PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 274 — № 301 (1969)

281. SUR QUELQUES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES DU TYPE DE PEXIDER*

Petar M. Vasić et *Radovan R. Janić*

Nous supposons en général que les variables et les fonctions sont toutes réelles. Par S nous désignons une classe de toutes les fonctions réelles continues sur un ensemble de mesure positive.

Dans le livre [1] J. ACZÉL a donné les solutions générales dans S des équations fonctionnelles suivantes:

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)-2f(x)f(y)}{1-f(x)f(y)}, \tag{1'}$$

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)+2f(x)f(y)}{1-f(x)f(y)}, \tag{2'}$$

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)-2\cos a\, f(x)f(y)}{1-f(x)f(y)} \qquad (a\neq k\pi), \tag{3'}$$

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)-2\operatorname{ch} a\, f(x)f(y)}{1-f(x)f(y)} \qquad (a\neq 0), \tag{4'}$$

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)+2\operatorname{ch} a\, f(x)f(y)}{1-f(x)f(y)} \qquad (a\neq 0). \tag{5'}$$

On trouve les équations (1′) — (5′) aussi dans [2] et [3].

Toutes les équations (1′) à (5′) sont des cas spéciaux d'une classe générale des équations fonctionnelles.

Nous traiterons ici les équations fonctionnelles suivantes correspondant aux (1′) — (5′):

$$f(x+y)=\frac{g(x)+h(y)-2g(x)h(y)}{1-g(x)h(y)}, \tag{1}$$

$$f(x+y)=\frac{g(x)+h(y)+2g(x)h(y)}{1-g(x)h(y)}, \tag{2}$$

* Présenté le 1 août 1969 par B. CRSTICI.

$$(3)\qquad f(x+y)=\frac{g(x)+h(y)-2\cos a\, g(x)\, h(y)}{1-g(x)\, h(y)}\qquad (a\neq k\pi),$$

$$(4)\qquad f(x+y)=\frac{g(x)+h(y)-2\operatorname{ch} a\, g(x)\, h(y)}{1-g(x)\, h(y)}\qquad (a\neq 0),$$

$$(5)\qquad f(x+y)=\frac{g(x)+h(y)+2\operatorname{ch} a\, g(x)\, h(y)}{1-g(x)\, h(y)}\qquad (a\neq 0),$$

ainsi que

$$(6)\qquad f(x+y)=\frac{g(x)+h(y)-2a\, g(x)\, h(y)}{1+g(x)\, h(y)},$$

et

$$(6')\qquad f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)-2a f(x) f(y)}{1+f(x) f(y)},$$

où f, g, h sont des fonctions réelles inconnues et a une constante donnée.

Si $f=g=h$ de (1), (2), (3), (4) et (5) on obtient les équations (1′), (2′), (3′), (4′) et (5′).

Si $a=\frac{\pi}{2}$, de (3) on obtient l'équation

$$(7)\qquad f(x+y)=\frac{g(x)+h(y)}{1-g(x)\, h(y)},$$

(voir [**4**] et [**9**]).

De (6), pour $a=0$, on obtient l'équation fonctionnelle

$$(8)\qquad f(x+y)=\frac{g(x)+h(y)}{1+g(x)\, h(y)},$$

(voir: [**4**] et [**9**]).

1. L'équation fonctionnelle (1)

De (1) il vient $g(x)\,h(y)\neq 1$ pour chaque $x, y\in R$.

1.1. Supposons, tout d'abord, que $f(x)\neq 1$, $g(x)\neq 1$, $h(x)\neq 1$ et posons

$$(9)\qquad F(x)=\frac{f(x)}{f(x)-1},\quad G(x)=\frac{g(x)}{g(x)-1},\quad H(x)=\frac{h(x)}{h(x)-1},$$

d'où

$$(10)\qquad f(x)=\frac{F(x)}{F(x)-1},\quad g(x)=\frac{G(x)}{G(x)-1},\quad h(x)=\frac{H(x)}{H(x)-1}.$$

En posant (10) dans (1), après la simplification, on obtient l'équation fonctionnelle de Pexider:

$$(11)\qquad F(x+y)=G(x)+H(y).$$

La solution générale de l'équation fonctionnelle (11), dans la classe S est (voir [1], pp. 141—143):

$$F(x)=cx+c_1+c_2, \quad G(x)=cx+c_1, \quad H(x)=cx+c_2, \tag{12}$$

où c, c_1, c_2 sont des constantes réelles arbitraires.

