PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 230 — № 241 (1968)

238. QUELQUES OPERATIONS SUR LES SUBSTITUTIONS D'APPLICATION UNIFORME DE L'ENSEMBLE FINI EN LUI-MÊME*

Tihomir Ž. Aleksić

1. Introduction

Soit

(1) $$S_k = \{1, 2, \ldots, k\}$$

un ensemble fini et λ le symbole désignant un élément indéterminé.

L'application uniforme d'ensemble (1) en lui-même, qui est partielle en cas général, peut être décrite par la substution

(2) $$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots & k \\ a_1 & a_2 \ldots & a_k \end{pmatrix} = \{(i, a_i) \mid i = \lambda, 1, \ldots, k; \ a_i \in S_k'; \ a_\lambda = \lambda\}$$

où $S_k' = S_k \cup \{\lambda\}$.

Chaque (i, a_i) désigne un couple de substitution. Parmi les couples de substitution pris comme vecteurs, c'est la relation d'égalité ou celle d'inégalité qui peu être valable.

(i, a_i) est un couple de substitution déterminé dans le cas où $a_i \neq \lambda$, et par contre il est un couple de substitution ind terminé.

L'ensemble $D(\varphi)$ de tous les symboles i, de l'équation (2), pour lesquels (i, a_i) est le couple de substitution déterminé représente le domaine de la substitution φ. Indiquons par $P(\varphi)$ le nombre d'éléments du domaine $D(\varphi)$.

L'ensemble $A(\varphi)$ de tous les éléments de l'ensemble $\{a_i \mid i = 1, \ldots, k; a_i \neq \lambda\}$ pris sans répétition est l'antidomaine de la substitution φ.

Parmi les substitutions φ_1 et φ_2, prises comme ensembles des couples de substitution, la relation d'inclusion ou celle d'égalité peut être valable ou non.

Nommons φ la substitution permutante si elle a la propriété

(3) $$A(\varphi) = D(\varphi).$$

Si encore, $P(\varphi)$ est égal au nombre cardinal de l'ensemble (1) φ est la substitution strictement permutante.

φ est la substitution variante dans le cas où la satisfaction de l'égalité (3) n'est pas obligatoire.

* Reçu le 5 juillet 1968.

Si $P(\varphi)=0$, on dit que φ est une substitution vide.

φ défini par l'équation (2) est une substitution identique, si on prend pour chaque i que $a_i = i$.

2. L'opération de la multiplication des substitutions

L'opération binaire de la multiplication des permutations est bien connue. On y définie l'opération de la multiplication des substitutions d'une façon un peu plus générale qu'avant. Cela permet que chaque facteur peut être la substitution permutante ou variante aux nombres arbitraires des couples de substitution.

Soient

$$\varphi_1 = \{(d_i^1, a_i^1) \mid i=\lambda, 1, \ldots, k_1\},$$

$$\varphi_2 = \{(d_j^2, a_j^2) \mid j=\lambda, 1, \ldots, k_2\},$$

et

$$Q_i = (\exists\, w)(a_i^1 = d_w^2),\ w \in \{\lambda, 1, \ldots, k_2\}$$

où on peut prendre que V représente la valeur vraie et F la valeur fausse du cantificateur existentiel Q_i.

Alors, l'opération de la multiplication des substitutions est définie par

$$\varphi = \varphi_1 \cdot \varphi_2 = \varphi_1\ \varphi_2 = \{(d_i^1, a_i) \mid i=\lambda, 1, \ldots, k_1\}$$

avec a_i déterminé d'après:

$$Q_i = V \rightarrow a_i = a_w^2$$

$$Q_i = F \rightarrow a_i = \lambda.$$

Il est facile de constater qu'une telle opération de la multiplication des substitutions est associative et non commutative. De plus, on peut prouver les relations suivantes:

$$D(\varphi_1\ \varphi_2) \subseteq D(\varphi_1), \tag{4}$$

$$A(\varphi_1\ \varphi_2) \subseteq A(\varphi_2), \tag{5}$$

$$P(\varphi_1\ \varphi_2) \leqslant P(\varphi_2). \tag{6}$$

Dans le cas spécial où $A(\varphi_1) \subseteq D(\varphi_2)$ les relations (4) et (6) deviennent des égalités.

3. Quelques opérations unaires

L'opération unaire d'élévation à la puissance de la substitution φ peut être introduite par la définition récursive:

$$\varphi^1 = \varphi,\ \varphi^n = \varphi^{n-1}\ \varphi,\ n=2, 3, \ldots$$

où φ^0 représente la substitution identique.

