

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DÉFINIES PAR LA SÉRIE  
 DE TAYLOR OU DE DIRICHLET

Lazar Karadžić

1. Envisageons dans le plan  $z = x + yi$  une ligne polygonale orientée  $A_0A_1A_2\dots$  (fig. 1) et la droite  $y = mx + n$ . A cette ligne polygonale correspond la série

$$(1) \quad \sum d_n e^{i\varphi_n},$$

où

$$\overline{A_n A_{n+1}} = d_n, \quad \gamma_n = \varphi_{n+1} - \varphi_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Autour du côté  $A_n A_{n+1}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  nous décrivons le cercle  $C_n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) de sorte qu'il coupe la droite donnée aux points  $\alpha_n$  et  $\beta_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  (fig. 1)

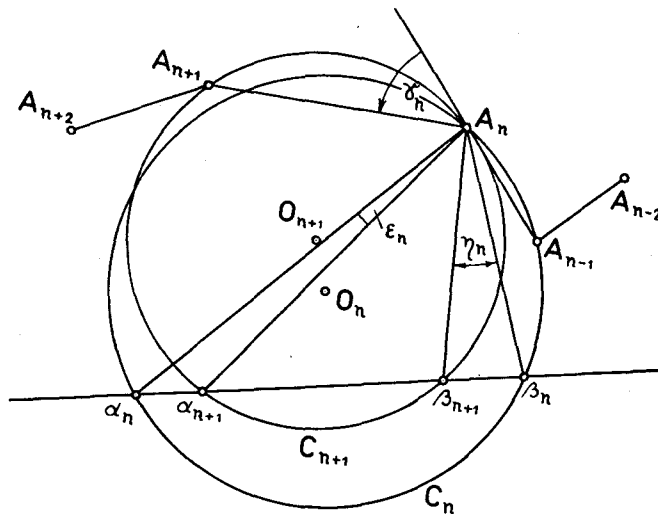


Fig. 1

D'après la figure on obtient le résultat suivant

$$(2) \quad \gamma_n = \frac{\theta_{n-1} + \theta_n}{2} + \epsilon - \eta_n,$$

parce que

$$\gamma_n = \pi - (\sphericalangle A_{n-1} A_n \alpha_n + \sphericalangle \alpha_{n+1} A_n A_{n+1} - \varepsilon_n),$$

où

$$\sphericalangle A_{n-1} A_n \alpha_n = \pi - \left( \frac{\theta_{n-1} + \theta_n}{2} - \eta + \sphericalangle \alpha_{n+1} \beta_{n+1} A_{n+1} \right),$$

$$\sphericalangle \alpha_{n+1} A_n A_{n+1} = \sphericalangle \alpha_{n+1} \beta_{n+1} A_{n+1}.$$

Dans la susdite formule  $\theta_n$  désigne l'angle sous lequel on voit la droite  $\overline{A_n A_{n+1}}$  du centre du cercle  $C_n$ . Il est facile de s'assurer que la susdite formule revêt à la forme suivante

$$(2a) \quad \gamma_n = \frac{\theta_{n-1} + \theta_n}{2} + \eta_n - \varepsilon_n,$$

lorsque les points  $\alpha_{n+1}$  et  $\beta_{n+1}$  sont situés en dehors de la droite  $\overline{\alpha_n \beta_n}$ . Si l'un des points  $\alpha_{n+1}$  ou  $\beta_{n+1}$  n'est situé que sur droite  $\overline{\alpha_n \beta_n}$ , on a alors la formule suivante

$$(2b) \quad \gamma_n = \frac{\theta_{n-1} + \theta_n}{2} \pm (\varepsilon_n + \eta_n).$$

Il est évident que  $\gamma_n$  prend aussi les valeurs suivantes:

$$(2c) \quad \begin{cases} \gamma_n = \pi + \frac{\theta_{n-1} - \theta_n}{2} \pm (\varepsilon_n \mp \eta_n), \\ \gamma_n = 2\pi - \frac{\theta_{n-1} + \theta_n}{2} \pm (\varepsilon_n \mp \eta_n). \end{cases}$$

2. On sait que les transformations hyperboliques, semihyperboliques, loxodromiques et paraboliques peuvent avoir un point attractif. Parmi ces transformations, les transformations loxodromiques seules ne font invariantes la circonférence du cercle qui passe par leurs points fixes. Désignons par  $H$  l'ensemble des transformations: hyperboliques, semihyperboliques et paraboliques que font invariantes toute circonférence passant par leurs points fixes.

