PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 247 — № 273 (1969)

# 250. PRILOG PROUČAVANJU SKUPA MONOKONFOKALNIH ELIPTIČKIH PUTANJA U JEDNOM SPECIJALNOM PROBLEMU DVAJU TELA*

*Dobrivoje Mihailović*

**U članku autor tretira specijalni problem dvaju tela koji je formulisao Karl Schütte, a koji se odnosi na određivanje monokonfokalnog skupa eliptičkih putanja sa zadatom velikom poluosom i fiksiranom kružnom brzinom kretanja u jednom kraju male ose.**

**1.** Problem određivanja vremenskih promena elemenata putanja u problemu dvaju tela, koji u nebeskoj mehanici tretira teorija poremećaja, može se proučavati i ne primenjujući ovu teoriju i to u slučajevima u kojima se radi o velikim promenama elemenata putanja (u Dinamici zvezda), ili su u pitanju promene tih elemenata zavisne od saopštenih impulsa (u Dinamici kosmičkih objekata).

Karl Schütte je u svome radu [1], polazeći od promena vektora brzine, analizirao neposrednim postupkom uticaj tih promena na određivanje elemenata putanje. Ograničavajući se na problem u ravni, moguće je odgovarajuća tri eliptična elementa: $a$ — veliku poluosu putanje, $e$ — numerički ekscenticitet i $v$ — pravu anomaliju, izraziti kao funkcije modula vektora brzine i jediničnog vektora njegovog pravca i smera. K. Schütte polazi od Jacobi-evog integrala u problemu dvaju tela u obliku:

(1) $$v^2=K^2\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

gde je

$$K^2=k^2(1+m)$$

i uvodi u analizu pojam kružne brzine koju definiše kao brzinu u tački putanje u kojoj je radijus vektor $r=a$ tj.

(2) $$v_K{}^2=\frac{K^2}{r}.$$

Na osnovu (2) integral žive sile dobija oblik

$$v^2=v_K{}^2 r\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right),$$

* Primljeno 7. II 1969.

ili

(3) $$\left(\frac{v}{v_K}\right)^2 = 2 - \frac{r}{a}.$$

Uvođenjem nove promenljive

(4) $$f = \left(\frac{v}{v_K}\right)^2$$

relacija (3) daje

(5) $$f = 2 - \frac{r}{a},$$

pri čemu, pošto je $f \geqslant 0$, mora biti

(6) $$0 \leqslant f \leqslant 2.$$

Neka je jednačina eliptične putanje zadata u obliku

(7) $$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v},$$

gde je $e$ ekscentricitet elipse. Eliminiacijom radijus vektora $r$ iz (3) i (7) dobija se

(8) $$e^2 + e(2-f)\cos v + 1 - f = 0.$$

Ograničimo se na specijalnom slučaju koji uzima i SCHÜTTE u razmatranje, naime kada je

(9) $$f = 1, \quad \text{tj.} \quad v = v_K.$$

Tačka eliptične putanje, u kojoj je brzina jednaka kružnoj brzini, određena je radijus vektorom $r = a$ tj. predstavlja krajnju tačku male poluose elipse. Ekscentricitet putanje se na osnovu (8) i (9) određuje iz relacije

