PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 274 — № 301 (1969)

282. GÉNÉRALISATION D'UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE*

Petar M. Vasić et *Radovan R. Janić*

0. Dans l'article [1] D. Ž. Đoković a considéré l'équation fonctionnelle

$$f(x_1+x_2,\, x_3)+f(x_2+x_3,\, x_1)+f(x_3+x_1,\, x_2)=0 \tag{1}$$

et il a obtenu sa solution générale continue réelle.

Plus tard, O. Em. Gheorghiu [2] a trouvé la solution générale continue réelle de l'équation fonctionnelle plus générale:

$$\begin{aligned} &f(x_1+x_2,\, x_3)+f(x_2+x_3,\, x_1)+f(x_3+x_1,\, x_2) \\ &\qquad =\alpha f(x_1+x_2,\, x_3)f(x_2+x_3,\, x_1)f(x_3+x_1,\, x_2), \end{aligned} \tag{2}$$

où α est une constante réelle donnée.

Dans [3] D. Ž. Đoković, R. Ž. Đorđević et P. M. Vasić ont résolu, entre autres, l'équation fonctionnelle

$$f_1(ax_1+x_2,\, x_3)+f_2(ax_2+x_3,\, x_1)+f_3(ax_3+x_1,\, x_2)=0 \tag{3}$$

sous la supposition que f_i $(i=1, 2, 3)$ sont des fonctions complexes continues et a une constante complexe donnée.

1. Tout d'abord, nous allons considérer l'équation fonctionnelle

$$\begin{aligned} &f_1(ax_1+bx_2,\, cx_3)+f_2(ax_2+bx_3,\, cx_1)+f_3(ax_3+bx_1,\, cx_2) \\ &\qquad =\alpha f_1(ax_1+bx_2,\, cx_3)\, f_2(ax_2+bx_3,\, cx_1)\, f_3(ax_3+bx_1,\, cx_2) \end{aligned} \tag{4}$$

où $f_i\,(i=1, 2, 3)$ sont des fonctions complexes et a, b, c, α des contantes complexes telles que $a^3=1$, $b^3=1$.

En posant

$$x_1=x+\frac{z}{3}, \qquad x_2=ab^2\left(y+\frac{z}{3}\right), \qquad x_3=ab^2\left(-x-y+\frac{z}{3}\right),$$

* Reçu le 1 août 1969.

l'équation fonctionnelle (4) devient

$$(5)\quad f_1\left(a\left(x+y+\frac{2z}{3}\right),\ a^2bc\left(-x-y+\frac{z}{3}\right)\right)+f_2\left(a^2b^2\left(\frac{2z}{3}-x\right),\ c\left(\frac{z}{3}+x\right)\right)$$

$$+f_3\left(b\left(\frac{2z}{3}-y\right),\ ab^2c\left(y+\frac{z}{3}\right)\right)$$

$$=\alpha f_1\left(a\left(x+y+\frac{2z}{3}\right),\ a^2bc\left(-x-y+\frac{z}{3}\right)\right)f_2\left(a^2b^2\left(\frac{2z}{3}-x\right),\ c\left(\frac{z}{3}+x\right)\right)$$

$$\times f_3\left(b\left(\frac{2z}{3}-y\right),\ ab^2c\left(y+\frac{z}{3}\right)\right).$$

En introduisant les nouvelles fonctions g_1, g_2, g_3 avec les formules

$$(6)\quad \begin{aligned} f_1(ax,\ a^2bcy)&=\frac{1}{\sqrt{-\alpha}}\,g_1\left(\frac{x-2y}{3},\ x+y\right)\ \Leftrightarrow\\ g_1(x,\ y)&=\sqrt{-\alpha}\,f_1\left(a\left(\frac{2y}{3}+x\right),\ a^2bc\left(\frac{y}{3}-x\right)\right),\\ f_2(a^2b^2x,\ cy)&=\frac{-1}{\sqrt{-\alpha}}\,g_2\left(\frac{2y-x}{3},\ x+y\right)\ \Leftrightarrow\\ g_2(x,\ y)&=-\sqrt{-\alpha}\,f_2\left(a^2b^2\left(\frac{2y}{3}-x\right),\ \left(\frac{y}{3}+x\right)\right),\\ f_3(bx,\ ab^2cy)&=\frac{-1}{\sqrt{-\alpha}}\,g_3\left(\frac{2y-x}{2},\ x+y\right)\ \Leftrightarrow\\ g_3(x,\ y)&=-\sqrt{-\alpha}\,f_3\left(b\left(\frac{2y}{3}-x\right),\ ab^2c\left(\frac{y}{3}+x\right)\right)\end{aligned}$$

l'équation fonctionnelle (5) prend la forme suivante:

$$(7)\qquad g_1(x+y,\ z)=\frac{g_2(x,\ z)+g_3(y,\ z)}{1+g_2(x,\ z)\,g_3(y,\ z)}.$$

