

**АНАЛИЗА НЕЛИНЕАРНИХ СИСТЕМА АУТОМАТСКОГ
УПРАВЉАЊА ПРИМЕНОМ АЛГЕБАРСКИХ
КРИТЕРИЈУМА АСИМПТОТСКЕ СТАБИЛНОСТИ**

Милић Р. Стојић

ПРЕДГОВОР

Једна врло широка и у пракси често срећана класа нелинеарних континуалних система аутоматској управљања може се описати системом диференцијалних једначина, који се разликује од одговарајуће линеарној хомогеној систем диференцијалних једначина са константним коефицијентима само по једној, и.зв., адитивној нелинеарности. При томе карактеристика те нелинеарности може бити функција од било које варијабле система или од њихове линеарне комбинације. Присуство ове нелинеарности може да се оледа, на пример, у појачивачу грешке или извршном органу регулатора, иако они, било да су електронски, механички, електромеханички, пневматски и сл. у суштини поседују нелинеарни карактер. Ово се односи и на разне друге делове регулације.

Поред поменутих класа нелинеарних континуалних система аутоматској управљања постоји слична класа нелинеарних импулсних система која, због изузетној практичној значаја, у последње време привлачи све већу пажњу аутора теорије импулсних система. У ову класу система, пре свега, спадају разни регулатори за хемијске и радиолокационе системе, импулсни системи у процесној индустрији, неки специјални системи аутоматској управљања и сл. Шта више, у великом броју случајева разни физиолошки процеси могу се адекватно описати одговарајућим моделом нелинеарној импулсној систем аутоматској управљања.

У овом раду се, на основу добро дефинисане проблема анализе стабилности нелинеарних континуалних и импулсних система аутоматској управљања, у сврху анализе и синтезе постојеће класе нелинеарних система примењује алгебарски приступ. Пре свега, показано је да изведени алгебарски критеријуми стабилности процеса и положења равнотеже своје изражење довољних услова за асимптотску стабилност нелинеарној континуалној и импулсној систем на анализу потребних и довољних

услова стабилности, ресективно, одговарајуће линеарној континуалној и импулсној систему. Ови критеријуми су изведени на бази претходно уопштених одговарајућих фреквенцијских критеријума. Они су јединствени јер, за разлику од фреквенцијских критеријума, важе без обзира какав карактер стабилности има линеарни део система. Шта више, закључак у погледу еквиваленције довољних услова за стабилност нелинеарној систему и пошребних и довољних услова за стабилност одговарајуће линеарној систему проширен је и у смислу степености и релативности степености асимптотске стабилности.

Поменути алгебарски критеријуми представљају базу на основу које се даље моћу, у сврху анализе и синтезе посматраних класа нелинеарних система, применили познате алгебарске методе теорије линеарних система аутоматској управљања. Истина, ова примена није неосредна, већ се мора прилагодити самој природи проблема. Тако, на пример, методом параметарској пресликавања, која је у овом раду примењена, пресликавања се не врше, као код линеарних система, у равни променљивих параметара система, већ у равни неких променљивих које имплицитно, али једнозначно у себи садрже како информације о карактеру и величини додатних ограничења на карактеристику нелинеарности, тако и о величини променљивих параметара линеарној дела система. Захваљујући томе сва ири моћуња задатка из оквира проблема анализе стабилности нелинеарној систему (континуалној или импулсној) моћуће је решити практично једновремено, јачно и на начин који захтева релативно проста рачунања, која се сва изведе и реалном домену у оквиру алгорита једној за употребу како аналиној тако и дигиталној рачунара.

Треба нарочито истати чињеницу да је овакав прилаз омоћуио да се, посредством z -трансформације, анализа и синтеза нелинеарних импулсних система изврши без апроксимација и увођења било каквих додатних претпоставки. Исто тако, применом z -модификоване трансформације, цео прилаз је без додатних тешкоћа примењен на нелинеарне импулсне системе са чистим кашњењем.

Ова публикација садржи четири рада који заједно представљају знајно скаћену верзију докторске дисертације. Један део изложеној материјала већ је предложен за штампу у часопису „Аутоматика и телемеханика“ (Издателство АН СССР) и очекује се да буде публикован у виду два рада (№ 5 и 7, 1969).

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИМЕНЕНИЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Милич Р. Стоич

1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Выведены алгебраические критерии абсолютной устойчивости нелинейных импульсных автоматических систем. Эти критерии получены на основе условий абсолютной устойчивости и степени устойчивости положения равновесия и процессов Я. З. Цыпкина для нелинейных импульсных систем автоматического регулирования. Предлагаемые алгебраические критерии позволяют решать задачи, связанные с исследованием абсолютной устойчивости и степени устойчивости стационарных и одного из классов нестационарных нелинейных импульсных систем автоматического регулирования.

Введение

В последние годы большое внимание уделяется разработке методов исследования абсолютной устойчивости нелинейных импульсных автоматических систем (ИАС). Работы [1—14] посвящены развитию различных вариантов второго метода Ляпунова применительно к нелинейным разностным уравнениям.

В последнее время внимание было привлечено к работам [15—26], в которых задача абсолютной устойчивости нелинейных ИАС решается на основе развития метода В. М. Попова.

Формулировки критериев абсолютной устойчивости весьма разнообразны и специфичны в зависимости от характера передаточной непрерывной части нелинейной ИАС, которая может быть устойчива, нейтральна или неустойчива. Однако, укажем на статью [22], в которой предлагается частотный критерий абсолютной устойчивости нелинейных ИАС, охватывающий все упомянутые случаи. Этот критерий характеризуется тем, что его аналитическая формулировка и соответствующая графическая интерпретация получается небольшим видоизменением формулировки обычного аналога Найквиста и родственных ему критериев для линейных ИАС.

Метод В. М. Попова также был распространен и на импульсные системы, содержащие произвольное число нелинейных элементов, характеристика каждого из которых зависит от одного аргумента, т.е. на импульсные системы со многими нелинейностями [26]. При этом полученный критерий не допускает уже наглядной графической интерпретации.

Цель настоящей работы состоит в нахождении алгебраических критериев абсолютной устойчивости и степени устойчивости положения равновесия и процессов для нелинейных ИАС. Предлагаемые алгебраические критерии сводят проблему нахождения достаточных условий абсолютной устойчивости положения равновесия и процессов для нелинейных ИАС к исследованию необходимых и достаточных условий устойчивости соответствующей линейной ИАС, которая получается заменой нелинейного элемента в нелинейной ИАС соответствующим линейным усилителем с комплексным коэффициентом усиления.

1.1. Постановка задачи

Большой класс нелинейных ИАС может быть сведен к структуре (рис. 1), представляющей собой соединение нелинейного элемента (НЭ) и линейной импульсной части (ЛИЧ).

Характеристика нелинейного элемента $\Phi(x)$ может быть произвольной однозначной кусочно-непрерывной действительной функцией, определенной для всех действительных значений x , удовлетворяющей условию

$$(1) \quad \Phi(0) = 0$$

и дополнительному неравенству

$$(2) \quad r < \frac{\Phi(x)}{x} < k$$

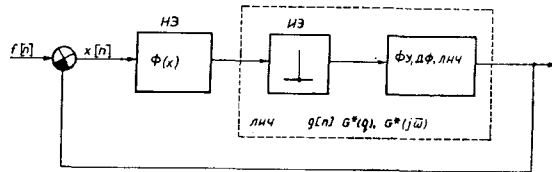


Рис. 1. Нелинейная импульсная автоматическая система

т.е. должна принадлежать сектору (r, k) (рис. 2), где $k > 0$, а r может быть положительным или равным нулю.

ЛИЧ включает в себя импульсный элемент (ИЭ), формирующее устройство (ФУ), дискретный фильтр (ДФ) и линейную непрерывную часть системы (ЛНЧ).

ЛИЧ характеризуется импульсной характеристикой $g[n]$, передаточной функцией $G^*(q)$ или частотной характеристикой $G^*(j\bar{\omega})$. Эти характеристики связаны между собой соотношениями теории дискретного преобразования Лапласа или z-преобразования [27].

$$(3, а) \quad G^*(q) = D \{g[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} g[n]$$

$$(3, б) \quad G^*(j\bar{\omega}) = G^*(q)_{q=j\bar{\omega}}$$

где $\bar{\omega} = \bar{\omega}T$ — относительная частота, T — период повторения.

Назовем нелинейную ИАС, в которой НЭ заменен линейным элементом (ЛЭ), характеристика которого находится в секторе, (r, k) , линеаризованной.

В работе [22] было показано, что достаточными, а в некоторых случаях и необходимыми условиями абсолютной устойчивости нелинейных ИАС со стационарной или нестационарной характеристикой НЭ, принадлежащей сектору (r, k) , является выполнение неравенства

$$(4) \quad \operatorname{Re} \frac{G^*(j\bar{\omega})}{1 + rG^*(j\bar{\omega})} + \frac{1}{k-r} > 0 \quad (0 \leq \bar{\omega} < \pi)$$

и требование, чтобы линеаризованная ИАС была устойчива при коэффициенте усиления ЛЭ, равном r .

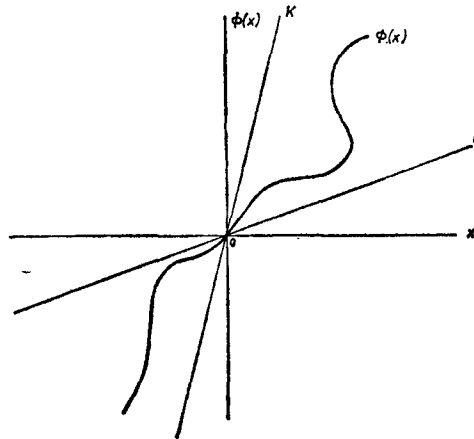


Рис. 2. Характеристика нелинейного элемента, принадлежащая сектору (r, k)

Целью данной работы является формулировка достаточного алгебраического критерия абсолютной устойчивости рассматриваемого класса нелинейных ИАС, основанного на использовании передаточной функции ЛИЧ $G^*(q)$. Предлагаемый критерий позволяет исследовать абсолютную устойчивость нелинейной ИАС путем исследования распределения корней характеристического уравнения некоторой линейной ИАС, полученной при замене НЭ нелинейной ИАС линейным элементом с комплексным коэффициентом усиления.

1.2. Алгебраические критерии абсолютной устойчивости

С целью получения алгебраического критерия абсолютной устойчивости нелинейных ИАС, наряду с приведенными выше условиями частотного критерия абсолютной устойчивости нелинейных ИАС, дадим еще и чисто геометрическую интерпретацию неравенства (4).

В общем случае, когда $r \neq 0$, преобразуем неравенство (4), умножая его левую часть на $r > 0$, в результате получим

$$(5) \quad \operatorname{Re} \frac{BkG^*(j\bar{\omega})}{1+BkG^*(j\bar{\omega})} + \frac{B}{1-B} > 0, \quad \forall \omega \in (0, \infty)$$

где $B = r/k$ ($0 < B < 1$), а

$$(6) \quad kG^*(j\bar{\omega}) = U + jV.$$

Далее найдем на плоскости U, jV геометрическое место точек, соответствующее замене в (5) знака неравенства на равенство. Подставляя (6) в левую часть (5), находя вещественную часть и приравнявая её нулю, получим уравнение искомым кривых

$$(7) \quad \left[U + \frac{1}{2B}(1+B) \right]^2 + V^2 = \frac{1}{4B^2}(1-B)^2.$$

Уравнение (7) определяет семейство окружностей, проходящих через точку $(-1; j0)$, имеющих радиус $R = (1-B)/2B$ и расположенных левее прямой $U = -1$ (рис. 3). Каждой из окружностей будет соответствовать свое значение $B = r/k > 0$.

Если уравнение (7) напишем в параметрической форме, то получим

$$(8) \quad U = -\frac{1}{2B}(1+B) + \frac{1}{2B}(1-B)\cos\beta, \quad V = \frac{1}{2B}(1-B)\sin\beta.$$

Таким образом, каждая из точек на соответствующей B — окружности определяется известным значением параметра β , где $0 < \beta < 2\pi$.

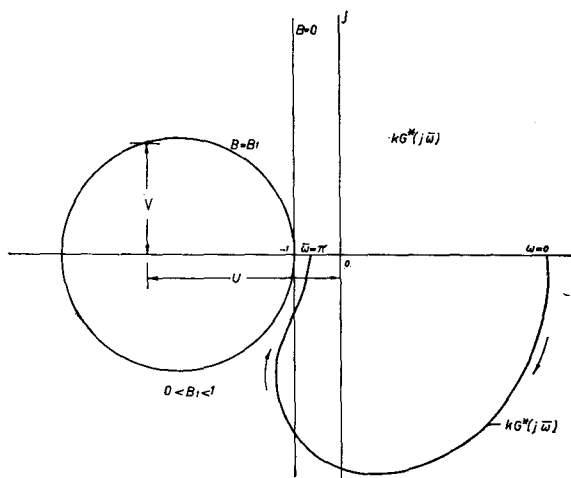


Рис. 3. К графической интерпретации достаточных частотных условий абсолютной устойчивости нелинейных ИАС

Нетрудно показать, что при $B=1$ окружность вырождается в точку $(-1; j0)$, а при $B=0$ в окружность бесконечного радиуса, т.е. в прямую, проходящую через точку $(-1; j0)$ параллельно мнимой оси на плоскости $kG^*(j\bar{\omega})$ (рис. 3).

Неравенство (5) или (4) будет выполняться, если кривая на комплексной плоскости $kG^*(j\bar{\omega})$, описываемая вектором (6) при изменении $\bar{\omega}$ от 0 до π , находится вне соответствующей B — окружности. Это легко установить, полагая что $U=V=0$ в (5), при $k>0, r>0$.

С целью получения алгебраического критерия абсолютной устойчивости нелинейных ИАС, вводим следующую комплексную рациональную функцию

$$(9) \quad F^*(q) \triangleq kG^*(q) - (U + jV),$$

где $kG^*(q)$ представляет собой передаточную функцию разомкнутой линеаризованной ИАС, полученной из исходной нелинейной ИАС (рис. 1) заменой НЭ линейным усилителем с коэффициентом усиления k , а U и V определяются из (8).

Как будет показано ниже, можно дать следующую формулировку критерия абсолютной устойчивости нелинейных ИАС:

Для того, чтобы нелинейная ИАС (рис. 1) была абсолютно устойчивой, достаточно, чтобы характеристика НЭ принадлежала сектору (r, k) и чтобы при всех значениях U и V определяемых уравнениями (8), где $B=r/k$ и $\beta \in [0, 2\pi]$, все корни уравнения $F^*(q)=0$ или нули (9) имели бы отрицательные вещественные части.

Для доказательства этого критерия устойчивости можно воспользоваться теми же самыми рассуждениями, на основе которых был получен аналог критерия Найквиста для анализа устойчивости линейных ИАС [27].

Как известно, чтобы некоторая линейная ИАС, имеющая характеристическое уравнение

$$(10) \quad W^*(q) = \bar{k}K^*(q) + 1 = 0,$$

где $\bar{k}K^*(q)$ представляет собой передаточную функцию разомкнутой системы, была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения (10) или нули $W^*(q)$ имели отрицательные вещественные части.

В соответствии с аналогом критерия Найквиста годограф частотной характеристики $\bar{k}K^*(j\bar{\omega})$ при возрастании $\bar{\omega}$ от 0 до π , в общем случае, когда приведенная непрерывная часть рассматриваемой линейной ИАС неустойчива, охватывает точку $(-1; j0)$ в положительном направлении (т.е. против движения часовой стрелки) $\nu/2$ раз, где ν — число полюсов $K^*(q)$ или $W^*(q)$ с положительной действительной частью.

Для устойчивой линейной ИАС, приведенная непрерывная часть которой нейтральна или устойчива, годограф частотной характеристики $\bar{k}K^*(j\bar{\omega})$ при возрастании $\bar{\omega}$ от 0 до π не охватывает точку $(-1; j0)$.

Предположим теперь, что все корни уравнения $F^*(q)=0$ или нули (9) имеют отрицательные вещественные части и что передаточная функция ЛИЧ $G^*(q)$ в общем случае может быть неустойчива. Используя те же самые рассуждения, на основе которых получен аналог критерия Найквиста для линейных ИАС, нетрудно показать, что при этом годограф частотной характеристики $kG^*(j\bar{\omega})$ ЛИЧ при изменении $\bar{\omega}$ от 0 до π охватывает

точку $(U; jV)$ в положительном направлении $\mu/2$ раз (рис. 3), где μ равняется числу полюсов $G^*(q)$ или $F^*(q)$ с положительной вещественной частью. Однако, в том случае, если приведенная ЛИЧ нейтральна или устойчива, т.е. $\mu=0$, то годограф частотной характеристики $kG^*(j\bar{\omega})$ при изменении $\bar{\omega}$ от 0 до π не охватывает точки $(U; jV)$.

Следует, однако, подчеркнуть, что в соответствии с предложенным выше критерием абсолютной устойчивости нелинейных ИАС, при всех значениях U и V определяемых уравнениями (8), где $B=r/k$ и $\beta \in [0, 2\pi]$ вещественные части всех корней уравнения $F^*(q)=0$ должны быть отрицательными. В этом случае приведенные выше рассуждения, касающиеся числа оборотов годографа частотной характеристики ЛИЧ $kG^*(j\bar{\omega})$ вокруг точки $(U; jV)$ будут справедливы для всех точек, принадлежащих соответствующей B — окружности.