Soient les points  $\alpha_n$  et  $\beta_n$ , qui sont situés sur la droite donnée  $y = mx + n$ , les points fixes d'une des transformations de l'ensemble  $H$  dont, supposons,  $\alpha_n$  est le point attractif. La transformation

$$(3) \quad \mu_{n+1} = \frac{a_n \mu_n + b_n}{c_n \mu_n + d_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

transpose le point  $A_n$ , dont  $\mu_n$  est l'affixe, au point  $A_{n+1}$  avec l'affixe  $\mu_{n+1}$ . De cette façon-là, on peut associer à toute ligne polygonale non seulement la suite des cercles, mais aussi la suite des transformations de forme (3).

On sait que toute homographie est déterminée lorsque ses points fixes et son multiplicateur sont connus. Par conséquent, si les points  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont les points fixes de la transformation (3) avec le multiplicateur correspondant de la

suite  $\{k_n\}$ , dont les membres sont ajustés de sorte que les points attractifs appartiennent soit à la suite  $\{\alpha_n\}$  ou bien à la suite  $\{\beta_n\}$ , alors la ligne polygonale  $A_0 A_1 A_2 \dots$ , dont les côtés sont

$$A_n A_{n+1} = \mu_{n+1} - \mu_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

où

$$|\mu_{n+1} - \mu_n| = d_n,$$

peut se former uniformément.

Donc, toute série de forme (1) peut être considérée comme s'étant formée de la façon exposée ci-dessus. Si

$$\gamma_n = \varphi_{n+1} - \varphi_n < \pi, \quad 0, 1, 2, \dots,$$

les points attractifs de la susdite suite des transformations appartiendront à la suite des points  $\{\alpha_n\}$ , mais si cette différence est toujours négative et  $0 < |\varphi_{n+1} - \varphi_n| < \pi$  les points attractifs appartiendront alors à la suite  $\{\beta_n\}$ . Si

$$0 < \varphi_{n+1} - \varphi_n < 2\pi,$$

les points attractifs de la suite (3) appartiendront tantôt à la suite  $\{\alpha_n\}$  tantôt à la suite  $\{\beta_n\}$ .

La série de forme (1), qui s'est formée de la façon exposée plus haut, converge si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n,$$

elle ne converge pas, mais elle est limitée si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_n|,$$

tend vers l'infinité si

$$\beta_n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Si les membres des suites  $\{\alpha_n\}$  et  $\{\beta_n\}$  sont disposés sur la droite donnée  $y = mx$  selon le procédé suivant

$$(4) \quad \begin{cases} |\alpha_0| < |\alpha_1| < |\alpha_2| < \dots < |\alpha_n| < \dots, \\ |\beta_0| > |\beta_1| > |\beta_2| > \dots > |\beta_n| > \dots, \\ |\alpha_n| < |\beta_n|, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

l'angle  $\gamma_n$  est donné alors uniquement par la formule (2) ou (2c). Au contraire, si

$$\gamma_n = \frac{\theta_{n-1} + \theta_n}{2}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad \text{ou que } \gamma_n = \theta \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

les membres de la suite  $\{\alpha_n\}$  et  $\{\beta_n\}$  satisfont uniquement à ces conditions.

2. 1. Soit  $\{C_n\}$  la suite de tous les cercles qui correspondent à la ligne polygonale donnée et qui passent respectivement par les points fixes  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  lesquels satisfont la condition (4). Alors, leur centre se trouve dans le point d'affixe

$$O_{n-1} = \mu_{n-1} + i \frac{(\mu_n - \mu_{n-1}) \exp \frac{\theta_n}{2}}{2 \sin \frac{\theta_n}{2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

La suite des rayons de ces cercles, c'est-à-dire la suite

$$r_n = \frac{\overline{A_n A_{n+1}}}{2 \sin \frac{\theta_n}{2}}, \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

sera monotone toutes les fois que la condition (4) est satisfaite.