D'après (10) et (12), nous trouvons que la solution générale de l'équation fonctionnelle (1) dans la classe S est déterminée par

$$f(x)=\frac{cx+c_1+c_2}{cx+c_1+c_2-1}, \quad g(x)=\frac{cx+c_1}{cx+c_1-1}, \quad h(x)=\frac{cx+c_2}{cx+c_2-1}, \tag{13}$$

$(c,\ c_1,\ c_2 \in R$, constantes arbitraires).

1.2. Soit, maintenant, $f(x)\not\equiv 1$, $g(x)\not\equiv 1$, $h(x)\equiv 1$. Alors, de (1) on trouve

$$f(x+y)=\frac{1-g(x)}{1-g(x)}=1, \tag{14}$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $f(x)\not\equiv 1$.

Donc, dans ce cas, l'équation (1) n'a pas de solutions.

1.3. Si l'on a $f(x)\not\equiv 1$, $g(x)\equiv 1$, $h(x)\not\equiv 1$, d'après le calcul analogue à celui du cas précédent, on obtient que (1) n'a pas de solution.

1.4. Supposons que $f(x)\equiv 1$, $g(x)\not\equiv 1$, $h(x)\not\equiv 1$. Alors, de (1) on trouve

$$(g(x)-1)\,(h(y)-1)=0. \tag{15}$$

Étant donné que $h(y)\not\equiv 1$, il existe au moins un nombre réel y_0 tel que $h(y_0)\neq 1$.

Si l'on fait $y=y_0$, de (15) on obtient

$$g(x)\equiv 1. \tag{16}$$

C'est impossible parce que, d'après l'hypothèse, on a $g(x)\not\equiv 1$. Donc, dans ce cas l'équation (1) n'a pas de solution.

1.5. Soit $f(x)\equiv 1$, $g(x)\equiv 1$, $h(x)\not\equiv 1$. Alors, l'équation (1) est identiquement satisfaite et la solution générale est

$$f(x)\equiv 1, \quad g(x)\equiv 1, \quad h(x)\ (\not\equiv 1) \text{ arbitraire}. \tag{17}$$

1.6. Si $f(x)\equiv 1$, $g(x)\not\equiv 1$, $h(x)\equiv 1$, avec un procédé analogue à celui du cas précédent, on obtient que la solution générale est

$$f(x)\equiv 1, \quad g(x)\ (\not\equiv 1) \text{ arbitraire}, \quad h(x)\equiv 1. \tag{18}$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème 1. *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (1) *dans la classe S est donnée par*

$$(19)\qquad f(x)=\frac{cx+c_1+c_2}{cx+c_1+c_2-1},\quad g(x)=\frac{cx+c_1}{cx+c_1-1},\quad h(x)=\frac{cx+c_2}{cx+c_2-1},$$

ou

$$(20)\qquad f(x)\equiv 1,\quad g(x)\equiv 1,\quad h(x)\ (\not\equiv 1)\ \textit{arbitraire},$$

ou

$$(21)\qquad f(x)\equiv 1,\quad g(x)\ (\not\equiv 1)\ \textit{arbitraire},\quad h(x)\equiv 1,$$

avec c, c_1, $c_2\,(\in R)$, *constantes arbitraires.*

2. L'équation fonctionnelle (2)

En posant $f(x)=-F(x)$, $g(x)=-G(x)$, $h(x)=-H(x)$, on conclut que F, G, H satisfont à l'équation (1). Donc, en utilisant le théorème 1 on obtient:

Théorème 2. *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (2) *dans la classe S est déterminée par les formules:*

$$(22)\qquad f(x)=-\frac{cx+c_1+c_2}{cx+c_1+c_2-1},\quad g(x)=-\frac{cx+c_1}{cx+c_1-1},\quad h(x)=-\frac{cx+c_2}{cx+c_2-1},$$

ou

$$(23)\qquad f(x)\equiv -1,\quad g(x)\equiv -1,\quad g(x)\ (\not\equiv -1)\ \textit{arbitraire},$$

ou

$$(24)\qquad f(x)\equiv -1,\quad h(x)\ (\not\equiv -1)\ \textit{arbitraire},\quad h(x)\equiv -1,$$

avec c, c_1, c_2 $(\in R)$ *constantes arbitraires.*

3. L'équation fonctionnelle (3)

Introduisons les nouvelles fonctions F, G, H par les relations:

$$(25)\qquad f(x)=\frac{\sin F(x)}{\sin(F(x)+a)},\quad g(x)=\frac{\sin G(x)}{\sin(G(x)+a)},\quad h(x)=\frac{\sin H(x)}{\sin(H(x)+a)},$$

d'où pour $a\neq k\pi$ $(k=0,\ \pm 1,\ldots)$ il vient

$$(26)\qquad F(x)=\operatorname{arctg}\frac{f(x)\sin a}{1-f(x)\cos a},\quad \text{etc.}$$