Из этого следует, что если уравнение $F^*(q)=0$ при всех значениях U и V , определяемых уравнениями (8) где $B=r/k$ и $\beta \in [0, 2\pi]$, имеет все корни с отрицательной вещественной частью, то годограф частотной характеристик $kG^*(j\bar{\omega})$ не пересекает соответствующую B — окружность.

В самом деле, если ЛИЧ неустойчива и число полюсов с положительной вещественной частью функции $G^*(q)$ равно μ , то годограф частотной характеристики $kG^*(j\bar{\omega})$ при изменении $\bar{\omega}$ от 0 до 2π охватывал бы в положительном направлении соответствующую B — окружность $\mu/2$ раз (рис. 4, а).

В частности, для устойчивых или нейтральных ЛИЧ ($\mu = 0$), годограф частотной характеристики не пересекает и не охватывает соответствующую B — окружность (рис. 4, б). При этом для нейтральных ЛИЧ, как показано в [27], необходимо дополнить $kG^*(j\bar{\omega})$ дугой бесконечно большого радиуса (рис. 4в).

Таким образом, мы приходим к следующему заключению: Какая бы ни была ЛИЧ (устойчива, нейтральна или неустойчива), если уравнение $F^*(q)=0$ при всех значениях U и V , определяемых уравнениями (8) где $B=r/k$ и $\beta \in [0, 2\pi]$, имеет все корни с отрицательными вещественными частями, то частотная характеристика ЛИЧ $kG^*(j\bar{\omega})$ при изменении $\bar{\omega}$ от 0 до π будет находиться вне соответствующей B — окружности.

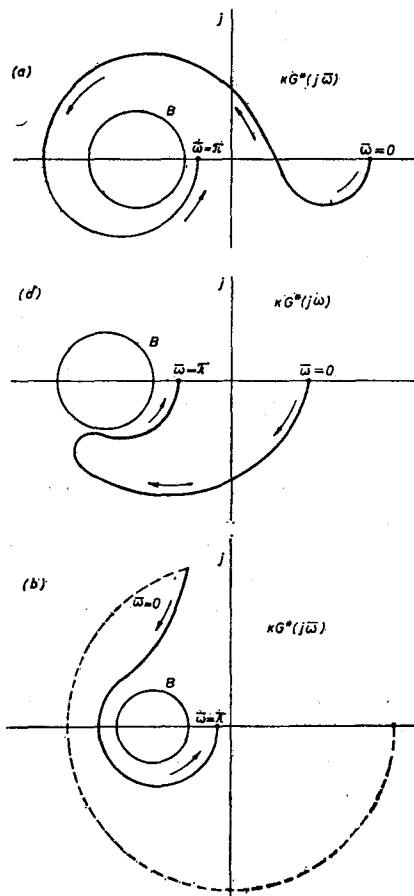


Рис. 4. К формулировке достаточного алгебраического критерия абсолютной устойчивости нелинейных ИАС. Частотные характеристики: а-ЛИЧ неустойчива ($\mu=2$), б-ЛИЧ устойчива ($\mu=0$), в-ЛИЧ нейтральна ($\mu=0$) (астатизм 3-ого порядка)

Отсюда видно, что первое условие частотного критерия абсолютной устойчивости нелинейных ИАС [выполнение неравенства (4) или (5)] содержится в сформулированном выше критерии.

Производя подстановку $\beta=0$ в (8), при любых B в получим $U=-1$, $V=0$ и, следовательно, $F^*(q)=0$ приводится к уравнению

$$(11) \quad kG^*(q) + 1 = 0$$

которое является характеристическим уравнением линеаризованной ИАС с коэффициентом ЛЭ равным k .

Подставляя $\beta=\pi$ в (8), получим $U=-1/B=k/r$, $V=0$ и, следовательно, уравнение $F^*(q)=0$ приводится к виду

$$(12) \quad rG^*(q) + 1 = 0.$$

Последнее уравнение является характеристическим уравнением линеаризованной ИАС с коэффициентом усиления ЛЭ равным r , которая по второму условию частотного критерия абсолютной устойчивости, приведенному в предыдущем разделе, должна быть устойчива, т.е. все корни уравнения (12) должны быть с отрицательной вещественной частью.

Заметим, также, что по сформулированному выше критерию все корни уравнения $F^*(q)=0$ должны быть с отрицательной вещественной частью при всех U и V , удовлетворяющих уравнениям (8) т.е. и при $U=-1$, $V=0$ и $U=-k/r$, $V=0$. Как было показано, в этих случаях уравнение $F^*(q)=0$ приводится соответственно к уравнениям (11) и (12) и, следовательно, эти уравнения должны иметь все корни с отрицательной вещественной частью. Из этого следует, что если имеет место сформулированный выше критерий, то линеаризованные ИАС, получаемые заменой НЭ в нелинейной ИАС (рис. 1) линейным элементом с коэффициентом усиления k или r имеющие характеристические уравнения (11) или (12), будут устойчивы.

На основании выше изложенного можно заключить, что и второе условие частотного критерия абсолютной устойчивости нелинейных ИАС содержится в сформулированном выше критерии.

Таким образом показано, что этот критерий является достаточным критерием абсолютной устойчивости рассматриваемого класса нелинейных ИАС.

Для получения алгебраического критерия абсолютной устойчивости нелинейных ИАС, вместо U и V в (9), вводим:

$$(13) \quad N_1 = \frac{-U}{U^2 + V^2} \quad \text{и} \quad N_2 = \frac{V}{U^2 + V^2}.$$

Воспользовавшись выражениями (8) и (13), получаем

$$(14) \quad N_1 = B \frac{(1+B) - (1-B) \cos \beta}{1+B^2 - (1-B^2) \cos \beta}, \quad N_2 = B \frac{(1-B) \sin \beta}{1+B^2 - (1-B^2) \cos \beta}.$$

Исключая параметр β из уравнений (14), получим уравнение

$$(15) \quad \left[N_1 - \frac{1}{2}(1+B) \right]^2 + N_2^2 - \frac{1}{2}(1-B)^2,$$

которое определяет семейство окружностей, проходящих через точку (1; 0) на плоскости N_1, N_2 и имеющих радиус $R=(1-B)/2$ (рис. 5). Каждой из окружностей соответствует свое значение $B=r/k \geq 0$.

Легко показать, что при $B=1$ B — окружность вырождается в точку (1; 0), а при $B=0$ в окружность с центром в точке (1/2; 0) радиуса $R=1/2$ в плоскости N_1, N_2 .

Подставляя (13) в (9), после элементарных преобразований, уравнение $F^*(q)=0$ можно привести к виду

$$(16) \quad k(N_1 + jN_2)G^*(q) + 1 = 0.$$

С другой стороны, как известно из теории линейных ИАС, передаточная функция ЛИЧ $G^*(q)$ в наиболее общем случае может быть представлена в виде дробно-рациональной функции

$$(17) \quad G^*(q) = K \frac{P^*(q)}{Q^*(q)}$$

где K — коэффициент усиления ЛИЧ, а $Q^*(q)$ и $P^*(q)$ — полиномы относительно q , соответственно степеней l и $m \leq l$:

$$(18) \quad Q^*(q) = \sum_{i=0}^l c_i e^{iq}, \quad P^*(q) = \sum_{i=0}^m b_i e^{iq}.$$

Подставляя (17) в (16), получим

$$(19) \quad k(N_1 + jN_2)KP^*(q) + Q^*(q) = 0.$$

Таким образом, условие, чтобы все корни уравнения $F^*(q)=0$ были с отрицательной вещественной частью, при всех значениях U и V определяемых уравнениями (8) где $B=r/k$ и $\beta \in [0, 2\pi]$, можно заменить соответственно условием, чтобы все корни алгебраического уравнения (19), при всех значениях N_1 и N_2 , принадлежащих соответствующей B — окружности на плоскости N_1, N_2 , были с отрицательной вещественной частью.

Заметим, что уравнение (19) является характеристическим уравнением некоторой импульсной системы (рис. 6), которая получается заменой НЭ в нелинейной ИАС (рис. 1) соответствующим линейным усилителем с комплексным коэффициентом усиления $k(N_1 + jN_2)$. Назовем эту линейную систему, в которой N_1 и N_2 принимают все значения, определяемые уравнением соответствующей B — окружности (15), эквивалентной линейной импульсной системой (ЭЛИС).

Теперь можно дать следующую простую формулировку алгебраического критерия абсолютной устойчивости нелинейных ИАС.

Для того, чтобы нелинейная ИАС (рис. 1) была абсолютно устойчива, достаточно, чтобы характеристика НЭ принадлежала сектору (r, k) и чтобы все корни алгебраического уравнения (19) при всех значениях N_1 и N_2 , определенных уравнением соответствующей B — окружности (15), где $B=r/k$, были с отрицательной вещественной частью.

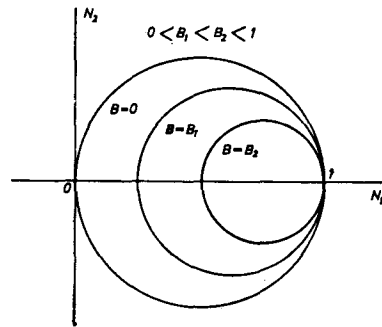


Рис. 5. B — окружности на плоскости N_1, N_2 ($0 < B_1 < B_2 < 1$)

Произведем в характеристическом уравнении (19) замену переменных

$$(20) \quad z = e^q, \quad q = \ln z.$$

Тогда получим

$$(21) \quad k(N_1 + jN_2)KP(z) + Q(z) = 0.$$

Подстановка (20) преобразует левую полуплоскость комплексной переменной q во внутренность круга единичного радиуса $|z| < 1$ на плоскости z .

Корни уравнения (19), лежащие в левой полуплоскости, соответствуют корням уравнения (21), лежащим внутри единичного круга. Поэтому, нелинейная ИАС (рис. 1) будет абсолютно устойчива, если характеристика НЭ принадлежит сектору (r, k) и если все нули уравнения (21), при всех значениях N_1 и N_2 , определяемых уравнением соответствующей B — окружности (15) где $B = r/k$, лежат внутри круга единичного радиуса, т.е. если все эти нули меньше единицы по модулю.

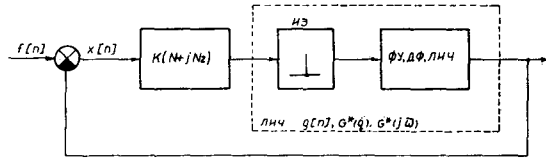


Рис. 6. Эквивалентная линейная импульсная система (ЭЛИС) с комплексным усилителем

Установленные выше условия алгебраического критерия абсолютной устойчивости нелинейной ИАС являются необходимыми и достаточными условиями устойчивости ЭЛИС. Поэтому, приходим и следующему заключению: достаточными условиями абсолютной устойчивости нелинейной ИАС (рис. 1) является выполнение необходимых и достаточных условий устойчивости ЭЛИС (рис. 6).

1.3. Степень устойчивости

В работе [21] получено достаточное условие, при выполнении которого процессы в нелинейной ИАС (рис. 1), вызванные внешними воздействиями типа начальных условий

$$(22) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} f_H[n] = 0 \quad \text{или} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |f_H[n]| = M_0 < \infty$$

будут абсолютно устойчивыми и система будет иметь степень устойчивости не менее заданной σ

$$(23) \quad \operatorname{Re} \frac{G^*(-\sigma + j\bar{\omega})}{1 + rG^*(-\sigma + j\bar{\omega})} + \frac{1}{k-r} > 0 \quad (0 < \bar{\omega} < \pi),$$

где $G^*(j\bar{\omega})$ — частотная характеристика ЛИЧ (рис. 1), σ — заданная степень устойчивости (должна быть всегда меньше степени устойчивости линейной ИАС, полученной заменой НЭ в нелинейном элементе с коэффициентом усиления равном r). При этом характеристика НЭ должна принадлежать сектору (r, k) .

Как показано в [21], при обеспечении приведенных выше условий, будет выполняться следующее условие относительно ошибки $x[n]$ в нелинейной ИАС (рис. 1)

$$(24) \quad |\xi[n]| = |x[n]| < M_0 e^{-\sigma n}$$

где $M_0 = \text{const}$.

Для получения достаточного алгебраического критерия степени устойчивости нелинейных ИАС, производим подстановку

$$(25) \quad q = -\sigma + w$$

в уравнение (19).

Тогда получим

$$(26) \quad k(N_1 + jN_2)KP^*(-\sigma + w) + Q^*(-\sigma + w) = 0.$$

Подстановка (25) преобразует область левее прямой $Re q = -\sigma$ на плоскости q в левую полуплоскость плоскости w (рис. 7).

Предположим теперь, что уравнение (26) имеет все корни с отрицательной вещественной частью. Как уже было показано в предыдущем разделе, в этом случае будет выполняться неравенство (23) и уравнение

$$(28) \quad rG^*(-\sigma + w) + 1 = 0$$

будет также иметь все корни с отрицательной вещественной частью и, следовательно, степень устойчивости линеаризованной ИАС, имеющей коэффициент усиления ЛЭ r , будет не менее заданной σ .

Корни уравнения (26), лежащие в левой полуплоскости на плоскости w , соответствуют корням уравнения (19), лежащим левее прямой $Re q = -\sigma$ на плоскости q (рис. 7).

Таким образом, можно дать следующую формулировку достаточного алгебраического критерия степени устойчивости нелинейных ИАС.

Для того чтобы нелинейная ИАС (рис. 1) была абсолютно устойчива и чтобы эта система имела степень устойчивости не менее заданной σ , достаточно, чтобы характеристика НЭ принадлежала сектору (r, k) и чтобы все корни уравнения (19), при всех значениях N_1 и N_2 , определяемых уравнением соответствующей B — окружности (15) где $B = r/k$, были с отрицательной вещественной частью большей σ по модулю.

Достаточными условиями степени устойчивости нелинейной ИАС (рис. 1) является выполнение необходимых и достаточных условий степени устойчивости ЭЛИС (рис. 6).

Заметим что подстановка (20) преобразует область левее прямой $Re q = -\sigma$ (рис. 7,а) на плоскости q во внутренность круга радиуса $|z| = e^{-\sigma}$ на плоскости z . При этом корни уравнения (19), лежащие левее прямой $Re q = -\sigma$, соответствуют корням уравнения (21), лежащим внутри круга радиуса $|z| = e^{-\sigma}$. Следовательно, нелинейная ИАС (рис. 1) будет абсолютно устойчивой и ее степень устойчивости будет не менее заданной σ , если характеристика НЭ принадлежит сектору (r, k) и если все корни уравнения (21), при всех значениях N_1 и N_2 , определяемых уравнением соответствующей B — окружности где $B = r/k$, лежат внутри круга радиуса $|z| = e^{-\sigma}$, т.е. если все эти корни по модулю меньше $e^{-\sigma}$.

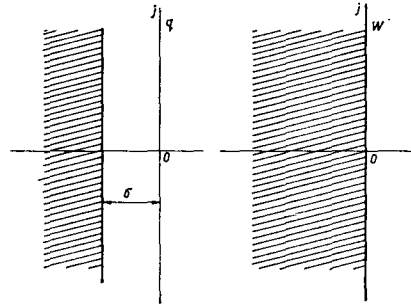


Рис. 7. Плоскости переменных q и w

1.4. Заключительные замечания

Приведенные выше критерии абсолютной устойчивости нелинейных ИАС позволяют исследовать абсолютную устойчивость с помощью известных способов определения числа нулей многочлена, лежащих внутри единичного круга.

Для определения условий, которые нужно наложить на коэффициенты уравнения (21), чтобы соответствующая нелинейная ИАС была абсолютно устойчивой или чтобы эта система имела степень устойчивости не менее заданной, можно использовать метод корневого годографа для линейных ИАС, а также методы, основанные на отображении соответствующих контуров на плоскости переменной q или z в плоскость переменных параметров системы. Однако, эти вопросы не являются предметом данной работы.

Выше рассматривалась абсолютная устойчивость положения равновесия нелинейных ИАС. Если наложить более жесткие ограничения на характеристику НЭ, а именно, потребовать, чтобы она была дифференцируемой и удовлетворяла условиям

$$(28,а) \quad r < \frac{d\Phi(x)}{dx} < k,$$

$$(28,б) \quad \Phi(0) = 0,$$

т.е. чтобы производная характеристики НЭ принадлежала полосе (r, k) , то на основании результатов, полученных в [19—21], можно заключить, что алгебраические критерии абсолютной устойчивости обеспечивают не только абсолютную устойчивость и степень устойчивости положения равновесия нелинейных ИАС, но и абсолютную устойчивость и степень устойчивости процессов.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] HAHN W. *Über die Anwendung der Methods von Liapunov auf Differenzgleichungen*, Mathematische Annalen, 136 (1958), 430—441.
- [2] KALMAN R. E. BERTRAM J. E. *Control System Analysis and Design Via the Second Method of Liapunov — Part II, Discrete Systems*, Transactions ASME, J. Basic, Eng., vol. 82, JVu. 1960., pp. 394—400.
- [3] KODOMA S. *Stability of a Class of Discrete Control Systems Containing a Nonlinear Gain*, IRE Transactions on A. C., October 1962., pp. 102—104.
- [4] PEARSON J. B., GIBSON J. E. *On the Stability of a Class of Saturating Sampled-Data Systems*, IEEE Paper № 63—1440, presented October 28—29, 1963., IEEE Transactions on Application and Industry.
- [5] O'SHEA R. P. *The Extension of the Zubov Method to Sampled-Data Control Systems Described by Differences Nonlinear Autonomous Equations*, IEEE Transactions on A. C., vol. AC-9, № 1, January 1964., pp. 62—70.
- [6] PEARSON J. B. *On the Lagrange Stability of a Class of Saturating Sampled-Data Systems*, JACC, 1964.
- [7] DELFELD F. R. MURPHY G. J. *Analysis of Pulse-Width-Modulation Control Systems*, IRE Transactions on A. C., vol. AC—6, № 3, 1961.
- [8] SZEGÖ G. R. *On the Absolute Stability of Sampled-Data Control Systems*, Proc. Nat. Acad. of Sci. U. S. A., September 1963.