Cette *assertion* peut être prouvée de la façon suivante. En partant des équations

$$r_n = \frac{\overline{A_n A_{n+1}}}{2 \sin \frac{\theta_n}{2}} = \frac{|\alpha_n - \beta_n|}{2 \sin \frac{\omega_n}{2}}, \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

où  $\frac{\omega_n}{2} = \sphericalangle \beta_n A_n \alpha_n$ , on obtient, si l'on prend en considération l'équation

$$\omega_n = \omega_{n+1} + \varepsilon_n + \eta_n = \omega_{n+1} + \delta_n,$$

laquelle, d'après la figure, est évidente, les équations suivantes

$$\begin{aligned} |\alpha_n - \beta_n| &= \frac{\overline{A_n A_{n+1}}}{\sin \frac{\theta_n}{2}} \sin \frac{\omega_n}{2} = \frac{\overline{A_n A_{n+1}}}{\sin \frac{\theta_n}{2}} \sin \frac{\omega_{n+1} + \delta_n}{2} \\ &= \frac{\overline{A_n A_{n+1}}}{\sin \frac{\theta_n}{2}} \left( k_n \sin \frac{\omega_{n+1}}{2} + \sqrt{1 - k_n^2} \cos \frac{\omega_{n+1}}{2} \right) \\ &= \frac{\overline{A_n A_{n+1}} \sin \frac{\theta_{n+1}}{2}}{A_{n+1} A_{n+2} \sin \frac{\theta_n}{2}} |\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}| k_n \\ &\quad + \frac{\overline{A_n A_{n+1}} \sqrt{1 - k_n^2}}{A_{n+1} A_{n+2} \sin \frac{\theta_n}{2}} \left\{ A_{n+1} A_{n+2} - |\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}|^2 \sin^2 \frac{\theta_{n+1}}{2} \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

où

$$k_n = \cos \frac{\delta_n}{2} = \cos \frac{\varepsilon_n + \eta_n}{2}.$$

Il en résulte ensuite, en prenant en considération la supposition (4), l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} &\left( A_{n+1} A_{n+2} \sin \frac{\theta_n}{2} k_n - A_n A_{n+1} \sin \frac{\theta_{n+1}}{2} \right) |\alpha_{n+1} - \beta_n| \\ &\leq \sqrt{1 - k_n^2} \overline{A_n A_{n+1}} \left\{ A_{n+1} A_{n+2} - |\alpha_{n+1} - \beta_{n+1}|^2 \sin^2 \frac{\theta_{n+1}}{2} \right\} \end{aligned}$$

De là, si

$$(6) \quad \frac{\overline{A_{n+1} A_{n+2}}}{A_n A_{n+1}} \cdot \frac{\sin \frac{\theta_n}{2}}{\sin \frac{\theta_{n+1}}{2}} = \frac{r_{n+1}}{r_n} \leq k_n \leq 1, \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

il s'ensuit l'inégalité suivante

$$| \alpha_{n+1} - \beta_{n+1} | \leq \frac{\overline{A_{n+1} A_{n+2}} \sqrt{1 - k_n^2}}{\sin \frac{\theta_{n+1}}{2}} \times \left\{ 1 - 2k_n \frac{\overline{A_n A_{n+1}}}{A_{n+1} A_{n+2}} \cdot \frac{\sin \frac{\theta_n}{2}}{\sin \frac{\theta_{n+1}}{2}} + \frac{\overline{A_n A_{n+1}}^2}{A_{n+1} A_{n+2}^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\theta_n}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_{n+1}}{2}} \right\}^{1/2}$$

