PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 274 — № 301 (1969)

275. SUR L'INÉGALITÉ CLASSIQUE DU PROBLÈME ISOPÉRIMÉTRIQUE*

Maurice Janet

On attribue en général à B. RIEMANN (1826—1866) la remarque que si une fonction f (satisfaisant aux conditions générales de régularité), prenant des valeurs données sur un contour fermé donné dans le plan, fournit pour l'intégrale $\int\int\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$ étendue à l'intérieur de ce contour la plus petite valeur possible, cette fonction satisfait à l'équation $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$. C'est une conséquence des méthodes classiques du *Calcul des Variations*.

K. WEIERSTRASS (1815—1867) a fait observer que rien ne prouve a priori l'existence d'une telle fonction f (une borne inférieure n'est pas toujours atteinte). C'est ce qui fait que, dans la deuxième partie du 19^e-siècle, les efforts des mathématiciens se sont portés, tant pour le problème précédent que pour beaucoup d'autres plus ou moins analogues, sur les démonstrations d'existence. Il semble bien que c'est le *Mémoire de Schwarz*, publié en 1885 précisément à l'occasion du 70^e anniversaire de WEIERSTRASS, qui a donné la première démonstration rigoureuse de ce genre.

De même, $A(x)$ étant une fonction positive donnée sur le segment (a, b), si pour une fonction y nulle aux extrémités

$$\int_a^b y'^2\,dx \Big/ \int_a^b A(x)\,y^2\,dy$$

prend la plus petite valeur possible, les méthodes classiques du *Calcul des Variations* montrent qu'en appelant m cette valeur, y satisfait à l'équation différentielle $y''+mA(x)\,y=0$. Mais c'est E. PICARD (1856—1941) qui, s'inspirant de H. SCHWARZ, montre l'existence d'une fonction $\bar{y}$ *s'annulant aux extrémités de l'intervalle* (a, b), *non identiquement nulle et telle que* $\bar{y}''+\frac{1}{c}A(x)\bar{y}=0$, *où c est une certaine constante positive.* Il utilise ensuite une certaine identité

$$\left(u'-u\frac{U'}{U}\right)^2+\left(u^2\frac{U'}{U}\right)'-\frac{u^2}{U}\,(U''+kA(x)\,U)=u'^2-kA(x)\,u^2,$$

* Présenté le 1 septembre 1969 par D. S. MITRINOVIĆ.

où u, U sont des fonctions "arbitraires", *U ne s'annulant pas dans l'intervalle* (a, b), et k étant une constante $<\frac{1}{c}$. Il arrive à montrer ainsi que

$$\int_a^b y'^2\,dx \Big/ \int_a^b A(x)\,y^2\,dx,$$

pour y assujettie à s'annuler aux extrémités, est supérieure ou égale à $\frac{1}{c}$, *valeur atteinte pour la fonction particulière $\bar{y}$ trouvée plus haut.*

Mais, ce qui est très intéressant, c'est la manière dont J. HADAMARD (1865—1963) montre dans son *Calcul des Variations* (1910), № 259, 260, 261, comment *on est naturellement amené à cette identité*: observation de LEGENDRE (1752—1833), résultat de JACOBI (1804—1851).

Si donc on se plaçait seulement dans le cas où $A(x)$ est constante (disons $\equiv 1$) la formation de la fonction $\bar{y}$, nulle aux extrémités, et satisfaisant à $\bar{y}'' + \frac{1}{c}\bar{y} = 0$, où c est une constante, relève de méthodes élémentaires, c'est évidemment $\bar{y} = \sin \pi \frac{x-a}{b-a}$ et $\frac{1}{c} = \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$ — de sorte qu'on peut parfaitement imaginer que l'inégalité

$$\int_a^b y'^2\,dx \Big/ \int_a^b y^2\,dx \geqslant \pi^2/(b-a)^2$$

avec le signe égal pour $\bar{y}$ (ou le produit de $\bar{y}$ par une constante $\neq 0$ quelconque) a pu être aperçue par JACOBI par exemple! (voir № 272 de HADAMARD).

Assujettissons y à prendre la même valeur pour a et b, et y' à s'annuler pour a et b; on trouve

$$\int_a^b y''^2\,dx \Big/ \int_a^b y'^2\,dx \geqslant 4\,\pi^2/(b-a)^2,$$

le signe $=$ n'étant obtenu que pour les fonctions $C\left[\cos 2\pi \frac{x-a}{b-a} - 1\right] + D$, où C, D sont deux constantes arbitraires (Bull. Sci. Math. (2) 53 (1929)).

On peut en déduire la formule suivante: ζ étant assujettie à prendre la même valeur pour a et b, on a

$$\int_a^b \zeta'^2\,dx \geqslant 4\,\pi^2/(b-a)^2 \int_a^b \left[\zeta(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b \zeta(x)\,dx\right]^2 dx$$

qu'il est facile d'utiliser pour démontrer *la relation célèbre entre la longueur L d'une courbe fermée du plan et l'aire A intérieur à cette conture* $L^2 \geqslant 4\,\pi A$, l'égalité n'ayant lieu que dans le cas du cercle.

En revenant maintenant à ces questions générales d'existence, c'est D. HILBERT en 1900 qui a imaginé les *méthodes directes* du Calcul des Variations aux quelles fait allusion E. PICARD dans son Traité d'analyse III (2^e^ ou 3^e^ édition) après avoir terminé l'exposition de sa méthode. C'est à un exposé d'une telle méthode qu'est consacré mon article de la Revue générale des sciences 44 (1933), 365 (Problème de la représentation conforme).