- [9] SZEGÖ G. P., PEARSON J. B. *On the Absolute Stability of Sampled-Data Systems — The Indirect Control Case*, IEEE, PTGAC, April 1964.
- [10] HAHN W. *Theory and Application of Liapunov's Direct Method*, Englewood Cliff, New Jersey, 1963.
- [11] KADOTA T. T. *Asimptotic Stability of Some Nonlinear Feedback Systems*, ERL Report, Series № 60, Issue № 274, UCB, January 1960.
- [12] PAVLIDIS T. *Analysis and Synthesis of Pulse Frequency Modulation Feedback Systems*, ERL Report № 64—13, March 1964., (Charter 3.)
- [13] KADOTA T. T., BOURNE H. C. *Stability Conditions of PWM Trough the Second Method of Liapunov*, IRE Transactions on A. C., vol. AC—6, № 3, 1961., pp. 102—109.
- [14] РАХИМОВ Г. Г. *Аналог метода А. И. Купье для анализа устойчивости нелинейных импульсных систем автоматического регулирования*, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 2, 1964.
- [15] ЦЫПКИН Я. З. *Об устойчивости в целом нелинейных импульсных автоматических систем*, Докл. АН СССР, т. 145, № 1, 1962.
- [16] ЗУРКИН Я. З. *Die absolute Stabilität nichtlinearer Impulsregelsysteme*, Regelungstechnik, H, 11, № 4, 1963.
- [17] ТСУРКИН Я. З. *Fundamentals of the Theory of Nonlinear Pulse Control Systems* Second Congress of IFAC, Basle, Switzerland, 1963.
- [18] ЦЫПКИН Я. З. *О некоторых свойствах абсолютно устойчивых нелинейных импульсных автоматических системах*, Докл. АН СССР, т. 152, № 2, 1963.
- [19] ЦЫПКИН Я. З. *Об устойчивости процессов в нелинейных импульсных автоматических системах*, Докл. АН СССР, т. 152, № 2, 1963.
- [20] ЦЫПКИН Я. З. *Абсолютная устойчивость положения равновесия и процессов в нелинейных импульсных автоматических системах*, Автоматика и телемеханика т. XXIV, № 12, 1963.
- [21] ТСУРКИН Я. З. *Stability and Sensitivity of Nonlinear Sampled-Data Control Systems*, Proc. of the IFAC Symposium on Sensitivity Analysis held in Dubrovnik, Yugoslavia 1966.
- [22] ЦЫПКИН Я. З. *Частотные критерии абсолютной устойчивости нелинейных импульсных систем*, Автоматика и телемеханика, т. XXV, № 3, 1964.
- [23] ЦЫПКИН Я. З. *Об абсолютной устойчивости одного класса нелинейных импульсных автоматических систем*, Автоматика и телемеханика, т. XXV, № 7, 1964.
- [24] JURY E. I., LEE B. W. *On the Stability of a Certain Class of Nonlinear Sampled-Data Systems*, IEEE Transactions on A. C., October 1964.
- [25] JURY E. I., LEE B. W. *A Limiting Case for Absolute Stability Criterion*, University of California, Berkeley, Electronics Research Lab., Internal Technical Memorandum, № 41, January, 1964.
- [26] Джури., Ли Б. *Абсолютная устойчивость систем со многими нелинейностями*, Автоматика и телемеханика, т. XXVI, № 6, 1965.
- [27] ЦЫПКИН Я. З. *Теория линейных импульсных систем*, Физматгиз, 1963.

2. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Метод анализа линейных (непрерывных и дискретных) систем автоматического регулирования в параметрической плоскости распространяется на случай нелинейных импульсных автоматических систем. Метод основан на применении алгебраических критериев абсолютной устойчивости нелинейных импульсных автоматических систем [1] и может быть применен не только для исследования достаточных условий, при которых система будет абсолютно устойчива, но и для обеспечения достаточных условий, при которых эта система имеет степень устойчивости не менее заданной. Полученные результаты легко могут быть использованы при синтезе рассматриваемого класса нелинейных импульсных автоматических систем. Для иллюстрации рассматриваются примеры.

Введение

По существу метод анализа линейных систем автоматического регулирования в параметрической плоскости представляет собой графический способ определения условий, которые необходимо наложить на коэффициенты характеристического уравнения системы, чтобы эта система была устойчивой или чтобы она удовлетворяла заданному качеству процесса регулирования. Этот метод впервые был разработан Вышнеградским [2].

Решая задачу об устойчивости работы регуляторов прямого действия, И. А. Вышнеградский еще во второй половине прошлого века сформулировал простой критерий устойчивости, который представляет не только исторический интерес, но, благодаря простоте и наглядности, имеет и практическое значение при исследовании линейных непрерывных систем, описываемых уравнениями третьего порядка.

Теория устойчивости линеаризованных систем с сосредоточенными параметрами получила свое дальнейшее развитие в работах А.А. Соколова и Ю. И. Неймарка [3], разработавших метод D-разбиения, который представляет собой обобщение критерия Вышнеградского для систем, описываемых уравнениями высшего порядка. Был создан метод выделения областей устойчивости по одному комплексному и двум вещественным параметрам, получен единый обобщающий подход к существующим критериям устойчивости, дано непосредственно общее решение вопроса о влиянии изменений параметров на устойчивость системы и обеспечена возможность определения ряда качественных показателей.

Метод югославских ученых Д. Митровича [4] и Д. Д. Шияка [5], которые использовали подобный же подход для выделения областей устойчивости и качества процессов в плоскости параметров, особенно

удобен не только для анализа линеаризованных непрерывных систем с сосредоточенными параметрами, но и для анализа линейных импульсных автоматических систем (ИАС). Преимуществом этого метода является и то, что он дан в виде несложного алгоритма, пригодного для расчета на аналоговых или цифровых вычислительных машинах. Этот же метод можно применить и для графического определения корней уравнения любого порядка. Метод был распространен на линейные импульсные [6, 7] и непрерывные [8] системы с запаздыванием.

В данной работе метод параметрической плоскости, широко применяемый для анализа линейных систем [2—8], распространяется на анализ абсолютной устойчивости нелинейных ИАС. Этот же метод можно применить и для обеспечения достаточных условий, при которых степень устойчивости переходного процесса в нелинейной ИАС, вызванного внешними воздействиями, будет не менее заданной.

2.1. Анализ абсолютной устойчивости при помощи метода параметрической плоскости

Алгебраический критерий абсолютной устойчивости нелинейных ИАС [1] применяется для исследования большого класса нелинейных ИАС, которые могут быть сведены к структуре, представляющей собой соединение нелинейного элемента (НЭ), характеристика которого $\Phi(x)$ удовлетворяет условию

$$(1) \quad \Phi(x) = 0,$$

и линейной импульсной части (ЛИЧ), которая характеризуется передаточной функцией

$$(2) \quad G^*(q) = K \frac{P^*(q)}{Q^*(q)}$$

где K — коэффициент усиления ЛИЧ, а $Q^*(q)$ и $P^*(q)$ — полиномы относительно e^q , соответственно степеней l и $m < l$:

$$(3) \quad Q^*(q) = c_0 + c_1 e^q + \dots + c_l e^{lq},$$

$$(4) \quad P^*(q) = b_0 + b_1 e^q + \dots + b_m e^{mq}.$$

Как показано в [1], этот критерий гласит, что для того чтобы положение равновесия нелинейной ИАС было абсолютно устойчиво, достаточно, чтобы характеристика НЭ, удовлетворяющая условию (1) принадлежала сектору (r, k) и чтобы все корни уравнения

$$(5) \quad k(N_1 + jN_2)KP^*(q) + Q^*(q) = 0$$

были с отрицательной вещественной частью и то при всех значениях N_1 и N_2 , определенных уравнением B — окружности

$$(6) \quad [N_1 - (1+B)/2]^2 + N_2^2 = \frac{1}{4}(1-B)^2,$$

где $B = r/k$ ($0 < B < 1$).

Однако, если потребовать, чтобы характеристика НЭ удовлетворяла условию (1), была дифференцируемой и чтобы её производная принадлежала полосе (r, k) , то выше сформулированные алгебраические критерии абсолютной устойчивости нелинейной ИАС обеспечивают не только абсолютную устойчивость положения равновесия, но и устойчивость процессов [9].

Согласно теории z -преобразования, условию, чтобы все корни уравнения (5) были с отрицательной вещественной частью, т.е. чтобы все эти корни были расположены в левой полуплоскости q (рис. 1 а), соответствует условие, чтобы все корни уравнения

$$(7) \quad k(N_1 + jN_2)KP(z) + Q(z) = 0$$

получаемого заменой

$$(8) \quad z = e^q$$

в (5), были меньше единицы по модулю, т.е. чтобы все эти корни находились внутри круга единичного радиуса на плоскости z (рис. 1, б).

Уравнение (7) можно представить в более общем виде

$$(9) \quad \sum_{i=0}^l a_i z^i = 0,$$

где коэффициенты $a_i (i = 0, 1, \dots, m)$

$$(10) \quad a_i = b_i kKN_1 + jb_i kKN_2 + c_i$$

— комплексные числа, а z — комплексная переменная z — преобразования.

Для исследования абсолютной устойчивости и степени устойчивости нелинейной ИАС в плоскости параметров kKN_1 и kKN_2 , произведем замену переменной

$$(11) \quad z = \omega_z \zeta_z + j \omega_z \sqrt{1 - \zeta_z^2}.$$

Отсюда получим

$$(12) \quad z^i = \omega_z^i [T_i(\zeta_z) + jU_i(\zeta_z)],$$

где $T_i(\zeta_z)$ и $U_i(\zeta_z)$ являются функциями Чебышева первого и второго порядка, соответственно

$$(13) \quad T_i(\zeta_z) = \cos(i \arccos \zeta_z), \quad U_i(\zeta_z) = \sin(i \arccos \zeta_z).$$

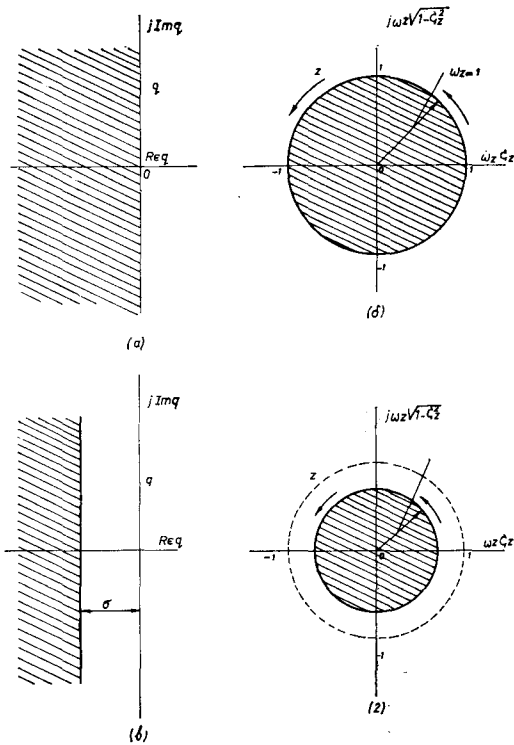


Рис. 1

Эти функции табулированы (10) и для них справедливы следующие рекуррентные формулы:

$$(14) \quad T_{i+1}(\zeta_z) - 2\zeta_z T_i(\zeta_z) + T_{i-1}(\zeta_z) = 0, \quad U_{i+1}(\zeta_z) - 2\zeta_z U_i(\zeta_z) + U_{i-1}(\zeta_z) = 0$$

для $i \geq 2$, причем $T_0(\zeta_z) = 1$, $T_1(\zeta_z) = \zeta_z$, $U_0(\zeta_z) = 0$, $U_1(\zeta_z) = \sqrt{1 - \zeta_z^2}$.

Подставляя (10) и (12) в уравнение (9), находя вещественную и мнимую часть и приравнявая их нулям, получим

$$(15) \quad \begin{aligned} kKN_1 A_1(\omega_z, \zeta_z) - kKN_2 A_2(\omega_z, \zeta_z) + D_1(\omega_z, \zeta_z) &= 0 \\ kKN_1 A_2(\omega_z, \zeta_z) + kKN_2 A_1(\omega_z, \zeta_z) + D_2(\omega_z, \zeta_z) &= 0 \end{aligned}$$

где, согласно (10) и (12),

$$(16) \quad \begin{aligned} A_1(\omega_z, \zeta_z) &= \sum_{i=0}^m b_i \omega_z^i T_i(\zeta_z), \quad A_2(\omega_z, \zeta_z) = \sum_{i=0}^m b_i \omega_z^i U_i(\zeta_z), \\ D_1(\omega_z, \zeta_z) &= \sum_{i=0}^l c_i \omega_z^i T_i(\zeta_z), \quad D_2(\omega_z, \zeta_z) = \sum_{i=0}^l c_i \omega_z^i U_i(\zeta_z). \end{aligned}$$

Решая уравнения (15), для kKN_1 и kKN_2 , получим

$$(17) \quad \begin{aligned} kKN_1 &= -\frac{A_1(\omega_z, \zeta_z) D_1(\omega_z, \zeta_z) + A_2(\omega_z, \zeta_z) D_2(\omega_z, \zeta_z)}{A_1^2(\omega_z, \zeta_z) + A_2^2(\omega_z, \zeta_z)} \\ kKN_2 &= \frac{A_2(\omega_z, \zeta_z) D_1(\omega_z, \zeta_z) - A_1(\omega_z, \zeta_z) D_2(\omega_z, \zeta_z)}{A_1^2(\omega_z, \zeta_z) + A_2^2(\omega_z, \zeta_z)}. \end{aligned}$$

Чтобы применить метод параметрической плоскости для исследования абсолютной устойчивости нелинейной ИАС, изобразим на плоскости параметров kKN_1, kKN_2 кривую $\omega_z = 1$ при изменении ζ_z от 1 до -1 .

Эта кривая получается отображением единичного круга $|z| = 1$ (рис. 1, б) при помощи уравнений (16) и (17). В силу симметрии относительно действительной оси, для построения ее достаточно изменять ζ_z только вдоль верхней полуокружности на рис. 1, б.

Кривая $\omega_z = 1$ разделяет плоскость параметров на области, внутри которых все уравнения, получаемые подстановкой соответствующих значений kKN_1 и kKN_2 в (10), имеют одинаковое количество корней внутри круга $|z| = 1$ (рис. 1, б).

Будем называть областью устойчивости участок плоскости параметров, в котором число этих корней равно l , где l степень уравнения (9).

Пользуясь уравнением семейства B — окружностей (6), на плоскости kKN_1, kKN_2 можно изобразить также и окружности, каждой из которых будут соответствовать свои значения параметров r, k и K .

B — окружность на плоскости N_1, N_2 описываемая уравнением (6), пересекает ось абсцисс в точках $B = r/k$ и 1. Исходя из этого, соответствующая окружность на плоскости параметров kKN_1, kKN_2 пересекает ось абсцисс в точках rK и kK (рис. 2). Эту окружность, которая однозначно определяется соответствующими значениями параметров r, k, K будем называть параметрической окружностью.

На основании данного выше критерия абсолютной устойчивости нелинейной ИАС, легко установить, что нелинейная ИАС с характеристикой НЭ, принадлежащей сектору $(r > 0, k)$, ЛИЧ которой характеризуется передаточной функцией $G^*(q) = KP^*(q)/Q^*(q)$, будет абсолютно устойчива тогда, когда на плоскости kKN_1, kKN_2 соответствующая параметрическая окружность не пересекает кривую $\omega_z = 1$ и находится внутри области устойчивости.

Таким образом, порядок определения значений параметров r, k и K , при которых исследуемая система устойчива, сводится к следующему:

а) из уравнения (9) находим выражения (16),

б) в выражения (16) подставляем $\omega_z = 1$,

в) задаваясь различными значениями ζ_z от 1 до -1 в (16) и пользуясь выражениями (17), строим кривую $\omega_z = 1$.

г) определяем область устойчивости,

д) вписывая параметрические окружности внутри области устойчивости, определяем искомые значения параметров r, k и K , и на основе полученных данных строим кривую $(kK)_{\max} = S(rK)$.

Иллюстрируем изложенный метод примером.