Cette inégalité sera satisfait si

$$\sqrt{1 - k_n^2} \leq \left\{ 1 - 2k_n \frac{\overline{A_n A_{n+1}}}{A_{n+1} A_{n+1}} \cdot \frac{\sin \frac{\theta_n}{2}}{\sin \frac{\theta_{n+1}}{2}} + \frac{\overline{A_n A_{n+1}}^2}{A_{n+1} A_{n+2}^2} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\theta_n}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_{n+1}}{2}} \right\}^{1/2}$$

c'est-à-dire si

$$(7) \quad k_n \leq \frac{\overline{A_{n+1} A_{n+2}}}{A_n A_{n+1}} \cdot \frac{\sin \frac{\theta_n}{2}}{\sin \frac{\theta_{n+1}}{2}} = \frac{r_{n+1}}{r_n}, \quad (k_n \leq 1),$$

ou bien si la condition (6) est satisfaite.

L'inégalité (6) démontre que la suite  $\{r_n\}$  est monotone décroissante, tandis que l'inégalité (7) démontre qu'elle peut être monotone non décroissante. Ce dernier cas aura lieu lorsque dans l'expression (4) le signe d'inégalité changera de sens. Par là, notre assertion est prouvée.

La condition contenue dans la relation (6) est nécessaire, mais pas suffisante pour que les suites  $\{\alpha\}$  et  $\{\beta\}$  satisfassent la condition (4). Dans la relation (6) seront contenues pour nous les conditions suffisantes lorsque

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{A_{n+1} A_{n+2}}}{A_n A_{n+1}} \cdot \frac{\sin \frac{\theta_n}{2}}{\sin \frac{\theta_{n+1}}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \xi'_n) = 1, \quad (\xi_n > 0),$$

ou bien, dans le cas spécial, lorsque

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{A_{n+1} A_{n+1}}}{A_n A_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \xi_n) = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\theta_n}{2}}{\sin \frac{\theta_{n+1}}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \xi'_n) = 1, \quad (\xi_n, \xi'_n > 0).$$

Si dans la condition (8)

$$\overline{A_n A_{n+1}} = \overline{A_{n+1} A_{n+2}} = A = \text{const.}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

la suite  $\{\theta_n\}$ , à cause de la condition (6) doit être alors une suite monotone non décroissante. De même la suite des côtés de la ligne polygonale  $\{A_n A_{n+1}\}$  sera une suite monotone décroissante lorsque  $\theta_n = \theta_{n+1} = \theta$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Par conséquent la susdite condition sera satisfaite lorsque la suite  $\{\overline{A_n A_{n+1}}\}$  satisfait les conditions

$$\overline{A_0 A_1} \geq \overline{A_1 A_2} \geq \overline{A_2 A_3} \geq \dots$$

et la suite  $\{\theta_n\}$  les conditions:

$$0 < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_3 \leq \dots < \pi.$$

Si la suite  $\{\gamma_n\}$  est monotone croissante et que

$$\frac{\theta_{n+1} + \theta_n}{2} = \gamma_n < \pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

la condition (8) peut être alors écrite dans la forme suivante

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{A_{n+1} A_{n+2}}}{\overline{A_n A_{n+1}}} = 1 - 0.$$

La suite cercles associés  $\{C_n\}$  du centre  $O_n$  desquels on voit la droite  $\overline{A_n A_{n+1}}$  sous l'angle  $\theta_n < \pi$  sera identique à la suite des cercles mentionnés ci-dessus uniquement dans le cas où  $\varepsilon_n = \eta_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Ils couperont alors la droite déterminée aux points  $\alpha_n$  et  $\beta_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , qui satisferont la condition (4). Pour la monotonie de ces cercles, outre la condition de la monotonie du côté  $\overline{A_n A_{n+1}}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , la condition [4].

$$(9) \quad \begin{cases} \gamma_n - 2\gamma_{n+1} + \gamma_{n+2} > 0, & n = 4, 5, 6, \dots, \\ \gamma_2 - \theta_1 > 0, & \gamma_3 - 2\gamma_2 + \theta_1 > 0, \end{cases}$$

est aussi nécessaire.