D'après (25), l'équation (3) devient

(27) $$\cos(G(x)+H(y)+a-F(x+y))=\cos(F(x+y)+a-G(x)-H(y)),$$

d'où l'on tire

(28) $$F(x+y)=G(x)+(H(y)+k\pi) \qquad (k=0,\ \pm 1, \ldots).$$

La solution générale de l'équation (28) dans la classe S est

(29) $$F(x)=cx+c_1+c_2,\quad G(x)=cx+c_1,\quad H(x)=cx+c_2-k\pi \qquad (k=0,\ \pm 1, \ldots)$$

où c, c_1, c_2 sont des constantes réelles arbitraires.

Donc, d'après (29) et (25) on a le théorème suivant:

Théorème 3. *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (3) *dans la classe S est donnée par*

(30) $$f(x)=\frac{\sin(cx+c_1+c_2)}{\sin(cx+c_1+c_2+a)},\quad g(x)=\frac{\sin(cx+c_1)}{\sin(cx+c_1+a)},$$
$$h(x)=\frac{\sin(cx+c_2)}{\sin(cx+c_2+a)}.$$

(c, c_1, c_2 ($\in R$) *constantes arbitraires*).

Remarque 1. Pour $a=\frac{\pi}{2}$ de (3) on obtient l'équation fonctionnelle (7) dont la solution générale dans la classe S est

$$f(x)=\operatorname{tg}(cx+c_1+c_2),\quad g(x)=\operatorname{tg}(cx+c_1),\quad h(x)=\operatorname{tg}(cx+c_2).$$

Cette solution est donnée dans l'article **[4]**.

4. L'équation fonctionnelle (4)

4.1. Supposons que $f(x)\neq\frac{1}{A}$, $g(x)\neq\frac{1}{A}$, $h(x)\neq\frac{1}{A}$ et introduisons les nouvelles fonctions F, G, H à l'aide de

(31) $$F(x)=\frac{f(x)-A}{A^2 f(x)-A},\quad G(x)=\frac{g(x)-A}{A^2 g(x)-A},\quad H(x)=\frac{h(x)-A}{A^2 h(x)-A},$$

où $A=\operatorname{sh} a+\operatorname{ch} a$.

De (31) il vient

(32) $$f(x)=\frac{A(F(x)-1)}{A^2 F(x)-1},\quad g(x)=\frac{A(G(x)-1)}{A^2 G(x)-1},\quad h(x)=\frac{A(H(x)-1)}{A^2 H(x)-1},$$

et l'équation fonctionnelle (4) devient

(33) $$F(x+y)=G(x)\,H(y).$$

La solution générale de l'équation (33) dans la classe S est (voir [**1**], pp. 141—143):

$$F(x)=c_1 c_2 e^{cx}, \quad G(x)=c_1 e^{cx}, \quad H(x)=c_2 e^{cx}, \tag{34}$$

où c, c_1, c_2 sont des constantes réelles arbitraires et $c_1 c_2 \neq 0$, ou

$$F(x)=0, \quad G(x)=0, \quad H(x) \text{ arbitraires}, \tag{35}$$

ou

$$F(x)=0, \quad G(x) \text{ arbitraires}, \quad H(x)=0. \tag{36}$$

D'après (34), (35), (36) et (32) on trouve

$$f(x)=\frac{A(c_1 c_2 e^{cx}-1)}{A^2 c_1 c_2 e^{cx}-1}, \quad g(x)=\frac{A(c_1 e^{cx}-1)}{A^2 c_1 e^{cx}-1}, \quad h(x)=\frac{A(c_2 e^{cx}-1)}{A^2 c_2 e^{cx}-1}, \tag{37}$$

$$(c,\ c_1,\ c_2 \in R \text{ constantes arbitraires}, \quad A=\operatorname{ch} a+\operatorname{sh} a),$$