Рассмотрим нелинейную ИАС, структурная схема которой показана на рис. 3. Пусть характеристика НЭ $\phi(x)$ этой системы принадлежит

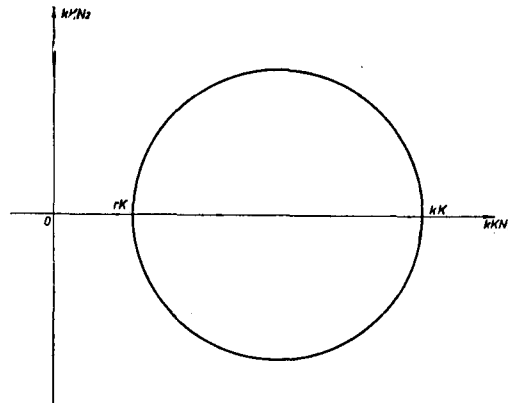


Рис. 2

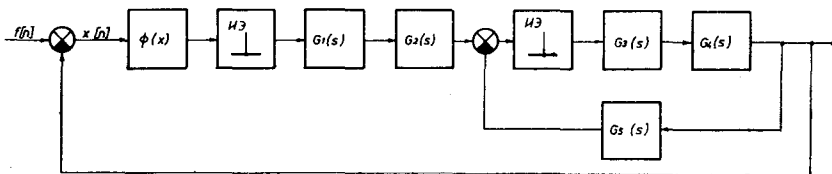


Рис. 3

сектору (r, k) , период повторения импульсов $T = 1$ сек. и передаточные функции

$$(18) \quad G_1(s) = G_3(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}, \quad G_2(s) = \frac{K}{s + 2,3}, \quad G_4(s) = \frac{1,404}{s(s + 3,51)}, \quad G_5(s) = 2,5 s.$$

Пользуясь алгебраическим критерием абсолютной устойчивости нелинейных ИАС, определим при помощи метода параметрической плоскости максимальные значения kK , соответствующие различным значениям rK , при которых выполняются достаточные условия абсолютной устойчивости.

На основании алгебры z — преобразования [11], z — передаточная функция ЛИЧ исследуемой системы получается в виде

$$(19) \quad G(z) = \frac{G_1 G_2(z) G_3 G_4(z)}{1 + G_3 G_4 G_5(z)},$$

где

$$(20) \quad G_1 G_2(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{K}{s(s+2,3)} \right\},$$

$$G_3 G_4(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1,404}{s^2(s+3,51)} \right\},$$

$$G_3 G_4 G_5(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{3,51}{s(s+3,51)} \right\}.$$

Пользуясь таблицей z — преобразования [11] и учитывая, что период повторения импульсов $T=1$ сек., получим

$$(21) \quad G_1 G_2(z) = K \frac{0,3913}{z-0,1},$$

$$G_3 G_4(z) = \frac{0,2894 z + 0,0988}{(z-1)(z-0,03)},$$

$$G_3 G_4 G_5(z) = \frac{0,97}{z-0,03}.$$

Подставляя (21) в (19), получим

$$(22) \quad G(z) = K \frac{0,1132z + 0,0386}{(z-1)(z-0,1)(z-0,94)},$$

или

$$(23) \quad G(z) = K \frac{P(z)}{Q(z)} = K \frac{0,1132z + 0,0386}{z^3 - 0,16 z^2 - 0,934 z + 0,094}.$$

Если подставим полиномы $P(z)$ и $Q(z)$ в (7), то получим уравнение (9) в виде

$$(24) \quad z^3 - 0,16 z^2 + (0,1132 kKN_1 + j0,1132 kKN_2 - 0,934) +$$

$$+ 0,0386 kKN_1 + 0,0386 kKN_2 + 0,094 = 0.$$

Отсюда получаем соответствующие выражения (16)

$$(25) \quad A_1(\omega_z, \zeta_z) = 0,0386 + 0,1132 \omega_z T_1(\zeta_z),$$

$$A_2(\omega_z, \zeta_z) = 0,1132 \omega_z U_1(\zeta_z),$$

$$D_1(\omega_z, \zeta_z) = 0,094 - 0,934 \omega_z T_1(\zeta_z) - 0,16 \omega_z^2 T_2(\zeta_z) + \omega_z^3 T_3(\zeta_z),$$

$$D_2(\omega_z, \zeta_z) = -0,934 \omega_z U_1(\zeta_z) - 0,16 \omega_z^2 U_2(\zeta_z) + \omega_z^3 U_3(\zeta_z).$$

Для анализа абсолютной устойчивости нелинейной ИАС (рис. 3) исследуем, лежат ли все корни уравнения (24) внутри окружности радиуса $(\omega_z=1)$ с центром в начале координат комплексной плоскости z . Полагая $\omega_z=1$ в уравнениях (25) и задаваясь различными значениями параметра ζ_z от 1 до -1 , по уравнениям (17) построим кривую $\omega_z=1$ (рис. 4). Для вычисления составляющих $A_1(1, \zeta_z)$, $A_2(1, \zeta_z)$, $D_1(1, \zeta_z)$ и $D_2(1, \zeta_z)$ уравнений (17) по уравнениям (25) можно воспользоваться также таблицами функций Чебышева [10].

Полагая $N_1=1$ и $N_2=0$ в уравнении (24), получим

$$(26) \quad z^3 - 0,16z^2 + (0,1132kK - 0,934)z + 0,0386kK + 0,094 = 0.$$

Уравнение (26) является характеристическим уравнением линеаризованной ИАС, получаемой заменой НЭ в исследуемой нелинейной ИАС линейным элементом с коэффициентом усиления равным k . Пользуясь передаточной функцией (24) и правилами аналога метода корневого годографа для линейных ИАС [11], непосредственно можно заключить, что при положительных значениях kK , достаточно близких нулю, уравнение (26) имеет все корни меньше 1 по модулю. Следовательно, для всех точек

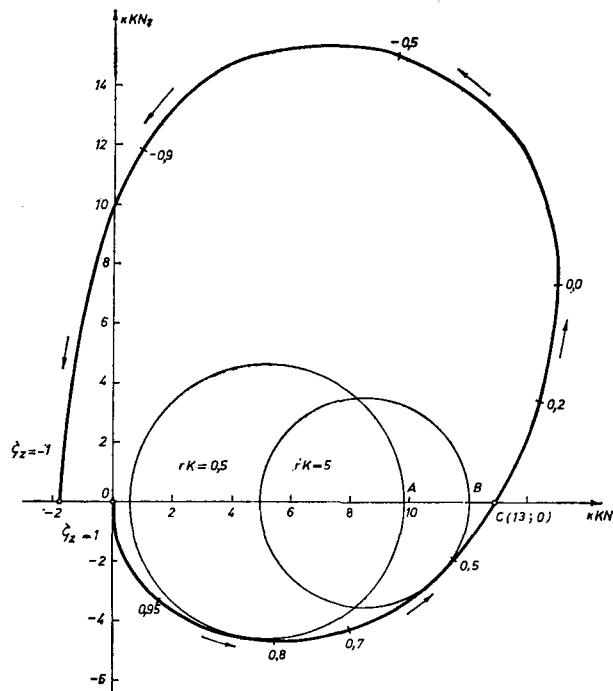


Рис. 4

положительного отрезка оси абсцисс, находящегося левее кривой $\omega_z=1$ (рис. 4), все корни уравнения (24) будут по модулю меньше 1. Таким образом, участок плоскости kKN_1 , kKN_2 , находящийся справа от оси kKN_2 и ограниченный кривой $\omega_z=1$ является областью устойчивости.

Следует, однако, подчеркнуть, что проверку области устойчивости в наиболее общем случае можно осуществить, воспользовавшись критерием Михайлова применительно к исследованиям устойчивости, степени устойчивости и степени колебательности линейных ИАС [12], а также с помощью известных способов определения числа нулей многочлена, лежащих внутри единичного круга.

Для определения максимальных значений kK , соответствующих различным значениям rK , при которых выполняются достаточные условия абсолютной устойчивости, впишем внутрь области устойчивости соответствующие параметрические окружности, касающиеся кривой $\omega_z = 1$. На рис. 4 изображены две такие окружности, для $rK = 0,5$ и $rk = 5$. При этом максимальные значения kK равняются соответственно абсциссам точек $A(9,8; 0)$ и $B(12; 0)$.

Если вписать большое количество параметрических окружностей внутрь области устойчивости, каждая из которых касается кривой $\omega_z = 1$, то по приведенному выше способу определения максимальных значений kK , построим кривую $(kK)_{\max} = S(rk)$ (рис. 5). Зная численное значение K и r , с помощью кривой на рис. 5 нетрудно определить значение предельного коэффициента усиления $k_{\text{пр}}$ сектора ($r, k_{\text{пр}}$).

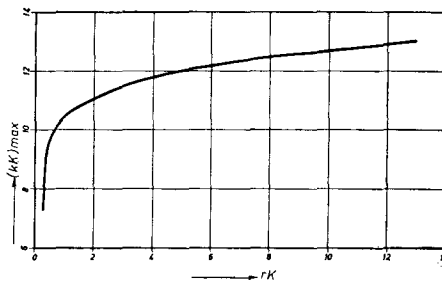


Рис. 5

Легко показать что при $r=k$ соответствующая параметрическая окружность вырождается в точку kK на оси абсцисс плоскости kKN_1, kKN_2 . В этом случае полученные достаточные условия абсолютной устойчивости нелинейной ИАС будут соответствовать необходимым и достаточным условиям устойчивости линеаризованной ИАС с коэффициентом усиления линейного элемента равным k . Предельное значение kK , при котором линеаризованная ИАС будет устойчива, определяется точкой пересечения кривой $\omega_z = 1$ с осью kKN_1 . Для рассматриваемой нелинейной ИАС это значение определяется точкой $C(13; 0)$ (рис. 4) и, следовательно, линеаризованная ИАС будет устойчива при всех значениях $0 \leq kK \leq 13$.

2.2. Анализ достаточных условий, обеспечивающих степень устойчивости не менее заданной.

Как показано в [1], рассматриваемая нелинейная ИАС будет абсолютно устойчива и ее степень устойчивости будет не менее заданной σ , если все корни соответствующего уравнения (5) находятся левее прямой $Re q = -\sigma$ на плоскости q (рис. 1, в), или если все корни уравнения (7) лежат внутри круга радиуса $e^{-\sigma}$ на плоскости z (рис. 1, г). При этом характеристика НЭ, удовлетворяющая условию (1), должна находиться внутри сектора ($r > 0, k$) и данные выше условия, касающиеся распределения корней уравнения (5) или (7), должны выполняться при всех значениях N_1 и N_2 , определяемых уравнением соответствующей B — окружности (6), где $B = r/k$.

Величина σ называется степенью устойчивости и позволяет приближенно оценить быстроту затухания переходного процесса в нелинейной ИАС, вызванного любым внешним воздействием типа начальных условий [1]. Однако, если характеристика НЭ $\Phi(x)$, удовлетворяющая условию (1), дифференцируема и ее производная $d\Phi(x)/dx$ принадлежит полосе ($r > 0, k$) то сформулированные выше алгебраические критерии степени устойчивости обеспечивают не только заданную степень устойчивости процесса в нелинейной ИАС, вызванного внешним воздействием типа начальных условий, но и заданную степень устойчивости процесса, вызванного неисчезающим внешним воздействием, которое ограничено по модулю [13].

Таким образом, для анализа достаточных условий, при обеспечении которых нелинейная ИАС будет абсолютно устойчива и её степень устойчивости будет не менее заданной σ , можно использовать методику, изложенную в предыдущем разделе. Однако, при исследовании степени устойчивости при помощи метода параметрической плоскости пользуясь уравнениями (17), отображается верхняя полуокружность на рис. 1, г, вдоль которой $\omega_z = e^{-\sigma}$, в плоскость параметров kKN_1 и kKN_2 . Таким образом на плоскости kKN_1, kKN_2 получается кривая $\omega_z = e^{-\sigma}$, на основе которой можно определить область степени устойчивости, т. е. участок плоскости параметров для которого все корни уравнения (7) будут меньше $e^{-\sigma}$ по модулю.

После определения области степени устойчивости и вписывания внутри этой области соответствующих параметрических окружности, получаем кривую $(kK)_{\max} = S(rk)$.

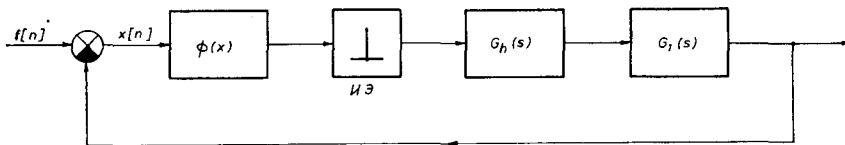


Рис. 6

Рассмотрим пример. Пусть передаточная функция ЛИЧ нелинейной ИАС (рис. 6) имеет вид

$$(27) \quad G(s) = G_h(s) G_1(s) = K \frac{1 - e^{-sT}}{s^2 (1 + 0,1s) (1 + 0,05s)},$$

где период повторения $T = 0,1$ сек. Характеристика нелинейного элемента $\Phi(x)$ исследуемой системы принадлежит сектору ($r > 0, k$). Определим условия, при которых эта система будет абсолютно устойчива и ее степень устойчивости будет не менее $\sigma = 1$.

Z — передаточная функция ЛИЧ исследуемой системы получается в виде

$$(28) \quad G(z) = G_h G_1(z),$$

где

$$(29) \quad G_h G_1(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \frac{K}{s^2 (1 + 0,1s) (1 + 0,05s)} \right\}.$$

Используя таблицу z — преобразования [11] и учитывая, что период повторения импульсов $T=0,1$ сек., из (28) и (29) получим

$$(30) \quad G(z) = \frac{0,0164 K(z^2 + 2,05 z + 0,232)}{(z-1)(z-0,368)(z-0,135)},$$

т.е.

$$(31) \quad G(z) = K \frac{P(z)}{Q(z)} = K \frac{0,0164 z^2 + 0,0336 z + 0,0038}{z^3 - 1,503 z^2 + 0,553 z - 0,0497}.$$

Подставляя $P(z)$ и из (31) в (7), получим

$$(32) \quad \begin{aligned} & z^3 + (0,0164 kKN_1 + j 0,0164 kKN_2 - 1,503) z^2 \\ & + (0,0336 kKN_1 + j 0,0336 kKN_2 + 0,553) z \\ & + 0,0038 kKN_1 + j 0,0038 kKN_2 - 0,0947 = 0. \end{aligned}$$

Пользуясь уравнением (32), получим выражения (16) в виде

$$(33) \quad \begin{aligned} A_1(\omega_z, \zeta_z) &= 0,0038 + 0,0336 \omega_z T_1(\zeta_z) + 0,0164 \omega_z^2 T_2(\zeta_z), \\ A_2(\omega_z, \zeta_z) &= 0,0336 \omega_z U_1(\zeta_z) + 0,0164 \omega_z^2 U_2(\zeta_z), \\ D_1(\omega_z, \zeta_z) &= -0,0497 + 0,553 \omega_z T_1(\zeta_z) - 1,503 \omega_z^2 T_2(\zeta_z) + \omega_z^3 T_3(\zeta_z), \\ D_2(\omega_z, \zeta_z) &= 0,553 \omega_z U_1(\zeta_z) - 1,503 \omega_z^2 U_2(\zeta_z) + \omega_z^3 U_3(\zeta_z). \end{aligned}$$

Полагая $\omega_z = 1$ и $\omega_z = e^{-1} = 0,905$ в уравнениях (33) и задавая различные значения параметра ζ_z от 1 до -1 , по уравнениям (17) можно построить, соответственно, кривые $\omega_z = 1$ и $\omega_z = 0,905$ на плоскости kKN_1, kKN_2 .

На рис. 7 схематически изображены эти кривые. Можно показать, что область устойчивости является участок плоскости kKN_1, kKN_2 находящийся справа от оси kKN_2 и ограниченный кривой $\omega_z = 1$, а область заданной степени устойчивости ($\sigma = 1$) является участок плоскости, находящийся справа от прямой $kKN_1 = 2,3$ и ограниченный кривой $\omega_z = 0,905$.

Для того чтобы получить достаточные условия абсолютной устойчивости и заданной степени устойчивости, построены начальные участки кривых $\omega_z = 1$ и $\omega_z = 0,905$, для значений ζ_z от 1 и меньше (рис. 8).