$$e^2 + e\cos v = 0,$$

odakle je

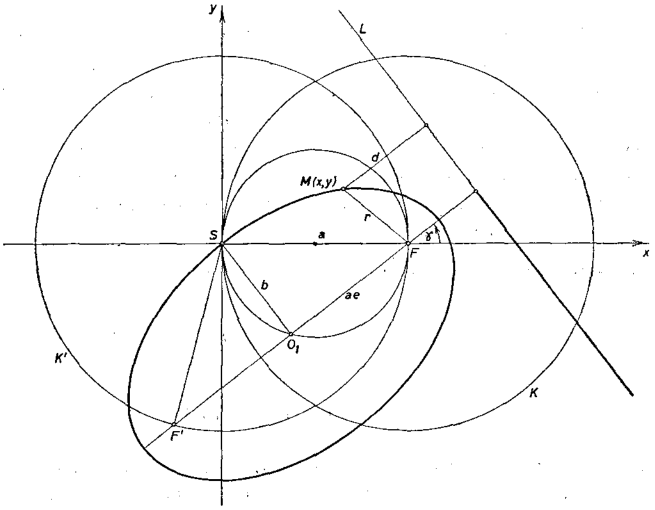
(10) $$e_1 = 0, \quad e_2 = -\cos v.$$

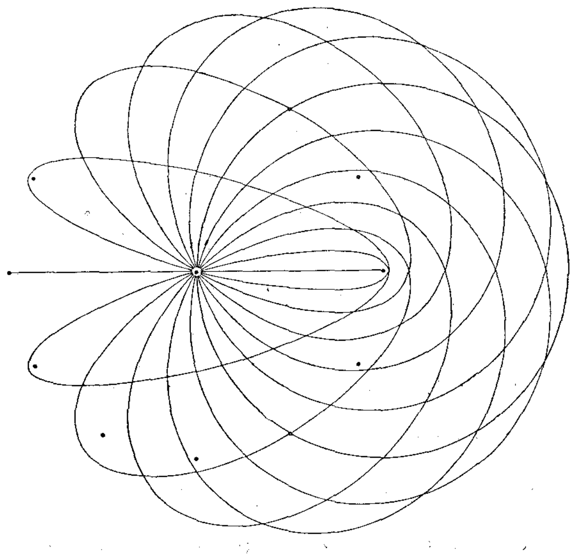
Rešenje $e_1$ definiše kružnu putanju sa centrom u žiži $F$ poluprečnika $r = a$. Rešenjem $e_2$ definisan je skup elipsi sa zajedničkom žižom $F$ i zajedničkom jednom krajnjom tačkom $S$ malih poluosa $(r = a)$, u kojoj je brzina tela jednaka kružnoj brzini $v_K$. To znači da rešenje ovoga specijalnog problema nije jednoznačno: ono je definisano skupom monokonfokalnih elipsi sa zajedničkom žižom $F$, čiji jedan kraj male poluose leži u tački $S$ određenoj relacijom $r = a$, u kojoj vektor brzine ima vrednost kružne brzine $v_K$ i velikom poluosom $a$ elipse.

K. SCHÜTTE u članku [1] je na osnovu elementarnih geometrijskih razmatranja izveo zaključke o osobinama ovoga skupa elipsi.

**2.** Cilj je ovoga članka da, razmatrajući problem određivanja putanja sa kružnom brzinom u kraju male poluose elipse, analitički definiše skup monokonfokalnih elipsi i na osnovu toga izvede njihove osobine u uočenom specijalnom problemu dvaju tela.

Jednačina skupa monokonfokalnih eliptičnih putanja može se izvesti na ovaj način. Neka je $F$ zajednička žiža, a $S$ zajednička krajnja tačka malih poluosa elipsi. Odaberimo DEKARTov pravougli koordinatni sistem tako da njegov početak leži u tački $S$, a osa $OX$ da se poklapa sa $SF=a$.



Skup monokonfokalnih eliptičnih putanja

Glavni dijametar elipse koji prolazi kroz tačku $F$ ima jednačinu

(11) $$y=\lambda(x-a)$$

gde je $\lambda=\operatorname{tg}\gamma$, pri čemu je $\gamma$ ugao koji ovaj dijametar zaklapa sa pozitivnim smerom ose $SX$. Neka je $O_1$ ortogonalna projekcija temena elipse $S$ na glavni dijametar (11), tada je