Dans le cas général, lorsque

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_n < \dots < 2\pi,$$

à la ligne polygonale donnée peut être alors associée, de la manière exposée ci-dessus, la suite des cercles dont les rayons forment une suite monotone décroissante ou monotone non décroissante. Elle peut être alors placée, lorsque la suite  $\{r_n\}$  est monotone décroissante, dans le cercle dont le rayon peut être déterminé dans certains cas. Ainsi, par exemple, à la suite

$$\sum_{m=1}^n e^{2\pi \lambda_m i},$$

$$0 < \theta' < \lambda_2 - \lambda_1 < \dots < \lambda_n - \lambda_{n-1} < \theta'' < 1,$$

correspond la ligne polygonale qui peut être placée dans le cercle au rayon [2]

$$R = \frac{1}{2} \left( \operatorname{ctg} \frac{\theta'}{2} + \operatorname{tg} \frac{\theta''}{2} \right).$$

Si

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} k_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{(\varepsilon_n + \eta_n)}{2} = l < 1,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{A_{n+1} A_{n+2}}}{A_n A_{n+1}} \cdot \frac{\sin \frac{\theta_n}{2}}{\sin \frac{\theta_{n+1}}{2}} \leq l < 1.$$

Dans ce cas, les membres des suite  $\{\alpha_n\}$  et  $\{\beta_n\}$  ne satisfont pas toujours à la condition (4). Mais si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overline{A_n A_{n+1}}}{\sin \frac{\theta_n}{2}} = 0,$$

on a alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$ .

3. Envisageons la série de Taylor

$$(10) \quad f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n, \quad a_0 \neq 0,$$

qui converge dans le cercle  $|z| \leq 1$ . A chaque point  $z = z_0$  dans lequel cette série converge uniformément, correspond une ligne polygonale orientée  $A_0 A_1 A_2 \dots$ . Le point

$$f(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n$$

est situé dans ce cas-là sur la droite  $y = mx$ . Par conséquent, la transformation  $H$ :

$$\mu_1 = \frac{p_1 \lambda + q_1}{r_1 \lambda + s_1},$$

laquelle a, comme ses points fixes, les points  $O$  et  $\beta_0$ , où  $\beta_0$  est situé sur la droite  $y = mx$ , transposera le point  $\lambda = a_0$  au point  $\mu_1 = a_0 + a_1 e^{\theta_1}$ . Si l'on continue ce procédé on obtiendra, de cette façon, la transformation de forme (3), dont les points doubles sont situés sur la droite  $y = mx$  qui transforme le point

$$\mu_n = \sum_{m=0}^{n-1} a_m e^{m\theta_i}$$

en point

$$\mu_n = \sum_{m=0}^n a_m e^{m\theta_i}.$$

Si le point  $\lambda = a_0$ , n'est pas situé sur la droite  $y = mx$ , aucun des points  $\mu_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , ne sera pas situé sur cette ligne. Car, si ce point avait été situé sur la droite donnée, la droite aurait été alors invariante pour cette fonction.

De ce que nous venons de dire plus haut il résulte cette conclusion:

Si la fonction (10) converge uniformément dans le cercle,  $|z|=1$ , si elle ne fait invariante aucune droite de forme  $y=mx$  et que

$$0 < \arg a_n z^n - \arg a_{n-1} z^{n-1} < 2\pi, \quad n=1, 2, 3, \dots,$$

alors l'argument de tous les zéros du polynôme

$$S_n(z) = \sum_{m=0}^n a_m z^m,$$

qui sont situés dans le cercle  $|z| < 1$  diffère de l'argument de la fonction

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z)$$

3. 1. Il est aisé d'appliquer les résultats de l'al. 2. 1. à la série de Dirichlet

$$(11) \quad f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \quad s = x + yi,$$

$$(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty)$$

Ainsi, par exemple, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| e^{(\lambda_n - \lambda_{n+1})c} = \lambda, \quad \left( c = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \lg |a_n| \right),$$

$$a_n e^{-\lambda_n c} = 0 \quad (1), \quad n \rightarrow \infty,$$

et que

$$0 < \gamma_n < 2\pi, \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

où

$$\gamma_n = \arg a_{n-1} e^{-\lambda_{n-1} s} - \arg a_n e^{-\lambda_n s},$$

alors il faut et il suffit que la fonction  $f(s)$  n'ait point de zéro dans l'intervalle

$$0 < y \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi - (\arg a_{n-1} - \arg a_n)}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}.$$

Cette série converge uniformément sur le segment

$$0 < y \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi - (\arg a_{n-1} - \arg a_n)}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}$$

situé sur l'abscisse de convergence  $x=c$ , lorsque la suite  $\{a_n e^{-\lambda_n c}\}$  est une suite-nulle monotone, et la suite  $\{\gamma_n\}$  est monotone non décroissante et satisfait la condition (9). Dans cet intervalle la fonction  $f(s)$  n'a point de zéros.