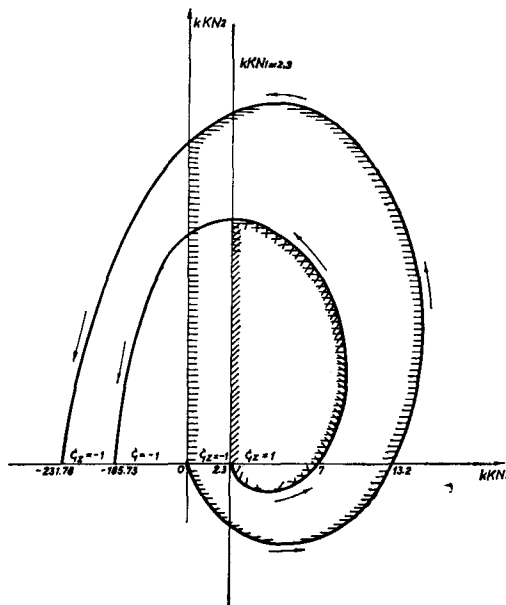


Рис. 7

Повторяя методику определения максимальных значений kK , соответствующих различным значениям rK , которая была рассмотрена в

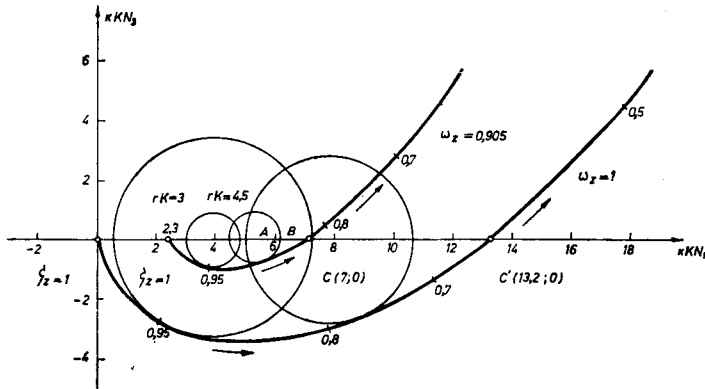


Рис. 8

предыдущем разделе, можно получить кривую $(kK)_{\max} = S(rK)$ (рис. 9, а) границы абсолютной устойчивости. Подобную кривую можно получить и для заданной степени устойчивости. Для этого, впишем внутри области заданной степени устойчивости для различных значений rK соответствующие параметрические окружности, касающиеся кривой $\omega_z = 0,905$. На рис. 8 изображены две такие окружности, при $rK = 3$ и $rK = 4,5$. При этом максимальные значения kK равняются соответственно абсциссам точек $A(4,8; 0)$ и $B(6,1; 0)$. Вписывая большое количество параметрических окружностей внутрь области заданной степени устойчивости, каждая из которых касается кривой $\omega_z = 0,905$, по приведенному выше способу построим кривую (рис. 9, б).

Как уже показано, кривые на рис. 9 дают возможность при известных значениях K и r , определить значения предельных коэффициентов усиления $k_{пр}$ сектора ($r, k_{пр}$), для которых рассматриваемая система будет соответствовать абсолютно устойчива или её степень устойчивости будет не менее заданной $\sigma = 1$.

Расстояние между кривыми на рис. 9 позволяет определить, насколько область заданной степени устойчивости меньше, чем область устойчивости.

В соответствии с приведенным в предыдущем разделе способом определения предельного значения kK , при котором линеаризованная ИАС будет устойчива, на основании рис. 8 заключаем, что линеаризованная ИАС

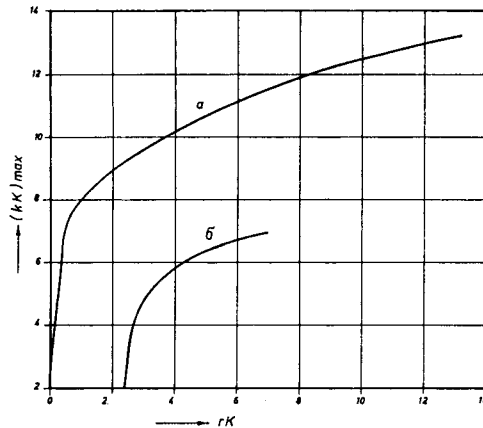


Рис. 9

системы на рис. 6 будет устойчивой при всех значениях $0 < kK < 13,2$. Пользуясь кривой $\omega_z = 0,905$, тем же самым способом заключаем, что чтобы эта линеаризованная ИАС имела степень устойчивости не менее заданной $\sigma = 1$ при всех значениях $2,3 < kK < 7$.

В заключение подчеркнем, что изложенный выше способ применения алгебраического критерия абсолютной устойчивости нелинейных ИАС для исследования абсолютной устойчивости нелинейных ИАС при помощи метода параметрической плоскости можно использовать для исследования нелинейных ИАС при наличии запаздывания и вообще тогда, когда z — передаточную функцию ЛИЧ системы можно дать в форме (2).

Благодаря применению функций Чебышева, приведенный выше метод дан в виде несложного алгоритма, пригодного для расчета на цифровых вычислительных машинах. По приведенному выше способу, построение соответствующих кривых $\omega_z = 1$ и $\omega_z = e^{-\sigma}$ можно выполнить с помощью моделирующих устройств [14].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Стоич М. Р. *Алгебраические критерии абсолютной устойчивости нелинейных импульсных систем*. (Статья, которая предложена для опубликования в Автоматике и телемеханике).
- [2] МАКСВЕЛ Дж., ВЫШНЕГРАДСКИЙ И. А. СТОДОЛА А. *Теория систем автоматического регулирования*. Изд. АН СССР, 1949.
- [3] НЕЙМАРК Ю. И. *Устойчивость линеаризованных систем*, ЛКВВИА, 1949.
- [4] MITROVIĆ D. *Graphical Analysis and Synthesis of Feedback Control Systems*, Parts I, II and III. AIEE Transactions, pt. II (Application and Industry, vol. 77, 1958).
- [5] ŠILJAK D. D. *Analysis and Synthesis of Feedback Control Systems in the Parameter Plane*, Parts I, II and III, IEEE Transactions on Application and Industry, vol. 83, No. 75, 1964.
- [6] ŠILJAK D. D. *Sampled — Data Control Systems with Transport Lag by Mitrovic's Algebraic Method*. AIEE Transactions on Application and Industry, pt. II, vol 56, No 57, 1961.
- [7] STOJIC M. R. *Sampled — Data Control Systems with Transport Lag by the Parameter Plane Method*. Presses Academiques Europeennes — Bruxelles 6, A REVUE, V. VIII — N. 3, Juillet 1966.
- [8] EISENBERG L. *Stability of Linear Systems with Transport Lag*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC—11, No. 2, 1966.
- [9] ЦЫПКИН Я. З. *Абсолютная устойчивость положения равновесия и процессов в нелинейных импульсных автоматических системах*. Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 12, 1963.
- [10] ГРАДШТЕЙН И. С., РЫЖИК И. М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Москва 1962.
- [11] JURY E. I. *Sampled — Data Control Systems*. New York 1958.
- [12] ШИЛЯК Д. Д. *Применение критерия Михайлова для исследования степени устойчивости и колебательности линейных импульсных систем*. Автоматика и телемеханика, т. XXVI, № 7, 1965.
- [13] TSYPKIN Ya. Z. *Stability and Sensitivity of Nonlinear Sampled — Data Control Systems*. Proc. of the IFAC Symposium on Sensitivity Analysis held in Dubrovnik, Yugoslavia 1966.
- [14] ПЕТРИЧ Й. Й. *Некоторые обобщения критерия Михайлова*. Автоматик и телемеханика, т. XXVI, № 12, 1965.

3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Формулируется алгебраический критерий абсолютной устойчивости процессов в нелинейных непрерывных автоматических системах. На основе предлагаемого алгебраического критерия разрабатывается методика применения метода параметрической плоскости для исследования абсолютной устойчивости и степени устойчивости нелинейных непрерывных систем автоматического управления.

Введение

В данной работе рассматривается большой класс нелинейных автоматических систем (НАС), который может быть сведен к структуре (рис. 1), состоящей из нелинейного элемента (НЭ) и линейной части (ЛЧ).

Характеристика НЭ может быть произвольной однозначной кусочно-непрерывной действительной функцией, удовлетворяющей условию $\Phi(0) = 0$ и определенному дополнительному неравенству. Если предположить что на систему, принадлежащую рассматриваемому классу, в момент $t = 0$ действуют внешние возмущения типа начальных условий, т.е. стремящиеся к нулю при $t \rightarrow \infty$, то в этом случае можно рассматривать абсолютную устойчивость положения равновесия системы, под которой подразумевается асимптотическая устойчивость положения равновесия в смысле Ляпунова.

Задача об абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейных систем была поставлена А. И. Лурье и В. Н. Постниковым [1] и вначале решалась многими авторами на основе второго метода Ляпунова.

В работах В. М. Попова [2, 3] был предложен частотный критерий абсолютной устойчивости положения равновесия НАС, основанный на использовании частотной характеристики ЛЧ. Метод В. М. Попова, некоторые результаты, полученные на основе развития этого метода, и связь между этим методом и прямым методом Ляпунова изложены в книге М. А. Айзермана и Ф. Р. Гантмахера [4].

Укажем на статью [5], в которой на основе метода В. М. Попова, результатов, полученных в [6], и использования логарифмических частотных характеристик дана методика синтеза корректирующих устройств, обеспечивающих абсолютную устойчивость положения равновесия и требуемый показатель качества (степень устойчивости).

Кроме исследования абсолютной устойчивости положения равновесия НАС, весьма важной является задача исследования абсолютной устойчивости процессов в НАС, вызванных различными задающими и возмущающими

воздействиями. Как показано [7], в этом случае условие абсолютной устойчивости положения равновесия является недостаточным для обеспечения нормальной работы НАС. В работе [7] сформулирован простой частотный критерий абсолютной устойчивости процессов, близкий к обычному частотному критерию устойчивости линейных автоматических систем, и разработана методика применения логарифмических частотных характеристик для синтеза корректирующих устройств, обеспечивающих выполнение требуемых достаточных условий абсолютной устойчивости и степени устойчивости процессов, не менее заданной.

Цель данной работы состоит в том, чтобы, на основании результатов, полученных в [7], сформулировать достаточный алгебраический критерий абсолютной устойчивости процессов в НАС. Этот критерий позволяет свести проблему исследования достаточных условий абсолютной устойчивости процессов в НАС к исследованию необходимых и достаточных условий устойчивости линейной автоматической системы, получаемой заменой НЭ в НАС соответствующим линейным усилителем с комплексным коэффициентом усиления.

Применение метода параметрической плоскости позволяет весьма просто исследовать абсолютную устойчивость и степень устойчивости, не менее заданной, процессов в нелинейной автоматической системы.

3.1. Постановка задачи

Предположим, что к рассматриваемой НАС при $t \geq t_0$, где возможно $t_0 < 0$, приложено некоторое внешнее воздействие $f(t)$ (рис. 1), ограниченное по модулю, для всех $t \geq t_0$, т. е. удовлетворяющее условию

$$(1) \quad \sup |f(t)| < \lambda < \infty.$$

Тогда интегральное уравнение относительно ошибки может быть представлено в виде

$$(2) \quad x(t) = f(t) - \int_{t_0}^t g(t-\tau) \varphi[x(\tau)] d\tau.$$

Применив двустороннее преобразование Лапласа к уравнению (2), получим

$$(3) \quad X(s) = P(s) - G(s) L\{\varphi[x(t)]\},$$

где $g(t)$ представляет собой импульсную характеристику ЛЧ, $G(s)$ — её передаточную функцию. В зависимости от характера полюсов передаточной функции $G(s)$, ЛЧ может быть устойчива, нейтральна или неустойчива.

Для анализа абсолютной устойчивости процессов в НАС предположим что характеристика нелинейного элемента $\Phi(x)$, удовлетворяющая условию

$$(4) \quad \Phi(0) = 0,$$

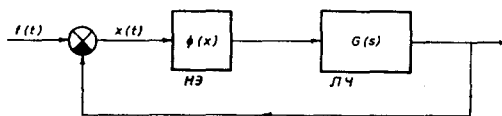


Рис. 1

дифференцируема и удовлетворяет также дополнительному неравенству

$$(5) \quad r < \frac{d \Phi(x)}{dx} < k,$$

т. е. ее производная принадлежит полосе (r, k) .

Интегральное уравнение (2) описывает процесс изменения ошибки $x(t)$, вызванный ограниченным внешним воздействием, приложенным к системе в момент $t=t_0$. Для исследования абсолютной устойчивости процессов предположим, что в момент $t=0$ на линейную часть системы воздействуют возмущения типа начальных условий. В результате действия этих возмущений при $t \geq 0$ процесс $x(t)$ изменится на величину $\xi(t)$, т. е. будет $x(t) + \xi(t)$, при чем для систему, ЛЧ которой устойчива

$$(6) \quad \xi(t) \equiv 0 \quad t < 0.$$

Как известно [7], процесс в НАС считается абсолютно устойчивым, если отклонение от процесса удовлетворяет условию

$$(7) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \xi(t) = 0.$$

Назовем НАС, в которой НЭ заменен линейным элементом, характеристика которого находится в секторе (r, k) , линеаризованой НАС.

В работе [7] было показано, что достаточными условиями абсолютной устойчивости процесса в НАС (рис. 1), с дифференцируемой характеристикой НЭ, удовлетворяющей условию (4), и производная которой принадлежит полосе (r, k) , является выполнение неравенства

$$(8) \quad \operatorname{Re} \frac{G(j\omega)}{1+rG(j\omega)} + \frac{1}{k-r} \geq 0 \quad (0 \leq \omega < \infty),$$

при условии, что линеаризованная система устойчива при коэффициенте усиления линейного элемента, равном r .

Целью настоящей работы является формулировка достаточного алгебраического критерия абсолютной устойчивости процессов в НАС, который позволял бы анализировать абсолютную устойчивость процесса путем исследования распределения корней характеристического уравнения некоторой линейной системы, полученной при замене НЭ в НАС линейным элементом с комплексным коэффициентом усиления.

3.2. Алгебраический критерий абсолютной устойчивости процессов

Для получения алгебраического критерия абсолютной устойчивости процессов воспользуемся графической интерпретацией неравенства (8).

Преобразуем неравенство (8), умножая его левую часть на $r > 0$. Тогда получим

$$(9) \quad \operatorname{Re} \frac{BkG(j\omega)}{1+BkG(j\omega)} + \frac{B}{1-B} \geq 0 \quad (0 \leq \omega < \infty),$$

где $B+r/k$ ($0 \leq B \leq 1$), а

$$(10) \quad kG(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega).$$

Геометрическое место точек, которое соответствует замене в (9) знака неравенства на равенство, описывается уравнением

$$(11) \quad [U + (1 + B)/2 B]^2 + V^2 = (1 - B)^2/4 B^2.$$

Это легко установить, подставляя (10) в левую часть (9), находя вещественную часть и приравнявая её нулю.

Уравнение (11) можно написать также в параметрической форме

$$(12) \quad U = -\frac{1}{2B}(1 + B) + \frac{1}{2B}(1 - B) \cos \beta, \quad V = \frac{1}{2B}(1 - B) \sin \beta.$$

где $0 \leq \beta < 2\pi$. Таким образом, каждая из точек на соответствующей B — окружности определяется известным значением параметра $\beta \in [0, 2\pi]$.

Уравнение (11) или (12) является уравнением семейства окружностей, каждой из которых соответствует свое значение параметра B . Все эти окружности проходят через точку $(-1; j0)$ и находится левее прямой $U = -1$ (рис. 2). При $B = 1$ B — окружность вырождается в точку $(-1; j0)$, а при $B = 0$ в прямую $U = -1$ на плоскости $kG(j\omega)$.

Как показано в [7], неравенство (8) или (9) будет выполняться если годограф частотной характеристики $kG(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ находится вне соответствующей B — окружности.

Как будет показано ниже, неравенство (8) или (9) будет также удовлетворяться, если комплексное уравнение

$$(13) \quad kG(s) - (U + jV) = 0$$

Гурвицово при всех значениях U, V . Определяемых уравнением соответствующей B — окружности. $kG(s)$ в уравнении (13) представляет собой передаточную функцию разомкнутой линеаризованной системы с коэффициентом усиления линейного элемента, равном k .

Для доказательств предположим, что координаты U и V (рис. 2) некоторой точки B — окружности фиксированы. В этом случае, используя те же самые рассуждения, на основе которых получен обычный критерий Найквиста для линейных систем, приходим к выводу что если уравнение (13) Гурвицово, то частотная характеристика $kG(j\omega)$, при изменении ω от 0 до ∞ , будет охватывать точку $(U; jV)$ в положительном направлении (т.е. против движения часовой стрелки) $\Pi/2$ раз, где Π равняется числу полюсов функции $G(s)$ с положительной вещественной частью.

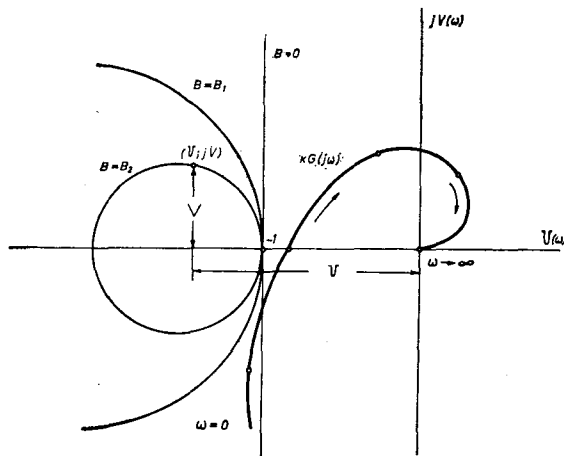


Рис. 2

Следовательно, если уравнение (13) по предположению Гурвицово при всех значениях U и V , определяемых из (12) и если число полюсов передаточной функции $G(s)$, имеющих положительную вещественную часть, равно Π , то частотная характеристика $kG(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ будет охватывать соответствующую B — окружность в положительном направлении $\Pi/2$ раз, т.е. будет находиться вне этой B — окружности. В частности, когда ЛЧ нейтральна или устойчива, т.е. когда $\Pi=0$, то частотная характеристика $kG(j\omega)$ не будет охватывать соответствующую B — окружность.

Таким образом, если уравнение (13) Гурвицово при всех значениях U и V , определяемых из (12), то, какая бы ни была ЛЧ (устойчива, нейтральна или неустойчива), частотная характеристика $kG(j\omega)$ будет находиться вне соответствующей B — окружности и, следовательно, первое условие частотного критерия абсолютной устойчивости — выполнение неравенства (8) или (9) — будет удовлетворяться.