(12) $$SO_1=b.$$

Druga žiža $F'$ elipse leži na glavnom dijametru (11), pri čemu je $SF' = a$. Kada ugao $\gamma$ varira glavni dijametar će se obrtati oko stalne žiže $F$; velika poluosa $a$ će ostati konstantna. Teme $S$ će predstavljati zajedničko teme svih elipsi koje pripadaju monokonfokalnom skupu, dok će se ekscentricitet i mala poluosa elipse menjati. Iz ovoga neposredno proizilazi da će geometrijsko mesto žiža $F'$ biti kružna linija $K'$ sa centrom u koordinatnom početku $S$ i poluprečnikom $a$. Krug $K(F, a)$ predstavlja onaj element skupa monokonfokalnih elipsi koji odgovara vrednosti ekscentriciteta $e = 0$. Brzina kretanja tačke na ovome krugu predstavlja napred uvedenu kružnu brzinu čiji će intenzitet predstavljati i modul brzine tačke u temenu $S$ ma koje elipse iz posmatranog skupa. Nosači ovih vektora brzina su paralelni velikoj osi eliptične putanje, a smer vektora odgovara smeru kretanja tela na odgovarajućoj putanji.

Jednačina direktrise koja odgovara žiži $F$ je

(13) $$y = -\frac{x}{\lambda} + \mu \qquad (L)$$

ili

(14) $$x + \lambda y - \lambda\mu = 0 \qquad (L).$$

Uočimo tačku $M(x, y)$ na elipsi, pa označimo sa $r$ njeno rastojanje od žiže $F$, a sa $d$ — njeno rastojanje od direktrise $(L)$. Po definiciji elipse je

$$\frac{r}{d} = e,$$

ili

(15) $$r^2 = e^2 d^2.$$

Kako je

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}; \quad d = \frac{x + \lambda y - \lambda\mu}{\pm\sqrt{1+\lambda^2}},$$

to relacija (15) daje

$$(x-a)^2 + y^2 = e^2 \cdot \frac{(x + \lambda y - \lambda\mu)^2}{1+\lambda^2}$$

ili

$$(1+\lambda^2)\left[(x-a)^2 + y^2\right] = e^2 (x + \lambda y - \lambda\mu)^2.$$

Posle sređivanja ova jednačina daje

(16) $$(1+\lambda^2-e^2)\,x^2 - 2e^2\lambda\,xy + (1+\lambda^2-e^2\lambda^2)\,y^2$$
$$+ 2\left[e^2\lambda\mu - a(1+\lambda^2)\right]x + 2e^2\lambda^2\mu\,y + \left[a^2(1+\lambda^2) - e^2\lambda^2\mu^2\right] = 0.$$

Uslov da kriva (16) prođe kroz koordinatni početak $S(0,0)$ je

(17) $$a^2(1+\lambda^2) - e^2\lambda^2\mu^2 = 0.$$

Stoga jednačina (16) skupa monokonfokalnih elipsi dobija oblik

(18) $$(1+\lambda^2-e^2)\,x^2 - 2e^2\lambda\,xy + (1+\lambda^2-e^2\lambda^2)\,y^2$$
$$+ 2\left[e^2\lambda\mu - a(1+\lambda^2)\right]x + 2e^2\lambda^2\mu\,y = 0.$$

Pokazaćemo da ovaj skup krivih zavisi samo od jednog parametra. Relacijom (17) uspostavljena je jedna veza između parametara $e$, $\lambda$, $\mu$. Dalje iz $\Delta O_1SB$ proizilazi

$$b = a \sin \gamma; \quad b = \frac{a \operatorname{tg} \gamma}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma}},$$

tj.

(19) $$b = \frac{a\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}.$$

Odavde je

(20) $$b^2 = \frac{a^2 \lambda^2}{1 + \lambda^2},$$

a kako je

$$b^2 = a^2 (1 - e^2),$$

to iz (20) proizilazi

$$1 - e^2 = \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2},$$

tj.

(21) $$e^2 = \frac{1}{1 + \lambda^2}$$

koja predstavlja drugu relaciju kojom su vezani parametri $e$ i $\lambda$.

Uslovna relacija (17) na osnovu (21) daje

$$a^2 (1 + \lambda^2)^2 - \lambda^2 \mu^2 = 0,$$

odakle je

(22) $$\lambda\mu = a (1 + \lambda^2).$$

Budući da je $a > 0$ i $1 + \lambda^2 > 0$, to $\mu$ i $\lambda = \operatorname{tg} \gamma$ moraju imati isti znak.