ou

$$f(x)=A, \quad g(x)=A, \quad h(x) \text{ arbitraire}, \tag{38}$$

ou

$$f(x)=A, \quad g(x) \text{ arbitraire}, \quad h(x)=A. \tag{39}$$

Remarque 2. Si c_1, $c_2>0$ on peut écrire la solution (37) sous la forme

$$\begin{gathered} f(x)=\frac{\operatorname{sh}(Cx+C_1+C_2)}{\operatorname{sh}(Cx+C_1+C_2+a)}, \quad g(x)=\frac{\operatorname{sh}(Cx+C_1)}{\operatorname{sh}(Cx+C_1+a)}, \\ h(x)=\frac{\operatorname{sh}(Cx+C_2)}{\operatorname{sh}(Cx+C_2+a)}, \end{gathered} \tag{40}$$

où C, C_1, C_2 sont les constantes nouvelles.

Si c_1, $c_2>0$, on a

$$\begin{gathered} f(x)=\frac{\operatorname{sh}(Cx+C_1+C_2)}{\operatorname{sh}(Cx+C_1+C_2+a)}, \quad g(x)=\frac{\operatorname{ch}(Cx+C_1)}{\operatorname{ch}(Cx+C_1+a)}, \\ h(x)=\frac{\operatorname{ch}(Cx+C_2)}{\operatorname{ch}(Cx+C_2+a)}. \end{gathered} \tag{41}$$

Dans le cas où $c_1>0$, $c_2<0$ les formules (37) prennent la forme

$$\begin{gathered} f(x)=\frac{\operatorname{ch}(Cx+C_1+C_2)}{\operatorname{ch}(Cx+C_1+C_2+a)}, \quad g(x)=\frac{\operatorname{sh}(Cx+C_1)}{\operatorname{sh}(Cx+C_1+a)}, \\ h(x)=\frac{\operatorname{ch}(Cx+C_2)}{\operatorname{ch}(Cx+C_2+a)}. \end{gathered} \tag{42}$$

Enfin, si $c_1<0$, $c_2>0$, on a

$$f(x)=\frac{\operatorname{ch}(Cx+C_1+C_2)}{\operatorname{ch}(Cx+C_1+C_2+a)}, \quad g(x)=\frac{\operatorname{ch}(Cx+C_1)}{\operatorname{ch}(Cx+C_1+a)},$$
(43)
$$h(x)=\frac{\operatorname{sh}(Cx+C_2)}{\operatorname{sh}(Cx+C_2+a)}.$$

4.2. Si l'on a $f(x)\not\equiv\frac{1}{A}$, $g(x)\not\equiv\frac{1}{A}$, $h(x)\equiv\frac{1}{A}$. Dans ce cas l'équation (4) a la forme

(44)
$$f(x+y)=\frac{Ag(x)-1}{A(Ag(x)-1)},$$

d'où l'on obtient $f(x)\equiv\frac{1}{A}$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $f(x)\not\equiv\frac{1}{A}$. Donc, l'équation (4) ne possède pas de solutions dans ce cas.

4.3. Dans le cas $f(x)\not\equiv\frac{1}{A}$, $g(x)\equiv\frac{1}{A}$, $h(x)\not\equiv\frac{1}{A}$, l'équation (4) n'a pas, aussi, de solutions.

4.4. Soit, maintenant, $f(x)\equiv\frac{1}{A}$, $g(x)\not\equiv\frac{1}{A}$, $h(x)\not\equiv\frac{1}{A}$. Alors, l'équation (4) prend la forme

(45)
$$\left(g(x)-\frac{1}{A}\right)\left(h(y)-\frac{1}{A}\right)=0.$$

Nous avons supposé que $h(y)\not\equiv\frac{1}{A}$. Donc, il existe au moins un nombre réel y_0 tel que $h(y_0)\neq\frac{1}{A}$. En posant $y=y_0$, de (45) il vient $g(x)\equiv\frac{1}{A}$, ce qui est impossible d'après l'hypothèse $g(x)\not\equiv\frac{1}{A}$.

Donc, dans ce cas l'équation (4) n'a pas de solutions.