Если подставим $\beta=\pi$ в (12), то получим $U=-1/B=-k/r$, $V=0$. При этих значениях U и V уравнение (13) приводится к виду

$$(14) \quad rG(s) + 1 = 0.$$

Уравнение (14) является характеристическим уравнением линеаризованной системы с коэффициентом усиления линейного элемента, равном r . Как выше упомянуто, эта система, по второму условию абсолютной устойчивости процессов, должна быть устойчива, т.е. уравнение (14) должно быть Гурвицово.

Однако, если уравнение (13) Гурвицово, по предположению, при всех значениях U и V , определяемых из (12), то оно будет Гурвицово и при $\beta=\pi$ в (12), т.е. для $U=-k/r$ и $V=0$. Как уже показано, в этом случае уравнение (13) приводится к виду (14) и, следовательно, уравнение (14) будет Гурвицово, т.е. и второе условие частотного критерия абсолютной устойчивости процессов будет выполняться.

Для получения алгебраического критерия абсолютной устойчивости процессов в НАС, вместо U и V в (13), вводим

$$(15) \quad N_1 = \frac{-U}{U^2 + V^2}, \quad N_2 = \frac{V}{U^2 + V^2}.$$

Заменив U и V из (12) в (15), получаем

$$(16) \quad N_1 = B \frac{1+B-(1-B)\cos\beta}{1+B^2-(1-B^2)\cos\beta}, \quad N_2 = B \frac{(1-B)\sin\beta}{1+B^2-(1-B^2)\cos\beta}.$$

Исключая параметр β из уравнений (16), получим

$$(17) \quad [N_1 - (1+B)/2]^2 + N_2^2 = (1-B)^2/4.$$

Последнее уравнение является уравнением семейства окружностей радиуса $R=(1-B)/2$ (рис. 3) и проходящих через точку $(1; 0)$ плоскости N_1, N_2 . Каждой из этих окружностей соответствует свое значение $B=r/k \geq 0$. При $B=1$ B — окружность вырождается в точку $(1; 0)$, а при $B=0$ в окружность с центром в точке $(1/2; 0)$ радиуса $R=1/2$.

Подставляя (15) в (13), после элементарных преобразований, уравнение (13) приводится к виду

$$(18) \quad k(N_1 + jN_2)G(s) + 1 = 0.$$

Как известно из теории линейных систем, передаточная функция линейной части системы может быть представлена в виде дробно-рациональной вещественной функции

$$(19) \quad G(s) = K \frac{P(s)}{Q(s)}$$

где K — коэффициент усиления ЛЧ, а $Q(s)$ и $P(s)$ — вещественные полиномы относительно s , соответственно степеней l и $m < l$:

$$(20) \quad Q(s) = c_0 + c_1s + \dots + c_l s^l, \quad P(s) = b_0 + b_1s + \dots + b_m s^m.$$

Подставив (19) в (18), получим

$$(21) \quad k(N_1 + jN_2)KP(s) + Q(s) = 0.$$

Таким образом, условие, чтобы уравнение (13) было Гурвицово при всех значениях U и V , определенных из (12), можно заменить условием, чтобы уравнение (21) было Гурвицово при всех значениях N_1 и N_2 , определенных уравнением соответствующей B — окружности (17) на плоскости N_1, N_2 . Поэтому, можно сформулировать следующий алгебраический критерий абсолютной устойчивости процессов в НАС.

Для того, чтобы процессы в НАС (рис. 1), характеристика НЭ которой $\Phi(x)$ удовлетворяет условию (1), дифференцируема и её производная $d\Phi(x)/dx$ принадлежит полосе (r, k) , были абсолютно устойчивы, достаточно, чтобы уравнение (21) было Гурвицово при всех значениях N_1 и N_2 , определенных уравнением B — окружности (17) (где $B=r/k$).

Заметим, что сформулированный выше достаточный условий абсолютной устойчивости процессов в НАС совпадает с необходимым и достаточным условием устойчивости некоторой линейной системы (рис. 4), которая получается заменой НЭ в НАС

(рис. 1) линейным усилителем с комплексным коэффициентом усиления $k(N_1 + jN_2)$. Назовем эту линейную систему, параметры которой N_1 и N_2 принимают все значения, определенные уравнением B — окружности (17), эквивалентной линейной системой (ЭЛС).

Обращая внимание на характер определения N_1 и N_2 заметим, что понятие „линейный усилитель с комплексным коэффициентом усиления $k(N_1 + jN_2)$ ” здесь введено чисто формально, так как оно не имеет какого — либо физического смысла.

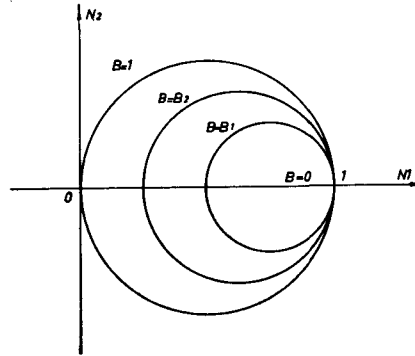


Рис. 3

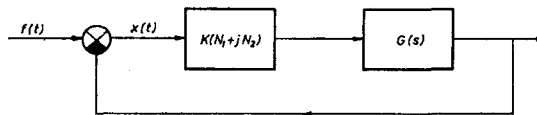


Рис. 4

Следует подчеркнуть, что сформулированный выше алгебраический критерий абсолютной устойчивости процессов в нелинейных непрерывных автоматических системах очень похож на соответствующий алгебраический критерий абсолютной устойчивости нелинейных импульсных систем автоматического регулирования [8].

3.3. Анализ абсолютной устойчивости процессов при помощи метода параметрической плоскости

Задача анализа линеаризованных систем автоматического регулирования при помощи метода параметрической плоскости рассматривалась в работах И. А. Вышнеградского [9], Ю. И. Неймарка [10], Д. Митровича [11], Д. Д. Шилаяка [12] и др. Метод был применен и для исследования абсолютной устойчивости и степени устойчивости (не менее заданной) нелинейных импульсных автоматических систем.

Для анализа абсолютной устойчивости процессов в НАС при помощи метода параметрической плоскости, подставим $s = j\omega$ в уравнение (21). Потом, выделяя вещественную и мнимую часть и приравнявая их нулю, получим

$$(22) \quad \begin{aligned} kKN_1 P_1(\omega) - kKN_2 P_2(\omega) + Q_1(\omega) &= 0, \\ kKN_1 P_2(\omega) + kKN_2 P_1(\omega) + Q_2(\omega) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$(23) \quad P(j\omega) = P_1(\omega) + jP_2(\omega), \quad Q(j\omega) = Q_1(\omega) + jQ_2(\omega).$$

Решая уравнения (22), для kKN_1 и kKN_2 , получаем

$$(24) \quad \begin{aligned} kKN_1 &= -\frac{P_1(\omega)Q_1(\omega) + P_2(\omega)Q_2(\omega)}{P_1^2(\omega) + P_2^2(\omega)}, \\ kKN_2 &= \frac{P_2(\omega)Q_1(\omega) - P_1(\omega)Q_2(\omega)}{P_1^2(\omega) + P_2^2(\omega)}. \end{aligned}$$

Пользуясь уравнениями (24), в плоскости kKN_1, kKN_2 можно построить кривую D — разбиения при изменении ω от $-\infty$ до ∞ . Эта кривая разделяет плоскость параметров kKN_1, kKN_2 на области, внутри которых все уравнения (21) имеют одинаковое количество корней, находящихся слева от мнимой оси плоскости s .

Так как для устойчивости процессов достаточно, чтобы уравнение (21) было Гурвицово, то достаточно определить участок плоскости параметров, в котором все корни уравнения (21) лежат слева от мнимой оси плоскости s . Этот участок плоскости параметров будет являться областью устойчивости.

Воспользовавшись уравнением семейства B — окружностей (17), можно изобразить окружность и в плоскости kKN_1, kKN_2 которой будут соответствовать свои значения параметров r, k и K . Нетрудно показать, что B — окружность в плоскости N_1, N_2 , описываемая уравнением (17), пересекает ось абсцисс в точках $B = r/k$ и 1. Поэтому, соответствующая окруж-

ность в плоскости параметров kKN_1, kKN_2 пересекает ось абсцисс в точках rK и kK (рис. 5). Назовем окружность, однозначно определяемую соответствующими значениями параметров r, k и K (рис. 5) параметрической окружностью.

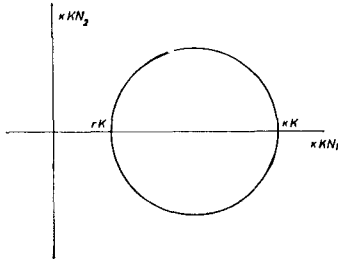


Рис. 5

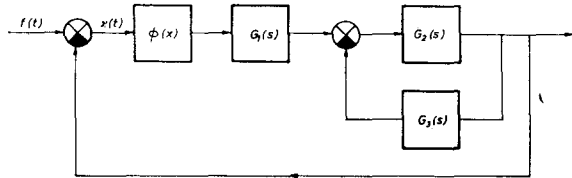


Рис. 6

На основании сформулированного в предыдущем разделе алгебраического критерия, легко установить, что процессы в НАС, с характеристикой НЭ, производная которой принадлежит полосе (r, k) , и ЛЧ которой описывается передаточной функцией $G(s) = KP(s)/Q(s)$ будут абсолютно устойчивы в этом случае, если в плоскости параметров rKN_1, kKN_2 соответствующая параметрическая окружность находится внутри области устойчивости.

Рассмотрим пример. Положим что передаточные функции элементов системы, структурная схема которой показана на рис. 6, есть, соответственно

$$(25) \quad G_1(s) = 50K \frac{s+2}{s+28}, \quad G_2(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+0,5)}, \quad G_3(s) = 50K_3s \frac{s+1}{s+28}.$$

Характеристика нелинейного элемента $\Phi(x)$ системы дифференцируема, удовлетворяет условию $\Phi(0) = 0$ и её производная принадлежит полосе (r, k) .

Пользуясь алгебраическим критерием абсолютной устойчивости процессов, найдем при помощи метода параметрической плоскости максимальные значения kK , соответствующие различным значениям rK , и определим зависимость $(kK)_{\max} = S(rK)$.

Для применения метода параметрической плоскости, найдем передаточную функцию линейной части системы

$$(26) \quad G(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_2(s)G_3(s)}.$$

Учитывая (25), получим

$$(27) \quad G(s) = K \frac{P(s)}{Q(s)} = K \frac{s+2}{s^4 + 29,5s^3 + (42,5 + 100K_3)s^2 + (14 + 100K_3)s}.$$

Подставив полиномы $P(s)$ и $Q(s)$ из (27), получим

$$(28) \quad k(N_1 + jN_2)K(s+2) + s^4 + 29,5s^3 + (42,5 + 100K_3)s^2 + (14 + 100K_3)s = 0.$$

Отсюда получим, далее, выражения, соответствующие (16), в виде

$$(29) \quad \begin{aligned} kKN_1 &= \frac{\omega^2}{4 + \omega^2} (0,275\omega^2 + 0,71 + K_3), \\ kKN_2 &= \frac{\omega}{4 + \omega^2} (0,01\omega^4 + 0,165\omega^2 - K_3\omega^2 - 0,28 - 2K_3). \end{aligned}$$

Задаваясь различными положительными значениями ω и подставляя их в уравнения (29), можно построить в плоскости kKN_1, kKN_2 соответствующие кривые D — разбиения для различных значений $K_3 = 1, 2, 3$ и 4 (рис. 7).

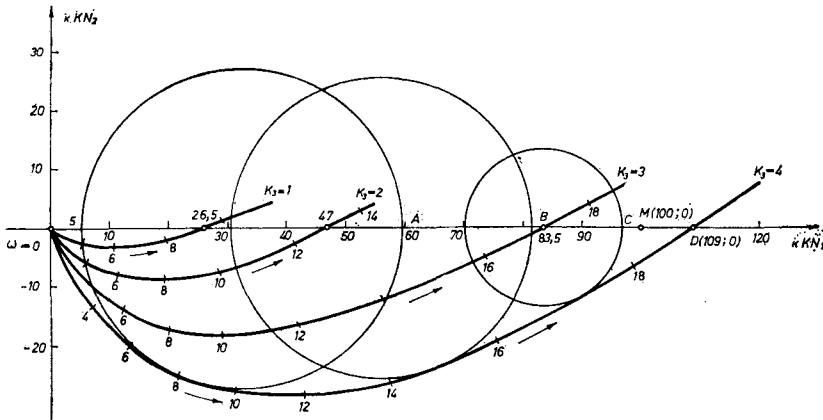


Рис. 7

Так как kKN_1 и kKN_2 являются, соответственно, четной и нечетной функциями ω , то участок кривой D — разбиения для отрицательных значений ω симметричен относительно оси абсцисс участку кривой D — разбиения, для $0 \leq \omega < \infty$. Поэтому, при дальнейшем рассмотрении будем иметь в виду, что этот участок существует для $\omega < 0$, хотя он и не изображен ради упрощения чертежа.

Полагая $N_1 = 1$ и $N_2 = 0$ в уравнении (28), получим

$$(30) \quad s^4 + 29,5 s^3 + (42,5 + 100 K_3) s^2 + (100 kK + 100 K_3 + 14) s + 200 kK = 0.$$

Уравнение (30) является характеристическим уравнением линеаризованной системы, получаемой заменой НЭ в исследуемой системе линейным элементом с коэффициентом усиления, равны k . При $K_3 = 4$ и $kK = 100$, уравнение (30) приводится к виду

$$(31) \quad s^4 + 29,5 s^3 + 442,5 s^2 + 10414 s + 20\,000 = 0.$$

Воспользовавшись критерием Рауса — Гурвица или Михайлова, легко установить что уравнение (31) является Гурвицовым.

Значения $N_1 = 1$, $N_2 = 0$ и $kK = 100$ определяют точку $M(100; 0)$ на плоскости kKN_1, kKN_2 (рис. 7), которая находится в области, лежащей слева от кривой D — разбиения (для $K_3 = 4$) при возрастании ω . Так как при данных значениях $N_1 = 1$, $N_2 = 0$, $kK = 100$ и $K_3 = 4$ уравнение (28) превращается в уравнение (31), которое является Гурвицовым, то можно заключить, что выше упомянутая область является областью устойчивости. Таким же способом можно получить аналогичные результаты и для других кривых D — разбиения, начертанных для $K_3 = 1, 2$ и 3 (рис. 7).

Для определения максимальных значений kK , соответствующих значениям rK и $K_3 = 4$, при которых выполняются достаточные условия абсолютной устойчивости процессов, впишем внутрь области устойчивости соответствующие параметрические окружности, касающиеся кривой D — разбиения, построенной для $K_3 = 4$. На рис. 7 изображены такие окружности для $rK = 5$, $rK = 30$ и $rK = 70$. При этом максимальные значения kK равняются, соответственно, абсциссам точек $A(60; 0)$, $B(81; 0)$ и $C(97; 0)$. Если вписать большое количество параметрических окружностей внутрь области устойчивости, касающихся кривой D — разбиения, то, по приведенному выше способу определения максимальных значений kK , построим кривую $(kK)_{\max} = S(rK)$ (рис. 8, а). Зная численные значения r и K , с помощью кривой на рис. 8, а легко определить значение предельного коэффициента $k_{\text{пр}}$ полосы ($r, k_{\text{пр}}$).

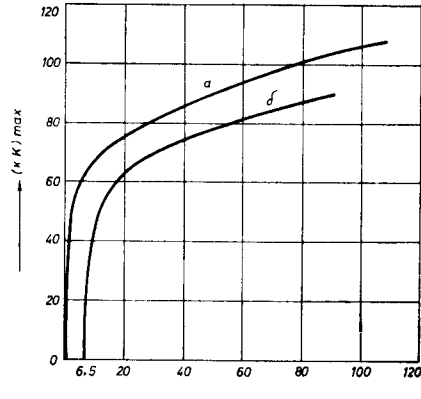


Рис. 8

Нетрудно показать, что при $B = 1$ ($r = k$) соответствующая параметрическая окружность вырождается в точку kK оси абсцисс плоскости kKN_1, kKN_2 . В этом случае полученные достаточные условия абсолютной устойчивости процессов соответствуют необходимым и достаточным условиям устойчивости линеаризованной системы с коэффициентом усиления линейного элемента, равным k . Предельное значение kK , при котором линеаризованная система будет устойчива, определяется абсциссой точки пересечения кривой D — разбиения с осью kKN_1 . Для рассматриваемой нелинейной системы это значение равняется абсциссе точки $D(109; 0)$ (рис. 7) и, следовательно, линеаризованная система будет устойчива при всех значениях $0 < kK < 109$.

Приведенные выше результаты получены при $K_3 = 4$. Повторяя изложенную выше методику, с помощью кривых D — разбиения (рис. 7), можно получить соответствующие результаты и при значениях $K_3 = 1, 2$ и 3 .

3.4. Анализ достаточных условий обеспечивающих степень устойчивости процессов не менее заданной

В работе [7] введен частотный критерий, при выполнении которого процессы в нелинейной системе (рис. 1) будут иметь степень устойчивости не менее заданной, т. е. отклонение от процесса будет удовлетворять условию

$$(32) \quad |\xi|(t) < M_0 e^{-\sigma t}.$$

где $M_0 = \text{const}$, σ — заданная степень устойчивости.

