrinović, D. Ž. Đoković: *Polinomi i matrice*, Beograd, 1966.
10. М. Стоякович: *Обращение матриц, встречающихся в теории синтеза релейно-контактных схем.* Журнал выч. матем. и математической физики **6** (1966) № 1, 158—160.
11. А. П. Мишин, И. В. Проскуряков: *Высшая алгебра (линейная алгебра, многочлены, общая алгебра).* Москва, 1962.

Univerzitet u Nišu
Elektronski fakultet
Niš, Jugoslavija