PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 230 — № 241 (1968)

239. SUR UNE INÉGALITÉ DE LOCHS*

Ilija Lazarević

0. G. LOCHS (*Monatshefte für Mathematik*, **58** (1954), 118—122) a démontré, entre autre l'inégalité suivante

$$\sin x \cos x - \operatorname{th} x < 0 \qquad (x > 0). \tag{1}$$

Dans cette démonstration l'auteur s'appuie sur certaines égalités entre les fonctions trigonométriques et hyperboliques utilisant l'amplitude de GUDERMAND.

Dans cette Note est donnée une démonstration élémentaire de l'inégalité (1). Y sont démontrées également d'autres inégalités qui sont en relation avec (1).

1. Nous démontrerons tout d'abord l'inégalité suivante

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{sh} x > 0 \qquad (0 < x \leqslant \pi/2). \tag{2}$$

Considérons la fonction $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{sh} x$ $(0 < x \leqslant \pi/2)$ et ses deux dérivées

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\cos x)^{-2} - \operatorname{ch} x, \\ f''(x) &= 2(\cos x)^{-3} \sin x - \operatorname{sh} x \\ &> 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{sh} x \qquad (0 < x \leqslant \pi/2). \end{aligned} \tag{3}$$

Étant donné que $\operatorname{sh} \frac{\pi}{2} < \pi$, et que les fonctions $2 \operatorname{tg} x$ et $\operatorname{sh} x$ sont convexes pour $0 < x < \pi/2$, on a

$$\operatorname{sh} x < \frac{\operatorname{sh}(\pi/2)}{\pi/2} x < 2x < 2 \operatorname{tg} x \qquad (0 < x \leqslant \pi/2). \tag{4}$$

D'après (3) et (4), on a, pour $0 < x \leqslant \pi/2$,

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Rightarrow f'(x) > f'(0) = 0 \\ &\Rightarrow f(x) > f(0) = 0, \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration de (2).

Passons à la démonstration de l'inégalité (1), qui peut être mise sous la forme

$$g(x) = \frac{\sin 2x}{2 \operatorname{th} x} < 1 \qquad (x > 0). \tag{5}$$

* Reću le 1 juillet 1968. Présenté le 15 juillet 1968. par P. M. Vasić.

Étant donné que $\operatorname{th} x > \operatorname{th} \frac{\pi}{4} = 0{,}65\ldots > \frac{1}{2} \left(x > \frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin 2x \leqslant 1$, il est suffisant de démontrer (5) pour $0 < x \leqslant \pi/4$.

On a, d'après (2), $g(+0) = 1$,

$$g'(x) = \frac{2\cos 2x \operatorname{th} x - \sin 2x (\operatorname{ch} x)^{-2}}{2 \operatorname{th}^2 x} = \frac{\cos 2x (\operatorname{sh} 2x - \operatorname{tg} 2x)}{2 \operatorname{sh}^2 x} < 0 \qquad (0 < x \leqslant \pi/4)$$

et par conséquent $g(x) < 1$ $(0 < x \leqslant \pi/4)$, c.q.f.d.

Remarquons que pour $x < 0$ est valable l'inégalité contraire de (1).

2. Par intégration dans les limites de 0 à $x (< \pi/2)$, de l'inégalité (2) et en prenant en considération que les fonctions obtenues dans le résultat sont paires, nous pouvons écrire

$$\sec x \geqslant e^{\operatorname{sh} x - 1} \qquad (-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2), \tag{6}$$

où le signe d'égalité est valable seulement pour $x = 0$.

De façon analogue, moyenant l'intégration de 0 à $x (x > 0)$, de l'inégalité (1) on obtient

$$\exp\left(\frac{1}{2} \sin^2 x\right) \leqslant \operatorname{ch} x, \tag{7}$$

et cete inégalité est valable pour chaque x et elle devient une égalité pour $x = 0$.

De (6) et (7) résulte

$$\exp\left(\frac{1}{2} \sin^2 x\right) \leqslant \operatorname{ch} x \leqslant 1 - \log \cos x \qquad (-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2).$$

Comme $e^{\operatorname{ch} x - 1} \geqslant \operatorname{ch} x$ et $\sec x \geqslant 1$, il résulte de (6)

$$(\sec x)^a \geqslant e^{\operatorname{ch} x - 1} \geqslant \operatorname{ch} x \qquad (a \geqslant 1;\ -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2). \tag{8}$$

Étant donné que pour la fonction $\psi(x) = (\sec x)^a - e^{\operatorname{ch} x - 1}$, qui est en relation avec (8), on a

$$\psi'(x) = a \sin x (\cos x)^{-a-1} - \operatorname{sh} x\, e^{\operatorname{ch} x - 1},$$

$$\psi''(x) = a (\cos x)^{-a} + a(a+1) \sin x (\cos x)^{-a-2} - (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh}^2 x)\, e^{\operatorname{ch} x - 1},$$

d'où $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 0$, $\psi''(0) = a - 1$, on voit que la valeur $a = 1$ est la meilleure possible pour que l'inégalité (8) fût valable.

La première partie de cette Note répond, en fait, au problème 115, posé dans le journal *Matamatički vesnik*, **4** (19) (1967), p. 454, par D. S. MITRINOVIĆ.