Этот критерий гласит, что для того чтобы процессы в нелинейной системе (рис. 1) имели степень устойчивости не менее заданной σ , доста-

точно, чтобы частотная характеристика линейной части системы удовлетворяла условию

$$(33) \quad \operatorname{Re} \frac{G(-\sigma + j\omega)}{1 + rG(-\sigma + j\omega)} + \frac{1}{k-r} \geq 0 \quad (0 \leq \omega < \infty).$$

При этом степень устойчивости линеаризованной системы с коэффициентом усиления линейного элемента r , должна быть не менее заданной σ и производная нелинейной характеристики $d\Phi(x)/dx$ должна принадлежать полосе (r, k) .

Для получения алгебраического критерия степени устойчивости процессов, производим подстановку

$$(34) \quad s = -\sigma + w$$

в уравнение (21).

Тогда получим

$$(35) \quad k(N_1 + jN_2)KP(-\sigma + w) + Q(-\sigma + w) = 0.$$

Подстановка (34) преобразует область левее прямой $\operatorname{Re} s = -\sigma$ плоскости s в левую полуплоскость плоскости w (рис. 9). При этом, корни уравнения (35), лежащие в левой полуплоскости w , соответствуют корням уравнения (21), лежащим левее прямой $\operatorname{Re} s = -\sigma$ плоскости s .

Как уже было показано в разделе 2, если уравнение (35) Гурвицово при всех значениях N_1 и N_2 , определенных уравнением соответствующей B — окружности (17), то будет выполняться неравенство (33) и уравнение

$$(36) \quad rG(-\sigma + w) + 1 = 0$$

будет также Гурвицово, т. е. степень устойчивости линеаризованной системы с коэффициентом усиления линейного элемента r будет не менее заданной σ .

Поэтому, можно сформулировать следующий алгебраический критерий степени устойчивости процессов.

Для того, чтобы процессы в нелинейной системе (рис. 1) имели степень устойчивости не менее заданной σ , достаточно, чтобы все корни уравнения (21) при всех значениях N_1 и N_2 , определенных уравнением соответствующей B — окружности (17), были с отрицательной вещественной частью большей σ по модулю.

При этом нелинейная характеристика $\Phi(x)$ должна удовлетворять условию $\Phi(0) = 0$ и её производная $d\Phi(x)/dx$ должна принадлежать полосе (r, k) .

Сформулированный выше критерий степени устойчивости процессов в нелинейной системе (рис. 1) является необходимым и достаточным критерием степени устойчивости ЭЛС (рис. 4).

Для исследования степени устойчивости процессов с помощью метода параметрической плоскости, представим уравнение (21) в более общем виде

$$(37) \quad \sum_{i=0}^l a_i s^i = 0,$$

где коэффициенты $a_i (i = 0, 1, \dots, m)$ — комплексные числа

$$(38) \quad a_i = b_i kKN_1 + jb_i kKN_2 + c_i.$$

Потом, произведем подстановку

$$(39) \quad s = -\sigma + j\omega.$$

Для s^i получим:

$$(40) \quad s^i = X_i(\sigma, \omega) + jY_i(\sigma, \omega)$$

где $X_i(\sigma, \omega)$ и $Y_i(\sigma, \omega)$ являются функциями вида:

$$(41) \quad \begin{aligned} X_i(\sigma, \omega) &= \sum_{i=0}^i (-1)^{i-i} \binom{i}{i} \sigma^{i-i} \omega^i \cos i\pi/2, \\ Y_i(\sigma, \omega) &= \sum_{i=0}^i (-1)^{i-i} \binom{i}{i} \sigma^{i-i} \omega^i \sin i\pi/2. \end{aligned}$$

Нетрудно показать что для функций $X_i(\sigma, \omega)$ и $Y_i(\sigma, \omega)$ оправедливы следующие рекурентные формулы:

$$(42) \quad \begin{aligned} X_{i+1}(\sigma, \omega) + 2\sigma X_i(\sigma, \omega) + (\sigma^2 + \omega^2) X_{i-1}(\sigma, \omega) &= 0, \\ Y_{i+1}(\sigma, \omega) + 2\sigma Y_i(\sigma, \omega) + (\sigma^2 + \omega^2) Y_{i-1}(\sigma, \omega) &= 0, \end{aligned}$$

при $i \geq 2$, причем $X_0(\sigma, \omega) \equiv 1$, $X_1(\sigma, \omega) \equiv -\sigma$, $Y_0(\sigma, \omega) \equiv 0$, $Y_1(\sigma, \omega) \equiv \omega$.

Подставляя (38) и (40) в уравнение (37), находя вещественную и мнимую часть и приравнивая их нулю, получим

$$(43) \quad \begin{aligned} kKN_1 A_1(\sigma, \omega) - kKN_2 A_2(\sigma, \omega) + D_1(\sigma, \omega) &= 0, \\ kKN_1 A_2(\sigma, \omega) + kKN_2 A_1(\sigma, \omega) + D_2(\sigma, \omega) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$(44) \quad \begin{aligned} A_1(\sigma, \omega) &= \sum_{i=0}^m b_i X_i(\sigma, \omega), & A_2(\sigma, \omega) &= \sum_{i=0}^m b_i Y_i(\sigma, \omega), \\ D_1(\sigma, \omega) &= \sum_{i=0}^l c_i X_i(\sigma, \omega), & D_2(\sigma, \omega) &= \sum_{i=0}^l c_i Y_i(\sigma, \omega). \end{aligned}$$

Решая уравнения (44), для kKN_1 и kKN_2 получим

$$(45) \quad \begin{aligned} kKN &= -\frac{A_1(\sigma, \omega) D_1(\sigma, \omega) + A_2(\sigma, \omega) D_2(\sigma, \omega)}{A_1^2(\sigma, \omega) + A_2^2(\sigma, \omega)}, \\ kKN &= \frac{A_2(\sigma, \omega) D_1(\sigma, \omega) - A_1(\sigma, \omega) D_2(\sigma, \omega)}{A_1^2(\sigma, \omega) + A_2^2(\sigma, \omega)}. \end{aligned}$$

Изменяя ω от $-\infty$ до $+\infty$ при заданной степени устойчивости σ , с помощью уравнений (45), можно построить кривую D — разбиения в плоскости параметров kKN_1 , kKN_2 . На самом деле, эта кривая получается отображением прямой $\text{Re } s = -\sigma$ (рис. 9, а) в плоскость параметров.

Как известно, пользуясь полученной кривой D — разбиения, можно определить область заданной степени устойчивости, т.е. участок плоскости параметров, для которого все корни уравнения (21) будут иметь вещественную часть отрицательную и большую σ по модулю.

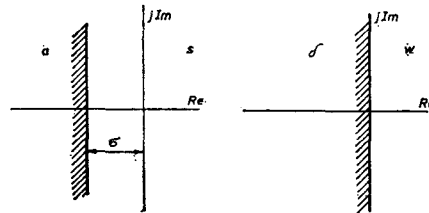


Рис. 9

После определения области заданной степени устойчивости и вписывания внутрь этой области параметрических окружностей, касающихся кривой D — разбиения, получаем зависимость $(kK)_{\max} = S(rK)$.

Для иллюстрации рассмотрим снова нелинейную систему, структурная схема которой показана на рис. 6. Для $K_3 = 4$ определим достаточные условия, обеспечивающие степень устойчивости процессов в рассматриваемой системе не менее заданной $\sigma = 1$.

Подставляя $K_3 = 4$ в уравнение (28), после элементарных преобразований получим уравнение (37) в виде

$$(46) \quad s^4 + 29,5 s^3 + 442,5 s^2 + (100 kKN_1 + j 100 kKN_2 + 414) s + 200 kKN_1 + j 200 kKN_2 = 0.$$

При $\sigma = 1$, с помощью рекуррентных формул (42), вычислим функции $X_i(1, \omega)$ и $Y_i(1, \omega)$ и потом, пользуясь уравнениями (44) и (46), получим уравнения (45) в виде

$$(47) \quad \begin{aligned} kKN_1 &= \frac{\omega^2}{1 + \omega^2} (0,244 \omega^2 + 9,235), \\ kKN_2 &= \frac{\omega}{1 + \omega^2} (0,01 \omega^4 - 3,345 \omega^2 + 5,635). \end{aligned}$$

Подставляя значения ω от 0 до ∞ в уравнения (47), построим кривую D — разбиения для заданной степени устойчивости $\sigma = 1$ (рис. 10).

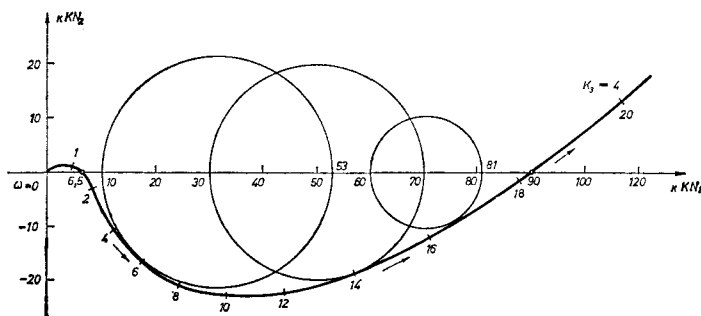


Рис. 10

Следуя методике, изложенной в предыдущем примере, т.е. находя область заданной степени устойчивости и вписывая внутрь этой области параметрические окружности, касающиеся кривой D — разбиения, определим зависимость $(kK)_{\max} = S(rK)$ при заданной степени устойчивости (рис. 8, б).

Из рис. 10 видно, что линеаризованная система будет обладать степенью устойчивости не менее заданной $\sigma = 1$ для всех значениях $6,5 < kK < 90$.

Расстояние между кривыми (рис. 8) показывает насколько область заданной степени устойчивости меньше чем область устойчивости.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] ЛУРЬЕ А. И., ПОСТНИКОВ В. Н. *К теории устойчивости регулируемых систем.* Прикл. матем. и механ., т. 8, № 3, 1944.
- [2] POPOV V. M. *Criterii de stabilitate pentru sistemele nelinare de reglare automata befote pe utilizarea transformatei Laplace.* Studii si cercetari de energetica, Acad. R. P. R., annul. IX, № 1, 1959.
- [3] ПОПОВ В. М. *Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования.* Автоматика и телемеханика, т. XXII, № 8, 1961.
- [4] АЙЗЕРМАН М. А., ГАНТМАХЕР Ф. Р. *Абсолютная устойчивость регулируемых систем.* Изд-во АН СССР, 1963.
- [5] НАУМОВ Б. Н. *Исследование абсолютной устойчивости положения равновесия в нелинейных системах автоматического управления при помощи логарифмических частотных характеристик.* Автоматика и телемеханика, т. XXVI, №4, 1965.
- [6] ЯКУБОВИЧ В. А. *Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. III. Абсолютная устойчивость вынужденных колебаний.* Автоматика и телемеханика, т. XXV, № 7, 1964.
- [7] НАУМОВ Б. Н., ЦЫПКИН Я. З. *Частотный критерий абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах автоматического управления.* Автоматика и телемеханика, т. XXV, № 6, 1964.
- [8] СТОИЧ М. Р. *Алгебраические критерии абсолютной устойчивости нелинейных импульсных систем.* (статья, предложенная для опубликования в Автоматике и телемеханике, отправлена 1, 3967 г.)
- [9] МАКСВЕЛЛ Дж., ВЫШНЕГРАДСКИЙ И. А., СТОДОЛА А. *Теория систем евтоматического регулирования.* Изд-во АН СССР, 1949.
- [10] НЕЙМАРК Ю. И. *Устойчивость линеаризованных систем.* ЛКВВИА, 1949.
- [11] MITROVIĆ D. *Graphical Analysis and Synthesis of Feedback Control Systems.* Parts I, II and III. AIEE Transactions on Application and Industry, vol. 77, pt. II, 1958.
- [12] ŠILJAK D. D. *Analysis and Synthesis of Feedback Control Systems in the Parametar Plane.* Parts I, II and III. IEEE Transactions on Application and Industry, vol. 63, № 75, 1964.

4. ОБ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ В НЕЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

На основе частотного критерия В. М. Попова [1, 2] и результатов, полученных в [3], формулируется алгебраический критерий абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейных непрерывных систем автоматического управления. Этот критерий позволяет исследовать абсолютную устойчивость положения равновесия нелинейной системы путем исследования распределения корней алгебраического уравнения, являющимся характеристическим уравнением эквивалентной линейной системы с комплексным коэффициентом усиления. Определение достаточных условий, обеспечивающих абсолютную устойчивость положения равновесия, иллюстрируется примерами.

4.1. Постановка задачи. Алгебраический критерий

Рассмотрим нелинейную систему, которая может быть сведена к структуре (рис. 1), представляющей собой соединение нелинейного элемента и линейной части.

Нелинейный элемент описывается произвольной однозначной кусочно-непрерывной функцией $\Phi(x)$, характеристика которого находится внутри угла, ограниченного осью абсцисс и прямой $y = kx$ ($k > 0$).

Предположим, что линейная часть системы, которая характеризуется передаточной функцией $G(s)$ устойчива, т.е. все полюсы функции $G(s)$ имеют отрицательную вещественную часть.

Частотный критерий абсолютной устойчивости положения равновесия В. М. Попова [1, 2], применительно к нелинейной системе (рис. 1), гласит, что положение равновесия нелинейной системы абсолютно устойчиво (под этим подразумевается асимптотическая устойчивость в смысле Ляпунова) если существует такое действительное число q , при котором выполняется неравенство

$$(1) \quad \operatorname{Re}(1 + qj\omega)G(j\omega) + 1/k > 0 \quad (0 \leq \omega < \infty),$$

или

$$(3) \quad \operatorname{Re} k(1 + qj\omega)G(j\omega) + 1 > 0 \quad (0 \leq \omega < \infty),$$

где $G(j\omega)$ — частотная характеристика линейной части системы.

Для получения алгебраического критерия абсолютной устойчивости положения равновесия, обозначим в неравенстве (2)

$$(3) \quad (1 + qj\omega)G(j\omega) = G_q(q, j\omega).$$

Тогда неравенство (2) можно написать в виде

$$(4) \quad \operatorname{Re} kG_q(q, j\omega) + 1 > 0 \quad (0 \leq \omega < \infty).$$

Выражение (4) совпадает с соответствующим неравенством, полученным в работе [4], для абсолютной устойчивости процессов.

Поэтому, критерий Попова можно сформулировать следующим образом: для того, чтобы положение равновесия нелинейной системы (рис. 1) было абсолютно устойчивым, достаточно, чтобы существовало такое действительное число q (равное нулю, положительное или отрицательное), при котором для всех значений $0 \leq \omega < \infty$, характеристика, описываемая вектором

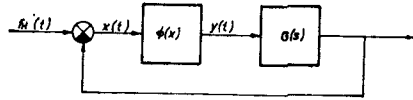


Рис. 1

$$(5) \quad kG_q(q, j\omega) = U_q(\omega) + jV_q(\omega)$$

находилась бы правее прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку $(-1, j0)$ (рис. 2).

Используя результаты, полученные в работе [3], нетрудно видеть, что сформулировану выше частотному критерию соответствует следующий алгебраический критерий абсолютной устойчивости положения равновесия

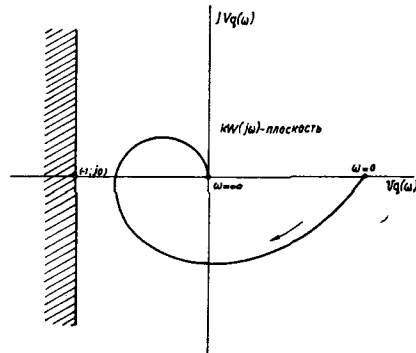


Рис. 2

Для того, чтобы положение равновесия нелинейной системы (рис. 1) было абсолютно устойчивым, достаточно, чтобы существовало такое действительное число q , при котором уравнение

$$(6) \quad k(N_1 + jN_2)(1 + qs)G(s) + 1 = 0.$$

является Гурвицовым при всех значениях N_1 и N_2 , определенных уравнением окружности

$$(7) \quad (N_1 - 1/2)^2 + N_2^2 = 1/4.$$

Если выразить передаточную функцию $G(s)$ как дробно-рациональную функцию вида

$$(8) \quad G(s) = K \frac{P(s)}{Q(s)},$$

где K — коэффициент усиления линейной части, $Q(s)$ и $P(s)$ — вещественные полиномы, соответственно, степеней l и $m < l$, то уравнение (6) можно написать в виде

$$(9) \quad k(N_1 + jN_2)(1 + qs)KP(s) + Q(s) = 0.$$

Уравнение (9) или (6) является характеристическим уравнением линейной системы (рис. 3), полученной при замене нелинейного элемента нелинейной системы (рис. 1) линейным элементом с передаточной функцией $k(N_1 + jN_2)(1 + qs)$.

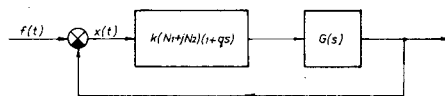


Рис. 3

Если предположить, что N_1 и N_2 изменяются вдоль окружности, описываемой уравнением (7), то на основании сформулированного выше алгебраического критерия заключаем, что необходимые и достаточные условия устойчивости линейной системы (рис. 3) соответствуют достаточным условиям абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейной системы (рис. 1).