Il s'ensuit de là, pour la série de Taylor, le résultat suivant de M. Tomić [4]:



La série de *Taylor* (10), où les modules de ses coefficients forment une suite-nulle monotone, et leurs arguments satisfaisant la condition (9), est uniformément convergente et n'a point de zéros dans l'intervalle

$$0 < \theta < \pi - \lim_{n \rightarrow \infty} (\arg a_n - \arg a_{n-1})$$

Si la suite  $\{\gamma_n\}$  est convergente, les suites  $\{\gamma_n\}$  et  $\{\delta_n\} \equiv \{\pm(\varepsilon_n \mp \eta_n)\}$  convergent aussi dans les expressions (2), (2a) et (2b). A cause de cela

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_n - \delta_n).$$

On aura, alors, pour la ligne polygonale, correspondant à la série (11), dans le point  $s = c + yi$ , où  $c$  est l'abscisse de convergence absolue de cette série, le résultat suivant

$$2 \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n| e^{-\lambda_n c}}{\sin \frac{\theta_n}{2}},$$

où  $r_n$  est le rayon du cercle  $C_n$  qui est associé, de la façon exposée plus haut, au côté  $|a_n| e^{-\lambda_n c}$ . Si la suite  $\{\gamma_n\}$  est convergente et satisfait la condition

$$0 < \gamma_n \leq l < 2\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

on aura alors évidemment

$$2 \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n| e^{-\lambda_n c}}{\sin \frac{\gamma_n - \delta_n}{2}}$$

Par conséquent, la série donnée converge dans le point envisagé si  $r_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Donc, si la suite

$$\{|a_n| e^{-\lambda_n c}\}$$

est une suite-nulle, la série donnée converge alors uniformément dans chaque point où  $\gamma_n \neq \delta_n$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Comme  $\gamma_n = (\lambda_n - \lambda_{n-1})y + \varphi_n < 2\pi$ ,  $\gamma_n \neq \pi$ ,  $n \rightarrow \infty$ , où  $\varphi_n = \arg a_{n-1} - \arg a_n$ , il sera alors

$$0 < y < \frac{\pi - \varphi}{g} \quad \text{et} \quad \pi < y < \frac{2\pi - \varphi}{g},$$

où

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n - \lambda_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n}, \quad \varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n.$$

D'après ce que nous venons d'exposer plus haut on peut formuler ce

*Théorème 1.* — Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| e^{-(\lambda_{n+1} - \lambda_n)c} = 1,$$

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n), \quad \varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} (\arg a_{n-1} - \arg a_n),$$

alors la série (11) sur le segment

$$0 < J_m s < \frac{\pi - \varphi}{g},$$

situé sur l'abscisse de convergence  $x=c$  est uniformément convergente lorsque

$$|a_n| e^{-\lambda_n c} = o(1), n \rightarrow \infty,$$

et uniformément limitée lorsque

$$|a_n| e^{-\lambda_n c} = O(1), n \rightarrow \infty.$$

Le point  $s = c + i \frac{2\pi - \varphi}{g}$  est un point singulier.

Si l'on applique ce raisonnement à la série (10), on obtient:

*Théorème 2.*— Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha, (|\alpha| = 1),$$

alors la série

$$\sum a_n z^n$$

converge uniformément dans tous les points sur le cercle de convergence, à l'exception du point  $\alpha$  et du point  $\beta$  ( $|\beta| = 1, \arg \beta = \pi - \arg \alpha^{-1}$ ), lorsque

$$a_n = o(1), n \rightarrow \infty,$$

ou bien elle est uniformément limitée dans tous les points à l'exception du point  $\alpha$  et de point  $\beta$  lorsque

$$a_n = O(1), n \rightarrow \infty.$$

Le point  $\alpha$  est un point singulier.