Eliminacijom parametara $e$ i $\mu$ pomoću relacija (21) i (22) iz jednačine (16) dobija se jednačina skupa monokonfokalnih eliptičkih putanja u obliku

(23) $$[(1 + \lambda^2)^2 - 1] x^2 - 2\lambda xy + [(1 + \lambda^2)^2 - \lambda^2] y^2$$
$$- 2a\lambda^2 (1 + \lambda^2) x + 2a\lambda (1 + \lambda^2) y = 0,$$

u kojoj je $\lambda$ promenljivi parametar.

**3.** Na osnovu jednačine (23) može se pokazati da prave

(24) $$y = \lambda (x - a) \quad (O_1 F), \qquad y = -\frac{x}{\lambda} \quad (Sa_1)$$

zaista predstavljaju glavne dijametre elipsi. Kao što je poznato koeficijenti pravaca glavnih dijametara krivih drugog reda sa centrom određuju se iz jednačine

$$a_{12} S^2 + (a_{11} - a_{22}) S - a_{12} = 0.$$

Iz jednačine (23) imamo

$$a_{11} = (1 + \lambda^2)^2 - 1, \quad a_{12} = -\lambda, \quad a_{22} = (1 + \lambda^2)^2 - \lambda^2,$$

pa prethodna jednačina daje

(25) $$\lambda S^2 + (1 - \lambda^2) S - \lambda = 0,$$

čija su rešenja $S_1 = \lambda$, $S_2 = -\frac{1}{\lambda}$, čime je potvrđeno da prave (24) predstavljaju glavne dijametre elipsi.

Rešenja sistema jednačina (24) daju koordinate centra $O_1(\xi, \eta)$ u parametarskom obliku:

$$\xi = \frac{a\lambda^2}{1+\lambda^2}, \quad \eta = -\frac{a\lambda}{1+\lambda^2}. \tag{26}$$

Eliminacijom parametra $\lambda$ nalazimo

$$\left(\xi - \frac{a}{2}\right)^2 + \eta^2 = \frac{a^2}{4}. \tag{27}$$

To znači da je geometrijsko mesto centara monokonfokalnih elipsi krug sa centrom u tački $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ i poluprečnikom $\frac{a}{2}$. Do ovoga rezultata može se doći i neposrednim geometrijskim razmatranjem.

**4.** Jednačina skupa direktrisa $(L)$ koje odgovaraju žiži $F$ je prema (14) i (22)

$$x + \lambda y - a(1+\lambda^2) = 0. \tag{28}$$

Izvodna jednačina po parametru $\lambda$ daje

$$y - 2a\lambda = 0. \tag{29}$$

Eliminacijom parametra $\lambda$ iz (28) i (29) nalazi se obvojnica skupa direktrisa

$$y^2 = -4a(x-a). \tag{30}$$

Iz neposrednih elementarnih geometrijskih rasuđivanja proizilazi da je geometrijsko mesto drugih žiža monokonfokalnog skupa elipsi krug

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{31}$$

Koordinate ovih žiža kao funkcije parametra $\lambda$ dobijaju se iz (31) i $y = -x/\lambda$ u obliku

$$x = \frac{a}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \quad y = \frac{a\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}.$$

**5.** U vezi sa obvojnicom skupa monokonfokalnih elipsi učinićemo sledeću napomenu.

U članku **[1]** K. Schütte navodi da za skup monokonfokalnih eliptičkih putanja egzistira obvojnica i da ova takođe predstavlja elipsu. Žiže ove elipse leže u tačkama $S$ i $F$, a njena velika poluosa $a_0$ i ekscentricitet $e_0$ imaju respektivno vrednosti:

$$a_0 = \frac{3}{2}\overline{FS} = \frac{3}{2}a; \quad e_0 = \frac{1}{3}.$$

Mala poluosa obvojnice određuje se iz relacije

$$b_0^2 = a_0^2(1 - e_0^2),$$

tj. na osnovu navedenih vrednosti za $a_0$ i $e_0$

$$b_0 = a\sqrt{2}.$$

Kako centar ove elipse leži u tački $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, to je njena jednačina

$$\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} = 1,$$

tj.

$$(E) \qquad \frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{9}{4}a^2} + \frac{y^2}{2a^2} = 1.$$

Svaka putanja iz skupa monokonfokalnih elipsi dodiruje elipsu $(E)$. Odatle proizilazi da uočena masa, bez obzira na to po kojoj se od eliptičkih putanja kreće, neće izaći iz unutrašnjosti zatvorene oblasti čiju granicu predstavlja kriva $(E)$.