4.2. Анализ достаточных условий, обеспечивающих абсолютную устойчивость положения равновесия

Используя данный выше критерий, задачу исследования достаточных условий абсолютной устойчивости положения равновесия можно сформулировать следующим образом: необходимо определить число $q = q_0$ (положительное или отрицательное), при котором уравнение (9) не имеет корней в правой полуплоскости при всех значениях N_1 и N_2 , определенных уравнением (7), причем выбранное значение $q = q_0$ должно соответствовать предельному значению $(kK) = (kK)_{пр}$. Для решения этой задачи воспользуемся методом параметрической плоскости [3].

Если подставить $q = q_0$ и $s = j\omega$ в уравнение (9), то получим

$$(10) \quad k(N_1 + jN_2)(1 + q_0 j\omega) KP(j\omega) + Q(j\omega) = 0.$$

Вместе N_1 и N_2 вводим новые переменные

$$(11) \quad N_1^* + jN_2^* = (N_1 + jN_2)(1 + q_0 j\omega)$$

где

$$(12) \quad N_1^* \equiv N_1 - q_0 \omega N_2, \quad N_2^* \equiv N_2 + q_0 \omega N_1.$$

Нетрудно показать, что если N_1 и N_2 связаны соотношением (7), то N_1^* и N_2^* будут удовлетворять уравнению

$$(13) \quad (N_1^* - 1/2)^2 + (N_2^* - q_0 \omega/2)^2 = \frac{1}{4}(1 + q_0^2 \omega^2).$$

Уравнение (13) является уравнением семейства окружностей с центром в точке $(1/2; q_0 \omega/2)$ и имеющих радиус $R = 1/2 \sqrt{1 + q_0^2 \omega^2}$. Все эти окружности проходят через начало координат и точку $(1; 0)$ в плоскости N_1^*, N_2^* и каждой из них будет соответствовать свое значение $q_0 \omega$ (рис. 4). При $q_0 \omega = \infty$ соответствующая окружность вырождается в ось абсцисс плоскости N_1^*, N_2^* .

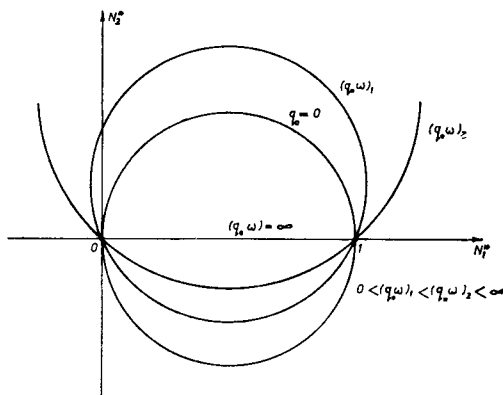


Рис. 4

Подставляя (1) в (10), выделяя вещественную и мнимую част и приравнивая их нулю, получим

$$(14) \quad \begin{aligned} kKN_1^* P_1(\omega) - kKN_2^* P_2(\omega) + Q_1(\omega) &= 0, \\ kKN_1^* P_2(\omega) + kKN_2^* P_1(\omega) + Q_2(\omega) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$(15) \quad P(j\omega) = P(\omega) + jP_2(\omega), \quad Q(j\omega) = Q_1(\omega) + jQ_2(\omega).$$

Решая уравнения (14), для kKN_1^* и kKN_2^* , получаем

$$(16) \quad \begin{aligned} kKN_1^* &= -\frac{P_1(\omega) Q_1(\omega) + P_2(\omega) Q_2(\omega)}{P_1^2(\omega) + P_2^2(\omega)}, \\ kKN_2^* &= \frac{P_2(\omega) Q_1(\omega) - P_1(\omega) Q_2(\omega)}{P_1^2(\omega) + P_2^2(\omega)}. \end{aligned}$$

Для определения $q = q_0$ и соответствующего ему предельного значения $(kK)_{пр}$, с помощью уравнений (16) в плоскости kKN_1^*, kKN_2^* следует построить кривую границы устойчивости при изменении ω от 0 до ∞ (рис. 5).

Кроме этой кривой, на плоскости kKN_1^*, kKN_2^* нужно построить также и так называемую параметрическую окружность, касающуюся границы области устойчивости. Для получения этой окружности, обратим внимание то что для определенного значения q_0 ω окружность, описываемая уравнением (13), перескает ось абсцисс в точках 0 и 1. Поэтому, соответствующая параметрическая окружность в плоскости kKN_1^*, kKN_2^* перескает ось абсцисс в точках 0 и $(kK)_{пр}$ (рис. 5). Центр этой окружности находится в точке $C(\alpha; \beta)$, где

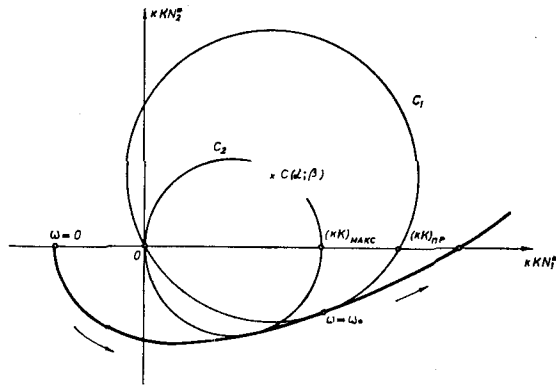


Рис. 5

$$(17) \quad \alpha = \frac{1}{2} (kK)_{пр}, \quad \beta = \frac{1}{2} (kK)_{пр} q_0 \omega_0.$$

Значение $\omega = \omega_0$, при котором параметрическая окружность касается границы области устойчивости определяется путем интерполяции кривой границы области устойчивости в окрестности точки касания. После определения значения $\omega = \omega_0$ из рисунка 5. и уравнения (17) при известном β определяется значение q_0 и соответствующее ему предельное значение $(kK)_{пр}$.

На основании результатов, полученных в [3], видно, что при $q = q_0 = 0$ полученные досточные условия соответствуют абсолютной устойчивости про-

цессов. В этом случае соответствующее максимальное для kK равняется координате точки пересечения параметрической окружности, полученной при $q = q_0 = 0$, с осью абсцисс плоскости kKN_1^* , kKN_2^* (рис. 5).

Пример 1. Пусть передаточная функция линейной части системы автоматического регулирования (рис. 1) имеет вид

$$(18) \quad G(s) = \frac{K}{(s+1,5)(s^2+4s+5)}.$$

Описаным выше способом исследования достаточных условий, обеспечивающих абсолютную устойчивость положения равновесия, определим значение $q_0 = q_0^*$ и соответствующее ему значение $(kK)_{\text{пр}}$, q_0^* отвечает максимальному значению $(kK)_{\text{пр макс}}$.

Для рассматриваемой системы уравнения (16) имеют вид

$$(19) \quad kKN_1^* = 5,5\omega^2 - 7,5, \quad kKN_2^* = \omega^3 - 11\omega.$$

Задавая положительными значениями ω и подставляя их в уравнения (19), построим соответствующую кривую в плоскости kKN_1^* , kKN_2^* (рис. 6).

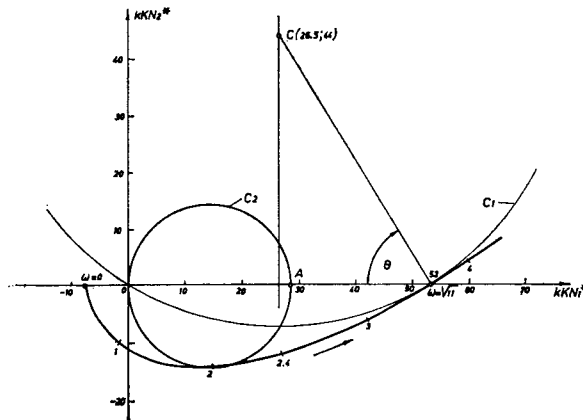


Рис. 6

Максимальному значению $(kK)_{\text{пр макс}}$ соответствует параметрическая окружность, касающаяся кривой, проходящая через начало координат и имеющая наибольший возможный радиус. На рис. 6 ей соответствует окружность C_1 с центром в точке $C(26,5; 44)$. Значение $\omega = \omega_0$ можно получить путем интерполяции или из уравнения $kKN_2^* = 0$. Таким образом получаем $\omega_0 = \sqrt{11}$. Зная численное значение ω_0 и координату центра параметрической окружности и используя уравнения (17), получаем $(kK)_{\text{пр макс}} = 53$ и $q_0^* = 0,5$.

Значение q_0^* можно определить также аналитически. Из уравнений (17) и рис. 6 видно, что $q_0^* = \operatorname{tg} \theta / \omega_0$, где

$$(20) \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{d(kKN_1^*)/d\omega}{d(kKN_2^*)/d\omega} \Big|_{\omega = \omega_0}.$$

Если подставить $q = q_0^*$ в выражение $G_q(s) = (1 + qs)G(s)$, то получим передаточную функцию $G_{q_0^*}(s)$, которая используется для синтеза корректирующих устройств [5] (методом логарифмических частотных характеристик), обеспечивающих абсолютную устойчивость положения равновесия при требуемом значении $(kK)_{\text{тр}} > (kK)_{\text{пр макс}}$.

Одновременно мы получаем максимальное значение $(kK)_{\text{макс}}$, при котором процессы будут абсолютно устойчивы. Это значение, как известно [3], соответствует абсциссе точки A (рис. 6), равной $(kK)_{\text{макс}} = 28,5$.

4.3. Степень устойчивости

В работе [6] показано, что для того, чтобы процесс $x(t)$ в нелинейной системе (рис. 1), вызванный внешним воздействием типа начальных условий $f_H(t)$, т.е. удовлетворяющий условию

$$(21) \quad \int_0^{\infty} |f_H(t)| dt = M_0 < \infty, \quad M_0 = \text{const}$$

был абсолютно устойчивым и система имела степень устойчивости не менее заданной σ , достаточно, чтобы существовало такое число q (равное нулю, положительное или отрицательное), при котором частотная характеристика линейной части системы $G(j\omega)$ удовлетворяла бы неравенству

$$(22) \quad \operatorname{Re}(1 + qj\omega)G(-\sigma + j\omega) + 1/k < 0 \quad (0 < \omega < \infty),$$

или

$$(23) \quad \operatorname{Re} k(1 + qj\omega)G(-\sigma + j\omega) + 1 > 0 \quad (0 < \omega < \infty),$$

При этом заданная степень устойчивости σ должна быть всегда меньше степени устойчивости линейной части системы и характеристика нелинейного элемента $\Phi(x)$ должна находиться внутри сектора, ограниченного осью абсцисс и прямой $y = kx$.

Исходя из результатов, полученных в [3], легко установить, что сформулированным выше условиям отвечает следующий критерий степени устойчивости. Для того, чтобы процесс $x(t)$ в нелинейной системе (рис. 1), вызванный внешним воздействием типа начальных условий, был абсолютно устойчивым и система имела степень устойчивости не менее заданной, достаточно, чтобы существовало такое вещественное число q при котором уравнение

$$(24) \quad k(N_1 + jN_2)(1 + qw)G(-\sigma + w) + 1 = 0$$

является Гурвицовым при всех значениях N_1 и N_2 , определенных уравнением окружности (7).

Если подставить

$$(25) \quad s = -\sigma + w$$

в уравнение (24), то получим

$$(26) \quad k(N_1 + jN_2)(1 + q\sigma + qs)G(s) + 1 = 0,$$

где $G(s)$ — передаточная функция линейной части системы. Эта функция определена выражением (8), поэтому уравнение (26) можно переписать в виде

$$(27) \quad k(N_1 + jN_2)(1 + q\sigma + qs)KP(s) + Q(s) = 0.$$

Подстановка (25) преобразует область находящуюся левее прямой $\operatorname{Re} s = -\sigma$ плоскости s в левую полуплоскость комплексной переменной w . При этом, корни уравнения (24), лежащие в левой полуплоскости плоскости w будут соответствовать корням уравнения (27), лежащим левее прямой $\operatorname{Re} s = -\sigma$ плоскости s . Следовательно, если уравнение (24) является Гурвицовым, то вещественные части всех корней уравнения (26) или (27) будут отрицательны и больше σ по модулю.

Используя метод параметрической плоскости, определим число $q = q_0$, при котором для всех значений N_1 и N_2 , определенных (7), вещественные части всех корней уравнения (27) отрицательны и больше σ по модулю, где σ заданная степень устойчивости.

Подставляя $q = q_0$ и $s = -\sigma + j\omega$ в уравнение (27), выделяя вещественную и мнимую часть и приравнявая их нулю, можно получить уравнения

$$(28) \quad kKN_1^* = F_1(\sigma, \omega), \quad kKN_2^* = F_2(\sigma, \omega),$$

где N_1^* и N_2^* удовлетворяют уравнению окружности (13), а $F_1(\sigma, \omega)$ и $F_2(\sigma, \omega)$ представляют собой, соответственно, вещественную и мнимую часть $1/G(-\sigma + j\omega)$. Однако, $F_1(\sigma, \omega)$ и $F_2(\sigma, \omega)$ весьма просто можно вычислить воспользовавшись методикой, изложенной в работе [3], для анализа степени устойчивости процессов в нелинейной системе, вызванных различными исчезающими задающими или возмущающими воздействиями, ограниченными по модулю.

Если с помощью уравнений (28) построить кривую (границу области заданной степени устойчивости) в плоскости kKN_1^* , kKN_2^* , то воспользовавшись методикой, изложенной в предыдущем разделе, можно определить $q_0 = q_0^*$ и соответствующее ему значение $(kK)_{\text{пр}} = (kK)_{\text{пр макс}}$, при котором процессы, вызванные исчезающими внешними воздействиями, будут иметь степень устойчивости не менее заданной.

Пример 2. Рассмотрим снова нелинейную систему, линейная часть которой характеризуется передаточной функцией (18) и определим $q_0 = q_0^*$ и $(kK)_{\text{пр макс}}$, при котором степень устойчивости системы будет не менее заданной $\sigma = 1$.

В рассматриваемом случае уравнения (28) имеют вид

$$(29) \quad kKN_1^* = 2,5\omega^2 - 1, \quad kKN_2^* = \omega^3 - 3\omega.$$

Пользуясь уравнениями (29), строим кривую на плоскости kKN_1^* , kKN_2^* и затем изобразим параметрическую окружность C_1 (рис. 7), проходящую через начало координат, касающуюся кривой и имеющую наибольший возможный радиус. Способом, изложенным в предыдущем примере, находим $\omega_0 = \sqrt{3}$, $q_0 = q_0^* = 5/6$ и $(kK)_{\text{пр макс}} = 6,5$. Координата точки A в месте пере-

сечения окружности C_2 с осью абсцисс равняется максимальному значению kK , при котором процессы в рассматриваемой системе, вызванные неисчезающими внешними воздействиями, будут иметь степень устойчивости не менее заданной $\sigma = 1$ [4]. Это значение равно $(kK)_{\max} = 4$.

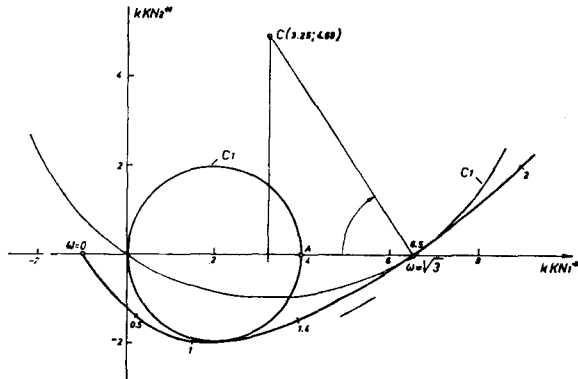


Рис. 7

Предложенный метод исследования абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейных непрерывных систем автоматического управления отличается большей простотой по сравнению с методами разработанными ранее. Опыт показывает, что время потребное для анализа, в несколько раз меньше, чем например, время которое необходимо для анализа методом частотных характеристик [1, 2, 3]. В самом деле, в нашем случае необходимо только вычислить координаты нескольких точек кривой границы области устойчивости и провести параметрическую окружность максимального радиуса.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] ПОРОВ В. М. *Criterii de stabilitate pentru sistemele nelinare de reglare automata befote pe utilizarea transformatei Laplace*. Studii si cercetari de energetica, Acad. R. P. R., anul. IX, № 1, 1959.
- [2] ПОПОВ В. М. *Об абсолютной устойчивости нелинейных систем автоматического регулирования*. Автоматика и телемеханика, т. XXII, № 8, 1961.
- [3] СТОИЧ М. Р. *Алгебраический критерий абсолютной устойчивости процессов в нелинейных непрерывных системах автоматического управления*. (статья, предложена для опубликования в Автоматике и телемеханике, отправлена 2, 1967 г.).
- [4] НАУМОВ Б. Н., ЦЫПКИН Я. З. *Частотный критерий абсолютной устойчивости процессов в нелинейных системах автоматического управления*. Автоматика и телемеханика, т. XXV, № 6, 1964.
- [5] НАУМОВ Б. Н., *Исследование абсолютной устойчивости положения равновесия в нелинейных системах автоматического управления при помощи логарифмических частотных характеристик*. Автоматика и телемеханика, т. XXVI, № 4, 1965.
- [6] ЯКУБОВИЧ В. А. *Метод матричных неравенств в теории устойчивости нелинейных регулируемых систем. III. Абсолютная устойчивости вынужденных колебаний*. Автоматика и телемеханика, т. XXV, № 7, 1964.