1.1. Si l'on a $g_i(x,x)\neq 1$ $(i=1,\ 2,\ 3)$, en introduisant les fonctions nouvelles h_i par

$$(8)\qquad g_i(x,\ z)=\frac{h_i(x,\ z)-1}{h_i(x,\ z)+1}\ \Leftrightarrow\ h_i(x,\ z)=\frac{1+g_i(x,\ z)}{1-g_i(x,\ z)}\qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

l'équation (7) se réduit à

$$(9)\qquad h_1(x+y,\ z)=h_2(x,\ z)\,h_3(y,\ z),$$

dont la solution générale continue complexe est

$$(10)\quad \begin{aligned} h_1(x,\ z)&=c_1(z)\,c_2(z)\exp\left[c_3(z)\operatorname{Re}x+c_4(z)\operatorname{Im}x\right]\\ h_i(x,\ z)&=c_{i-1}(z)\exp\left[c_3(z)\operatorname{Re}x+c_4(z)\operatorname{Im}x\right]\qquad (i=2,\ 3).\end{aligned}$$

ou

(11) $$h_1 \equiv 0, \quad h_2 \equiv 0, \quad h_3 \text{ arbitraire;}$$

ou

(12) $$h_1 \equiv 0, \quad h_2 \text{ arbitaire}, \quad h_3 \equiv 0.$$

Donc, d'après (10), (11), (12), (8) et (6) on obtient

(13) $$f_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-a}} \frac{c_1 c_2 \exp\left(c_3 \operatorname{Re} \frac{a_2 bcx - 2ay}{3bc} + c_4 \operatorname{Im} \frac{a^2 bcx - 2ay}{3bc}\right) - 1}{c_1 c_2 \exp\left(c_3 \operatorname{Re} \frac{a^2 bcx - 2ay}{3bc} + c_4 \operatorname{Im} \frac{a^2 bcx - 2ay}{3bc}\right) + 1}$$

$$\left(c_i = c_i \left(\frac{a^2 bcx + ay}{bc}\right); \qquad i = 1, 2, 3, 4\right),$$

(14) $$f_2(x, y) = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \frac{c_1 \exp\left(c_3 \operatorname{Re} \frac{2y - abcx}{3c} + c_4 \operatorname{Im} \frac{2y - abcx}{3c}\right) - 1}{c_1 \exp\left(c_3 \operatorname{Re} \frac{2y - abcx}{3c} + c_4 \operatorname{Im} \frac{2y - abcx}{3c}\right) + 1}$$

$$\left(c_i = c_i \left(\frac{abcx + y}{c}\right); \qquad i = 1, 3, 4\right),$$

(15) $$f_3(x, y) = \frac{-1}{\sqrt{-a}} \frac{c_2 \exp\left(c_3 \operatorname{Re} \frac{2a^2 by - b^2 cx}{3c} + c_4 \operatorname{Im} \frac{2a^2 by - b^2 cx}{3c}\right) - 1}{c_2 \exp\left(c_3 \operatorname{Re} \frac{2a^2 by - b^2 cx}{3c} + c_4 \operatorname{Im} \frac{2a^2 by - b^2 cx}{3c}\right) + 1}$$

$$\left(c_i = c_i \left(\frac{b^2 cx + a^2 by}{c}\right); \qquad i = 2, 3, 4\right),$$

ou

(16) $$f_1(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{-a}}, \quad f_2(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-a}}, \quad f_3(x, y) \text{ arbitraire},$$

ou

(17) $$f_1(x, y) = -\frac{1}{\sqrt{-a}}, \quad f_2(x, y) \text{ arbitraire}, \quad f_3(x, y) = \frac{1}{\sqrt{-a}}.$$

1.2. Dans le cas où $g_i \not\equiv 1$ $(i = 1, 2)$, $g_3 \equiv 1$, de (7) on obtient $g_1 \equiv 1$. Ce n'est pas possible.