4.5. Si l'on a $f(x)\equiv\frac{1}{A}$, $g(x)\equiv\frac{1}{A}$, $h(x)\not\equiv\frac{1}{A}$, l'équation (4) est identiquement satisfaite et la solution générale est

(46)
$$f(x)\equiv\frac{1}{A}, \quad g(x)\equiv\frac{1}{A}, \quad h\left(\not\equiv\frac{1}{A}\right) \text{ arbitraire.}$$

4.6. Comme dans le cas précédent, on obtient que si $f(x)\equiv\frac{1}{A}$, $g(x)\not\equiv\frac{1}{A}$, $h(x)\equiv\frac{1}{A}$ la solution générale de l'équation (4) est

(47)
$$f(x)\equiv\frac{1}{A}, \quad g(x)\left(\not\equiv\frac{1}{A}\right) \text{ arbitraire}, \quad h(x)\equiv\frac{1}{A}.$$

4.7. L'hypothèse $f(x) \not\equiv \frac{1}{A}$, $g(x) \equiv \frac{1}{A}$, $h(x) \equiv \frac{1}{A}$ implique $f(x) \equiv \frac{1}{A}$. Donc, dans ce cas l'équation (4) n'a pas de solution.

4.8. Enfin, si l'on a $f(x) \equiv \frac{1}{A}$, $g(x) \equiv \frac{1}{A}$, $h(x) \equiv \frac{1}{A}$, l'équation (4) est identiquement satisfaite.

Donc, nous avons le théorème suivant:

Théorème 4. *La solution générale de l'équation* (4) *dans la classe S est donnée par*

$$f(x) = \frac{A(c_1 c_2 e^{cx} - 1)}{A^2 c_1 c_2 e^{cx} - 1}, \quad g(x) = \frac{A(c_1 e^{cx} - 1)}{A^2 c_1 e^{cx} - 1}, \quad h(x) = \frac{A(c_2 e^{cx} - 1)}{A^2 c_2 e^{cx} - 1}, \tag{48}$$

ou

$$f(x) \equiv A, \quad g(x) \equiv A, \quad h(x) \text{ arbitraire}, \tag{49}$$

ou

$$f(x) \equiv A, \quad g(x) \text{ arbitraire}, \quad h(x) \equiv A, \tag{50}$$

$$f(x) \equiv \frac{1}{A}, \quad g(x) \equiv \frac{1}{A}, \quad h(x) \text{ arbitraire}, \tag{51}$$

ou

$$f(x) \equiv \frac{1}{A}, \quad g(x) \text{ arbitraire}, \quad h(x) \equiv \frac{1}{A}, \tag{52}$$

avec c, c_1, c_2 $(\in R)$ *constantes arbitraires et* $A = \operatorname{sh} a + \operatorname{ch} a$.

5. L'équation fonctionnelle (5)

En posant $f(x) = -F(x)$, $g(x) = -G(x)$, $h(x) = -H(x)$, on obtient que les fonctions F, G, H satisfont à l'équation fonctionnelle (4). Donc d'après le théorème 4 on obtient le théorème suivant:

Théorème 5. *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (5) *dans la classe S est donnée par les formules:*

$$f(x) = -\frac{A(c_1 c_2 e^{cx} - 1)}{A^2 c_1 c_2 e^{cx} - 1}, \quad g(x) = -\frac{A(c_1 e^{cx} - 1)}{A^2 c_1 e^{cx} - 1}, \quad h(x) = -\frac{A(c_2 e^{cx} - 1)}{A^2 c_2 e^{cx} - 1} \tag{53}$$

ou

$$f(x) \equiv -A, \quad g(x) \equiv -A, \quad h(x) \text{ arbitraire} \tag{54}$$

ou

$$f(x) \equiv -A, \quad g(x) \text{ arbitraire}, \quad h(x) \equiv -A, \tag{55}$$

ou

(56) $$f(x) \equiv -\frac{1}{A}, \quad f(x) \equiv -\frac{1}{A}, \quad h(x) \text{ arbitraire},$$

ou

(57) $$f(x) \equiv -\frac{1}{A}, \quad g(x) \text{ arbitraire}, \quad h(x) \equiv -\frac{1}{A},$$

avec c, c_1, c_2 $(\in R)$ *constantes arbitraires et* $A = \operatorname{sh} a + \operatorname{ch} a$.