De ce théorème il résulte le théorème de *Fabry*.

3. 2.— Si la suite  $\{\gamma_n\}$  a  $p$  points d'accumulation, à savoir  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ . Envisageons la suite partielle  $\gamma_{n_k, m}, k=1, 2, 3, \dots$ , ayant un point d'accumulation, à savoir  $\xi_m$ . On peut écrire alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_{n_k, m} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\gamma_{n_k, m} - \delta_{n_k, m}),$$

ou

$$\delta_{n_k, m} = \pm (\varepsilon_{n_k, m} \mp \eta_{n_k, m})$$

Si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{n_k, m}}{a_{n_k, m+1}} = e^{\xi_m i}, m=1, 2, 3, \dots, p,$$

alors la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k, m} z^k$$

peut converger dans tous les points sur le cercle de convergence, ou bien être limitée dans tous les points à l'exception du point  $e^{\xi_m i}$ . Par conséquent la série

$\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k, m} z^{n_k m}$  peut admettre  $p$  pôles, sur le cercle de convergence, parce que

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (n_{k+1, m} - n_{k, m}) \geq p, m = 1, 2, 3, \dots, p. [3]$$

De ce que nous venons de dire plus haut il s'ensuit le résultat suivant:

Si la suite  $\{a_n/a_{n+1}\}$  a  $p$  points d'accumulation, situés sur le cercle  $|z|=1$ , la série donnée converge alors uniformément dans le cercle  $|z| \leq 1$  et  $a$  à sa circonférence au moins  $p$  points singuliers.

Si dans ce cas-là est remplie aussi la condition

$$a_n = o(1), \quad n \rightarrow \infty,$$

notre série sur le cercle de convergence  $|z|=1$  est alors limitée par sa valeur absolue dans tous les points à l'exception des points singulier dans lesquels elle devient infinie. Ces points seront, dans le cas général, les pôles de la somme de cette série, lorsque, suivant le théorème de *Hadamard* [1].

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \begin{array}{ccc} a_n & a_{n+1} \cdots a_{n+p-1} & \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n+p-1} & a_{n+p} & a_{n+2p-1} \end{array} \right|^{1/n} = 1.$$

#### BIBLIOGRAPHIE

[1] HADAMARD, J.:

Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor—Journal des mathématiques pures et appliquées, t. 8, 1892.

[2] KARAMATA, J. et TOMIĆ, M.:

Sur l'inégalité de Kuzmin—Landau, relative aux sommes trigonométriques et son application à la somme du Gaus. — Publications de l'Institut mathématique de l'Académie serbe de sciences, t. 3, 1950, p. 207—218.

[3] MANDELBROJT, S.:

Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes — Annales de l'Ecole Normale Supp., t. 40, 1923.

[4] TOMIĆ, M.:

O trigonometriskim zbirovima — Zbornik radova Srpske akademije nauka, t. XVIII, 1952. p. 13—50

## REZIME

**NEKE OSOBINE FUNKCIJA KOJE SU DEFINISANE TAYLOR-ovim  
ILI DIRICHLET-ovim REDOM***Lazar Karadžić*

Ako se u kompleksnoj ravni uoči orijentisama<sup>3</sup> poligonalna linija  $A_1 A_2 A_3 \dots$ , onda se ovoj poligonalnoj liniji može asociirati niz krugova na taj način što će se oko svake njene strane  $A_n A_{n+1}$  opisati krug  $C_n$  koji će sjeći datu pravu  $y = mx + n$  (Sl. 1.). U tekstu je pokazato kako se ova poligonalna linija može formirati pomoću niza transformacija oblika

$$Z = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Iz osobine niza asociiranih krugova  $\{C_n\}$  dolazi se do nekih rezultata iz teorije funkcija koje su definisane Taylor-ovim ili Dirichlet-ovim redom.

---