1.3. Si $g_i \not\equiv 1$ $(i = 1, 3)$, $g_2 \equiv 1$, d'après (7) on obtient que $g_1 \equiv 1$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $g_1 \not\equiv 1$.

1.4. Soit, maintenant, $g_i \not\equiv 1$ $(i = 2, 3)$, $g_1 \equiv 1$. Alors, l'équation (7) prend la forme

(18) $$(g_2 - 1)(g_3 - 1) = 0.$$

Nous avons supposé que $g_3 \not\equiv 1$. Donc il existe au moins une couple de nombres complexes y_0, z tels que $g_3(y_0, z) \neq 1$. En posant $y = y_0$, de (18) il vient $g_2 \equiv 1$, ce qui est impossible d'après l'hypothèse $g_2 \not\equiv 1$. Donc, dans ce cas, l'équation (7) n'a pas de solutions.

1.5. Supposons, maintenant, que $g_i \equiv 1$ $(i = 1, 2)$, $g_3 \not\equiv 1$. Alors, l'équation (7) est identiquement satisfaite, et g_3 est arbitraire.

1.6. Si l'on a $g_i \equiv 1$ $(i = 1, 3)$, $g_2 \not\equiv 1$, on obtient que g_2 peut être arbitraire.

1.7. Dans le cas où $g_i \equiv 1$ $(i = 2, 3)$, $g_1 \not\equiv 1$, de (7) il vient $g_1 \equiv 1$, ce qui est impossible.

1.8. Enfin, dans le cas $g_i \equiv 1$ $(i = 1, 2, 3)$ l'équation (7) est satisfaite.

Donc, nous avons le théorème suivant:

Théorème 1. *La solution générale continue complexe de l'équation* (4) *est donnée par les formules* (13), (14), (15) *ou* (16) *ou* (17) *ou*

$$(19) \qquad f_1(x, z) = \frac{1}{\sqrt{-a}}, \quad f_2(x, z) = \frac{-1}{\sqrt{-a}}, \quad f_3 \textit{ arbitraire continue,}$$

ou

$$(20) \qquad f_1(x, z) = \frac{1}{\sqrt{-a}}, \quad f_3(x, z) = \frac{-1}{\sqrt{-a}}, \quad f_2 \textit{ arbitraire continue.}$$

2. Supposons, maintenant, que dans l'équation (4) f_i sont des fonctions réelles et a, b, c, α des constantes réelles telles que $a = 1$, $b = 1$. Alors, en posant $f_i(x, cy) = g_i(x, y)$ $(i = 1, 2, 3)$, l'équation (4) prend la forme

$$(21) \qquad g_1(x_1 + x_2, x_3) + g_2(x_2 + x_3, x_1) + g_3(x_3 + x_1, x_2)$$
$$= \alpha\, g_1(x_1 + x_2, x_3)\, g_2(x_2 + x_3, x_1)\, g_3(x_3 + x_1, x_2).$$

De là, pour $g_i \equiv f$ $(i = 1, 2, 3)$ on obtient l'équation fonctionnelle (2). En posant

$$x_1 = x + \frac{z}{3}, \quad x_2 = y + \frac{z}{3}, \quad x_3 = -x - y + \frac{z}{3},$$

$$g_1(x, y) = h_1\left(\frac{x - 2y}{3}, x + y\right), \quad g_i(x, y) = -h_i\left(\frac{2y - x}{3}, x + y\right) \qquad (i = 2, 3),$$

l'équation (21) devient

$$(22) \qquad h_1(x + y, z) = \frac{h_2(x, z) + h_3(y, z)}{1 - \alpha h_2(x, z)\, h_3(y, z)}.$$

En utilisant les résultats de l'article [4] on obtient:

Théorème 2. *La solution générale réelle continue de l'équation fonctionnelle* (21) *dans le cas* $a>0$, *est*

$$(23)\qquad \begin{aligned} g_1(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{tg}\left(c \cdot \frac{x-2y}{3} + c_1 + c_2\right), \\ g_i(x, y) &= \frac{-1}{\sqrt{a}} \operatorname{tg}\left(c \cdot \frac{2y-x}{3} + c_{i-1}\right) \qquad (i=2, 3), \end{aligned}$$

avec $c=c(x+y)$, $c_k=c_k(x+y)$ *des fonctions réelles continues arbitraires.*

Théorème 3. *La solution réelle générale continue de l'équation* (21) *dans le cas* $a<0$, *est*

$$(24)\qquad \begin{aligned} g_1(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{th}\left(c \cdot \frac{x-2y}{3} + c_1 + c_2\right), \\ g_i(x, y) &= \frac{-1}{\sqrt{-a}} \operatorname{th}\left(c \cdot \frac{2y-x}{3} + c_{i-1}\right) \qquad (i=2, 3), \end{aligned}$$

ou

$$(25)\qquad \begin{aligned} g_1(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{th}\left(c \cdot \frac{x-2y}{3} + c_1 + c_2\right), \\ g_i(x, y) &= \frac{-1}{\sqrt{-a}} \operatorname{cth}\left(\frac{2y-x}{3} + c_{i-1}\right) \qquad (i=2, 3), \end{aligned}$$

ou

$$(26)\qquad \begin{aligned} g_1(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{cth}\left(c \cdot \frac{x-2y}{3} + c_1 + c_2\right), \\ g_2(x, y) &= \frac{-1}{\sqrt{-a}} \operatorname{th}\left(c \cdot \frac{2y-x}{3} + c_1\right), \\ g_3(x, y) &= \frac{-1}{\sqrt{-a}} \operatorname{cth}\left(c \cdot \frac{2y-x}{3} + c_2\right), \end{aligned}$$

ou

$$(27)\qquad \begin{aligned} g_1(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{cth}\left(c \cdot \frac{x-2y}{3} + c_1 + c_2\right), \\ g_2(x, y) &= \frac{-1}{\sqrt{-a}} \operatorname{cth}\left(c \cdot \frac{2y-x}{3} + c_1\right), \\ g_3(x, y) &= \frac{-1}{\sqrt{-a}} \operatorname{th}\left(c \cdot \frac{2y-x}{3} + c_2\right), \end{aligned}$$

ou

$$g_1=\frac{-1}{\sqrt{-a}}, \quad g_2=\frac{1}{\sqrt{-a}}, \quad g_3 \text{ arbitraire continue,} \tag{28}$$

ou

$$g_1=\frac{-1}{\sqrt{-a}}, \quad g_2 \text{ arbitraire continue,} \quad g_3=\frac{1}{\sqrt{-a}}, \tag{29}$$

ou

$$g_1=\frac{1}{\sqrt{-a}}, \quad g_2=\frac{-1}{\sqrt{-a}}, \quad g_3 \text{ arbitraire continue,} \tag{30}$$

ou

$$g_1=\frac{1}{\sqrt{-a}}, \quad g_2 \text{ arbitraire continue,} \quad g_3=\frac{-1}{\sqrt{-a}}, \tag{31}$$

avec $c_i=c_i(x+y)$ $(i=1, 2, 3)$ *des fonctions réelles continues arbitraires.*

D'après les résultats de l'article [3] on a:

Théorème 4. *La solution réelle générale continue de l'équation fonctionnelle* (21), *pour* $a=0$, *est*

$$g_i(x, y)=x\cdot c(x+y)+c_i(x+y) \qquad (i=1, 2),$$

$$g_3(x, y)=-(x+2y)\cdot c(x+y)-c_1(x+y)-c_2(x+y),$$

où c, c_1, c_2 *des fonctions réelles continues arbitraires.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Ž. Đoković, *Sur quelques équations fonctionnelles cycliques se réduisant à l'équation de Cauchy*, Ces Publications № **61**—№ **64** (1961), 21—28.

[2] O. Em. Gheorghiu, *Sur une équation fonctionnelle cyclique non linéaire*, Publ. Inst. Math. (Beograd) **6** (20) (1966), 5—7.

[3] D. Ž. Đoković, R. Ž. Đorđević, P. M. Vasić, *On a class of functional equations*, ibid. **6** (20) (1966), 65—76.

[4] P. M. Vasić et R. R. Janić, *Sur quelques équations fonctionnelles du type de Pexider*, Ces Publications № **274**—№ **301** (1969), 33—45.