6. L'équation fonctionnelle (6)

Dans le cas où $f(x) \not\equiv \frac{1}{A}$, $g(x) \not\equiv \frac{1}{A}$, $h(x) \not\equiv \frac{1}{A}$ $(A = a + \sqrt{a^2+1})$, en introduisant les nouvelles F, G, H par les relations

(58) $$F(x) = \frac{A + f(x)}{A(1 - Af(x))}, \quad G(x) = \frac{A + g(x)}{A(1 - Ag(x))}, \quad H(x) = \frac{A + h(x)}{A(1 - Ah(x))},$$

d'où

(59) $$f(x) = \frac{A(F(x) - 1)}{1 + A^2 F(x)}, \quad g(x) = \frac{A(G(x) - 1)}{1 + A^2 G(x)}, \quad h(x) = \frac{A(H(x) - 1)}{1 + A^2 H(x)}.$$

Alors, l'équation (6) se transforme en l'équation (33). Donc, d'après (34), (35), (36) et (59) on obtient que la solution générale de l'équation (6) dans ce cas est

(60) $$f(x) = \frac{A(c_1 c_2 e^{cx} - 1)}{1 + A^2 c_1 c_2 e^{cx}}, \quad g(x) = \frac{A(c_1 e^{cx} - 1)}{1 + A^2 c_1 e^{cx}}, \quad h(x) = \frac{A(c_2 e^{cx} - 1)}{1 + A^2 c_2 e^{cx}},$$

ou

(61) $$f(x) \equiv -A, \quad g(x) \equiv -A, \quad h(x) \text{ arbitraire},$$

ou

(62) $$f(x) \equiv -A, \quad g(x) \text{ arbitraire}, \quad h(x) \equiv -A,$$

avec c, c_1, c_2 constantes réelles arbitraires et $A = a + \sqrt{a^2+1}$.

Dans les autres cas on peut obtenir la solution générale de la même manière comme pour l'équation fonctionnelle (4). Par conséquent, on a le théorème suivant:

Théorème 6. *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (6) *dans la classe S est*

(63) $$f(x) = \frac{A(c_1 c_2 e^{cx} - 1)}{1 + A^2 c_1 c_2 e^{cx}}, \quad g(x) = \frac{A(c_1 e^{cx} - 1)}{1 + A^2 c_1 e^{cx}}, \quad h(x) = \frac{A(c_2 e^{cx} - 1)}{1 + A^2 c_2 e^{cx}},$$

ou

(64) $$f(x) \equiv -A, \quad g(x) \equiv -A, \quad h(x) \text{ arbitraire},$$

ou

(65) $$f(x) \equiv -A, \quad g(x) \text{ arbitraire}, \quad h(x) \equiv -A,$$

ou

$$f(x) \equiv \frac{1}{A}, \quad g(x) \equiv \frac{1}{A}, \quad h(x) \text{ arbitraire,} \tag{66}$$

ou

$$f(x) \equiv \frac{1}{A}, \quad g(x) \text{ arbitraire,} \quad h(x) = \frac{1}{A}, \tag{67}$$

avec c, c_1, c_2 $(\in R)$ *constantes réelles arbitraires et* $A = a + \sqrt{a^2+1}$.

Remarque 3. Si $c_1, c_2 > 0$, on peut écrire (63) sous la forme suivante

$$\begin{gathered} f(x) = \frac{\operatorname{sh}(Cx+C_1+C_2)}{\operatorname{ch}(Cx+C_1+C_2+\alpha)}, \quad g(x) = \frac{\operatorname{sh}(Cx+C_1)}{\operatorname{ch}(Cx+C_1+\alpha)}, \\ h(x) = \frac{\operatorname{sh}(Cx+C_2)}{\operatorname{ch}(Cx+C_2+\alpha)}. \end{gathered} \tag{68}$$

Si $c_1 < 0$, $c_2 < 0$, on a

$$\begin{gathered} f(x) = \frac{\operatorname{sh}(Cx+C_1+C_2)}{\operatorname{ch}(Cx+C_1+C_2+\alpha)}, \quad g(x) = \frac{\operatorname{ch}(Cx+C_1)}{\operatorname{sh}(Cx+C_1+\alpha)}. \\ h(x) = \frac{\operatorname{ch}(Cx+C_2)}{\operatorname{sh}(Cx+C_2+\alpha)}. \end{gathered} \tag{69}$$