Iz napred izvršenih razmatranja mogu se izvesti sledeći zaključci:

1. da obvojnica $(E)$ predstavlja graničnu liniju oblasti iz koje uočena masa ne izlazi u toku kretanja;

2. da će se u toku kretanja po bilo kojoj od monokonfokalnih eliptičkih putanja, u određenom momentu, pokretna masa naći na obvojnici $(E)$.

S ovim u vezi od interesa je napomenuti da u Nebeskoj mehanici ima problema u kojima je egzistencija obvojnica vezana za mehaničku prirodu problema. Takav je slučaj sa obvojnicom HILL-ovih graničnih krivih u asteroidnom problemu triju tela sa eliptičkom putanjom perturbirajuće mase, koji tretira i rešava A. WILKENS u članku [2].

U Dinamici zvezdanih sistema se, u slučaju kada se funkciia raspodele koordinata i projekcija brzina znatno ne menja pri punom obrtu Galaksije, smatra aproksimativno da se Galaksija nalazi u stacionarnom stanju. B. LINDBLAD je pokazao da se tretiranje problema može izvršiti uvođenjem skupa karakterističnih dijagrama (parabola), čija obvojnica predstavlja geometrijsko mesto tačaka koje se kreću po kružnim putanjama i koja predstavlja deo granice one oblasti u kojoj se vrše moguća kretanja zvezda, uključujući u ova i rotaciju (v. npr. [3]).

## LITERATURA

[1] KARL SCHÜTTE, *Die Bahnbestimmung aus dem Vektor der Bahngesshwindigkeit und der Einffluss einer Änderung desselben auf die Bahnelemente*, Forschungsbericht der Gesellschaft für Weltraumforschung, e. V. Nr. 13 (1953/54), 7—9.

[2[ A. WILKENS, *Über die Grenzkurven und ihre Einhüllende im asteroidischen Dreikörperproblem bei elliptischer Bahn des stö-enden Körpers*, Probleme der Astronomie, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1924, S. 153—168.

[3] B. LINDBLAD, *Cosmogonic conseqences of a theory of the stellar system*, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik, Bd 19 A, Nr. 45, Stockholm, 1926, S. 1—15.

Zusammenfassung

## BEITRAG ZUR FORSCHUNG DER SCHAR DER MONOKONFOKALEN ELLIPTISCHEN BAHNEN IN EINEM SPECIELLEN ZWEIKÖRPERPROBLEM

*Dobrivoje Mihailović*

In dieser Arbeit analysiert der Verfasser ein specielles Zweikörperproblem, welches KARL SCHÜTTE in seinem Artikel [1] formuliert und geometrisch interpretiert hatte.

Das Problem bezieht sich auf die Bahnbestimmung mit der fixierten grossen Halbachse und der gegebenen Kreisbahngeschwindigkeit in dem Endpunnkt der kleinen Achsen der elliptischen Bahn.

Von der Formulierung des Problems in [1] ausgehend, gelangt der Verfasser zur Gleichung der Schar des monokonfokalen Bahnen und zwar in der Form (23) gekommen. Er zeigte auch auf einige Charakteristiken dieser Schar. Neben der analytischen Bestättigung des Ergebnisses von SCHÜTTE zeigte der Verfasser, dass der geometrische Ort der Mittelpunkte der elliptischen Bahnen der Kreis (27) ist, und dass die Hüllkurve der Leitlinienscharen die einem gemeinsamen Brennpunkt entsprechen eine mit (30) Parabel ist.