PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 247 — № 273 (1969)

255. SUR QUELQUES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES À DEUX FONCTIONS INCONNUES*

*Dragoslav S. Mitrinović***

Dans les articles [**1**], [**2**], [**3**] nous avons indiqué trois procédés d'intégration des équations différentielles ordinaires indéterminées. Ces équations interviennent dans quelques problèmes de géométrie et de la théorie de l'électrotechnique, de l'hydrodynamique, de l'élasticité, etc. Un de ces procédés est le suivant:

Considérons l'équation différentielle indéterminée suivante:

$$F(x, y, z, y', z', \ldots, y^{(n)}, z^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

où y et z sont des fonctions inconnues de la variable x. Si T est une fonction continue et différentiable, il est possible dans certains cas de trouver une solution de l'équation (1) comme paire des fonctions $\{y(x), z(x)\}$, qui vérifient l'égalité $y = T(z)$.

Ce procédé a été appliqué dans les articles [**4**] et [**6**] pour trouver des solutions des certaines équations aux dérivées partielles indéterminées. Cet article a le même but.

1. Soient k, f, F des fonctions données. Considérons l'équation

$$\frac{1}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{k(v)}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + f(u, v)\,F(x, y),$$

où u et v sont des fonctions inconnues des variables x et y.

Avec

$$u = T(v) \not\equiv C \exp\left(\int_{v_0}^{v} \frac{k(t)}{t}\,dt\right) \quad (C \text{ constante arbitraire})$$

cette équation devient

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = G(v)\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + H(v)\,F(x, y), \tag{2}$$

---

* Reçu le 20 janvier 1969.

** R. Ž. Đorđević a bien voulu vérifier les résultats donnés ici et rédiger cette Not[e] en se basant sur notre manuscrit inédit qui date de l'année 1957.

où

$$G(v) = -\frac{vT''}{vT'-kT}, \quad H(v) = \frac{vT}{vT'-kT} f(T(v), v), \quad T' = \frac{dT}{dv}, \quad T'' = \frac{d^2T}{dv^2}.$$

Si $G(v) = H'(v)/H(v)$, c'est-à-dire, si la fonction T satisfait à l'équation différentielle

$$(3) \qquad (v^2T'^2 - kT^2 + k'vT^2) f(T(v), v) + vT(vT' - kT) \frac{df(T(v), v)}{dv} = 0,$$

l'équation (2) se réduit à l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{H'(v)}{H(v)} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + H(v) F(x, y).$$

Cette équation est une équation du type de A. Demoulin.

Dans le cas où

$$F(x, y) = X_1 Y_1 + \cdots + X_m Y_m,$$

où $X_1, \ldots, X_m$ sont des fonctions „arbitraires" de x et $Y_1, \ldots, Y_m$ des fonctions „arbitraires" de y, l'équation de Demoulin [5] a pour solution générale la fonction v définie par

$$\int \frac{1}{H(v)} dv = \int X_1 dx \int Y_1 dy + \cdots + \int X_m dx \int Y_m dy + X + Y,$$

où X et Y sont des fonctions „arbitraires" de x et de y respectivement.

Pour des cas particuliers des fonctions k et f, il est possible de déterminer la fonction T à partir de l'équation (3). Par exemple, si $k(v) \equiv$ constante (>0) et $f(u, v) \equiv 1$, l'équation (3) a la forme suivante

$$v^2T'^2 - kT^2 = 0,$$

et l'on a $T = Cv^{\pm\sqrt{k}}$, où C est une constante arbitraire.

2. Dans [6] on a envisagé l'équation

$$(4) \qquad \frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial u}{\partial y}} = k \frac{\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial v}{\partial y}},$$

où k est une constante arbitraire.

Examinons maintenant le cas où k est une fonction donnée dépendant de u et de v. Avec $u = T(v)$ l'équation (4) devient

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + F(v) \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = 0,$$

avec

$$F(v) = \frac{T''(v)}{[1 - k(T(v), v)] T'(v)},$$

où $\dfrac{\partial v}{\partial y} \not\equiv 0$, et $T'(u) \not\equiv 0$.

L'équation différentielle correspondante est

$$\frac{d^2 v}{dx^2}+F(v)\left(\frac{dv}{dx}\right)^2=0$$

et elle s'intègre en posant $v'=t$.

Dans le cas où k est une fonction donnée de x et de y, l'équation (4) avec $u=T(v)$ prend la forme suivante:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f(x, y)\, g(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=0,$$

où

$$f(x, y)=\frac{1}{1-k(x, y)}, \quad g(v)=\frac{T''(v)}{T'(v)}.$$

L'équation différentielle correspondante est

$$\frac{d^2 v}{dx^2}+f(x, y)\, g(v)\left(\frac{dv}{dx}\right)^2=0, \tag{5}$$

où y joue le rôle d'un paramètre.

C'est seulement dans des cas particuliers pour les fonctions f et g, qu'il est possible de déterminer la solution de l'équation (5). A ce sujet, voir. par exemple, [7].

3. Dans l'article [**8**], on envisage l'équation indéterminée

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\frac{a'^2}{a^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\left(\frac{a'}{a}-\frac{a''}{a'}\right)\frac{\partial f}{\partial t}=0, \tag{6}$$

où $f=f(y, t)$ et $a=a(t)$ sont des fonctions inconnues.

Dans [**4**] on considère l'équation plus générale

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\frac{a'^2}{a^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\left(\frac{a'}{a}-\frac{a''}{a'}\right)\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

aquelle se réduit à l'équation (6) pour $k\equiv 0$.

Nous allons considérer dans ce qui suit l'équation

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+k(y)\frac{a'^2}{a^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\left(\frac{a'}{a}-\frac{a''}{a'}\right)\frac{\partial f}{\partial t}=0, \tag{7}$$

d'où l'on déduit aussi l'équation (6), correspondent au cas $k(y)\equiv 1$.

En posant

$$f=T(a, y), \tag{8}$$

l'équation (7) se réduit à

$$\frac{\partial^2 T}{\partial a^2}+k(y)\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial a}=0.$$

Avec $a=e^{\lambda}$, la dernière équation devient

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2}+k(y)\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. S. Mitrinović, *O jednoj neodređenoj diferencijalnoj jednačini*, Fac. Phylos. Univ. Skopje, Sect. Sci. Nat. Annuaire, **3** (1950), № 6, 1—16;

[2] D. S. Mitrinović, *Sur une équation différentielle indéterminée intervenant dans un problème important de l'Élasticité*, C. R. Acad. Sci. Paris, **232** (1951), 681—683.

[3] D. S. Mitrinović, *Sur un procédé d'intégration d'une équation de Monge*, C. R. Acad. Sci. Paris, **232** (1951), 1334—1336.

[4] D. S. Mitrinović, *Sur certaines équations aux dérivées partielles à deux fonctions inconnues*, Bull. Soc. Math. Phys. Serbie, **8** (1956), 3—6.

[5] A. Demoulin, *Sur une équation aux dérivées partielles du second ordre contenant* $2m+1$ *fonctions arbitraires*, Bull. Soc. Math. France, **21** (1893), 43.

[6] R. Ž. Đorđević, *Sur certaines équations aux dérivées partielles indéterminées*, Ces Publications, № **84** — № **91** (1963), 13—15.

[7] E. Kamke, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen*, Bd. I, Leipzig 1959.

[8] N. Saltikov, *Méthodes immédiates d'intégration d'équations aux dérivées partielles du second ordre*, Bull. Acad. Sci. Math. Nat. Belgrade, **6** (1939), 215—246.