Dans le cas $c_1 > 0$, $c_2 < 0$, il vient

$$\begin{gathered} f(x) = \frac{\operatorname{ch}(Cx+C_1+C_2)}{\operatorname{sh}(Cx+C_1+C_2+\alpha)}, \quad g(x) = \frac{\operatorname{sh}(Cx+C_1)}{\operatorname{ch}(Cx+C_1+\alpha)}, \\ h(x) = \frac{\operatorname{ch}(Cx+C_2)}{\operatorname{sh}(Cx+C_2+\alpha)}. \end{gathered} \tag{70}$$

Et, enfin, si $c_1 < 0$, $c_2 > 0$, on a

$$\begin{gathered} f(x) = \frac{\operatorname{ch}(Cx+C_1+C_2)}{\operatorname{sh}(Cx+C_1+C_2+\alpha)}, \quad g(x) = \frac{\operatorname{ch}(Cx+C_1)}{\operatorname{sh}(Cx+C_1+\alpha)}, \\ h(x) = \frac{\operatorname{sh}(Cx+C_2)}{\operatorname{ch}(Cx+C_2+\alpha)}. \end{gathered} \tag{71}$$

Dans (68), (69), (70) et (71) nous avons $a = \operatorname{sh} \alpha$, C, C_1, C_2 des constantes nouvelles.

Remarque 4. En posant dans (6), $a = 0$, on obtient l'équation fonctionnelle (8). D'après (68), (69), (70), (71), (64), (65), (66) et (67), sa solution générale est

$$f(x) = \operatorname{th}(Cx+C_1+C_2), \quad g(x) = \operatorname{th}(Cx+C_1), \quad h(x) = \operatorname{th}(Cx+C_2), \tag{72}$$

ou

$$f(x) = \operatorname{th}(Cx+C_1+C_2), \quad g(x) = \operatorname{cth}(Cx+C_1), \quad h(x) = \operatorname{cth}(Cx+C_2), \tag{73}$$

ou

(74) $f(x)=\operatorname{cth}(Cx+C_1+C_2), \quad g(x)=\operatorname{th}(Cx+C_1), \quad h(x)=\operatorname{cth}(Cx+C_2),$

ou

(75) $f(x)=\operatorname{cth}(Cx+C_1+C_2), \quad g(x)=\operatorname{cth}(Cx+C_1), \quad h(x)=\operatorname{th}(Cx+C_2),$

ou

(76) $f(x)\equiv -1, \quad g(x)\equiv -1, \quad h(x)$ arbitraire,

ou

(77) $f(x)\equiv -1, \quad g(x)$ arbitraire, $\quad h(x)\equiv -1,$

ou

(78) $f(x)\equiv -1, \quad g(x)\equiv -1, \quad h(x)$ arbitraire,

ou

(79) $f(x)\equiv 1, \quad g(x)$ arbitraire, $\quad h(x)\equiv 1,$

avec C, C_1, C_2 $(\in R)$ constantes réelles.

Dans l'article [**4**] on trouve seulement (72) et $f=g=h=1$ et $f=g=h=-1$ comme les solutions de l'équation fonctionnelle (8).

7. Les équations fonctionnelles (1')—(6')

En partant des équations (1)—(6), et en posant $f=g=h$, on peut obtenir les solutions générales des équations (1')—(6').

Pour les équations (1')—(5') ces solutions sont identiques aux solutions données dans le livre [**1**].

Pour l'équation fonctionnelle (6'), en posant $f=g=h$ dans le théorème 6, on obtient que dans la formule (63) on a $c_1=c_2=1$.

Donc, la solution générale dans ce cas est

(80) $$f(x)=\frac{A(e^{cx}-1)}{1+A^2 e^{cx}} \qquad (c\in R, \quad A=a+\sqrt{a^2+1}).$$

De (64), (65), (66) et (67) on obtient

(81) $$f(x)\equiv\frac{1}{A}=-a+\sqrt{a^2+1}$$

et

(82) $$f(x)\equiv -A=-a-\sqrt{a^2+1}.$$

En posant $a = \operatorname{sh} \alpha$ et $c = 2C$, d'après (80), (81) et (82), on obtient:

Théorème 7. *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (6') *dans la classe S est donnée par*

$$f(x) = \frac{\operatorname{sh} Cx}{\operatorname{ch}(Cx+\alpha)}, \tag{83}$$

ou

$$f(x) \equiv -e^{\alpha}, \tag{84}$$

ou

$$f(x) \equiv e^{-\alpha} \tag{85}$$

avec C $(\in R)$ *constante arbitraire et* $a = \operatorname{sh} \alpha$.

8. Certaines généralisations

L'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = \frac{g(x) + h(y) + Ag(x)h(y)}{1 + Bg(x)h(y)}, \tag{86}$$

où A et B sont des constantes données, contient comme des cas particuliers, les équations fonctionnelles (1)—(8).

Si l'on a $B = \beta^2$, en posant $\beta f(x) = F(x)$, $\beta g(x) = G(x)$, $\beta h(x) = H(x)$, on obtient

$$F(x+y) = \frac{G(x) + H(y) + \alpha G(x) H(y)}{1 - G(x) H(y)} \qquad \left(\alpha = \frac{A}{\sqrt{B}}\right), \tag{87}$$

donc une équation du type (1)—(5).

Dans le cas où $B = -\beta^2$, en posant $\beta f(x) = F(x)$, $\beta g(x) = G(x)$, $\beta h(x) = H(x)$, on obtient pour F, G, H l'équation fonctionnelle (6).

De (86) pour $A = B = 2$ et $f = g = h$ on obtient une équation fonctionnelle considérée dans [1] (l'équation (4), p. 80).

De (86), pour $A = \pm 2$ et $B = -2$ on obtient une équation fonctionnelle résolue par St. A. Filipescu [5].

Enfin, observons que l'équation

$$F(x+y) = \frac{G(x)H(y)\,(2ad(c-\lambda a) - b(c^2+\varepsilon a^2)) + (d^2 - 2\lambda bd - \varepsilon b^2)\,(a(G(x)+H(y)) + b)}{(\varepsilon a^2 + 2\lambda ac - c^2)\,(aG(x)H(y) + b(G(x)+H(y))) + a(d^2+\varepsilon b^2) - 2bc(d-\lambda b)} \tag{88}$$

par les changements

$$F(x) = \frac{df(x) - b}{a - cf(x)}, \quad G(x) = \frac{dg(x) - b}{a - cg(x)}, \quad H(x) = \frac{dh(x) - b}{a - ch(x)} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

peut être réduite à une des équations (1)—(6).

Pour $\lambda=0$, $\varepsilon=1$, $F=G=H$ on obtient de (88) une équation résolue par D. BENGHIA et B. CRSTICI (voir [6]).

Pour $\lambda=0$, $\varepsilon=-1$, $F=G=H$ de (88) on obtient une équation fonctionnelle résolue par O. EM. GHEORGHIU (voir [7]).

Pour $\lambda=0$, $\varepsilon=-1$, $a=c=1$, $b=-1$, $d=0$, $F=G=H=f$ on obtient l'équation fonctionnelle

$$(89) \qquad f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)-1}{2f(x)+2f(y)-2f(x)f(y)-1},$$

(voir: V. ALACI [8]).

Remarque additionnelle. Pour la résolution des équations (1)—(6) et pour les équations plus générales, J. ACZÉL (voir [1]) a donné une méthode différente de telles que nous avons utilisées.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. ACZÉL, *Lectures on functional equations and their applications*, New York-London 1966, 510.

[2] J. ACZÉL, *Miszellen über Funktionalgleichungen*, I, Math. Nachrichten, **19** (1958), 87—99.

[3] M. KUCZMA, *A survey of the theory of functional equations*, Ces Publications № **130** (1964), pp. 64.

[4] I. STAMATE — N. GHIRCOIASIU, *Ecuaţiţ functionale care definisc funcţii trigonometrice*, Buletinul Ştiinţific al Institului Politehnic din Cluj **10** (1967), 57—60.

[5] ŞT. A. FILIPESCU, *Sisteme de ecuaţii funcţionale tip Alaci*, Bull. Şti. Timişoara **11** (25) (1966), fasc. 1, 39—47.

[6] D. BENGHIA — B. CRISTICI, *Formule de adiţiune analoage cu formulele daţtiune ale lui V. Alaci*, Bul. Şti. Timişoara **11** (25) (1966), fasc. 1, 11—18.

[7] O. EM. GHEORGHIU, *Über eine klasse von Funktionalgleichungen*, L'Enseignement Mathématique **10** (1964), 245—247.

[8] V. ALACI, *Sur deux équations fonctionnelles*, Mathematica (Cluj) **19** (1943), 23—25.

[9] O. EM. GHEORGHIU, *Despre un sistem de ecuaţii funcţionalle*, Comunicalile Acad. R. P. R. **13** (1969), 589—593.