Théorème 1. *Pour chaque substitution* φ *les relations suivantes ont lieu:*

$$D(\varphi^n) \subseteq D(\varphi) \tag{7}$$

$$A(\varphi^n) \subseteq A(\varphi). \tag{8}$$

Démonstration. Etant donné que $\varphi^n = \varphi\varphi^{n-1}$ et, d'après la relation (4), la relation (7) est évidemment vraie. De la même façon, ayant $\varphi^n = \varphi^{n-1}\varphi$ et la relation (5) on voit que la relation (8) est valable. Dans le cas où $P(\varphi) = k$ on peut voir que la relation (7) devient une égalité.

Soit * le symbole d'une opération unaire définie sur la substitution φ comme il suit:

$$\varphi^* = \{i, a_i') \mid i \in A(\varphi) \rightarrow a_i' = a_i;\ i \notin A(\varphi) \rightarrow a_i' = \lambda.\}$$

Maintenant, indiquons par $R(\varphi)$ le résultat de l'opération unaire de la réduction de substitution φ:

$$R(\varphi) = \varphi^* \varphi.$$

Prenons aussi que $R^n(\varphi)$ est le résultat de l'opération unaire de la réduction du rang n de substitution φ:

$$R^0(\varphi) = \varphi;\ R^1(\varphi) = R(\varphi);$$

$$R^n(\varphi) = R[R^{n-1}(\varphi)],\ n = 1, 2, \ldots$$

Théorème 2. *Pour les substitutions φ_1, et φ_2 satisfaisant la relation:*

(9) $$A(\varphi_1) \subseteq A(\varphi_2)$$

on a

(10) $$\varphi_1 \varphi_2 = \varphi_1 R(\varphi_2).$$

Démonstration. Considérant $(d_i, a_i) \in \varphi_1$ cn voit d'après la relation (9) que $a_i \in A(\varphi_2)$. Alors, s'il y a $(a_j, a_i') \in \varphi_2$ il sera aussi $(a_i, a_i') \in R(\varphi_2)$. Par conséquant pour le couple de substitution (d_i, a_i') on a simultanément $(d_i, a_i') \in \varphi_1 \varphi_2$ et $(d_i, a_i') \in \varphi_1 R(\varphi_2)$. Si l'on a $(a_i, a_i') \notin \varphi_2$, on aura aussi $(a_i, a_i') \notin R(\varphi_2)$. C'est-à-dire $(d_i, \lambda) \in \varphi_1 \varphi_2$ et $(d_i, \lambda) \in \varphi_1 R(\varphi_2)$. Par conséquant, dans les deux cas possibles les substitutions $\varphi_1 \varphi_2$ et $\varphi_1 R(\varphi_2)$ ont les mêmes couples de substitution. Ce procédé peut être appliqué pour chaque index i ce qui démontre la validité de l'équation (10) et ceci prouve le théorème.

Puisque $A(\varphi) = A(\varphi)$ comme la conséquence du théoreme 2, on a

(11) $$\varphi^2 = \varphi R(\varphi).$$

Théorème 3. *Pour chaque substitution φ l'équation suivante est valable*

(12) $$\varphi^n = \varphi^{n-1} R^z(\varphi), \qquad 0 \leqslant z \leqslant n-1.$$

Démonstration. Par la méthode d'induction on peut d'abord montrer

(13) $$\varphi^n = \varphi^{n-1} R^{n-1}(\varphi).$$

En effet, pour $n = 1$ l'équation (13) est vraie eu égard à $\varphi^1 = \varphi^0 R^0(\varphi) = \varphi^0 \varphi = \varphi$. Supposons que l'équation (13) est valable pour $n = m$. Alors, à partir de $\varphi^{m+1} = \varphi\varphi^{m-1} R^{m-1}(\varphi) = \varphi^m R^{m-1}(\varphi)$ on obtient

(14) $$\varphi^{m+1} = \varphi\varphi^{m-1} R^{m-1}(\varphi) = \varphi^m R^{m-1}(\varphi).$$

Posant $n = m$ dans l'équation (13) et substituant la valeur correspondante dans l'équation (14) on obtient

$$\varphi^{m+1} = \varphi^{m-1} R^{m-1}(\varphi) R^{m-1}(\varphi)$$

et puis selon l'équation (11) et la validité de l'équation (13) pour $n=m$ on a

$$\varphi^{m+1}=\varphi^{m-1}R^{m-1}(\varphi)\,R^m(\varphi)=\varphi^m R^m(\varphi)$$

ce que démontre l'équation (13).

A présent, pour prouver l'équation (12) on peut écrire

$$\varphi^{n-1}R^z(\varphi)=\varphi^{n-1-z}\varphi^z R^z(\varphi)$$

d'où on a selon l'équation (13)

$$\varphi^{n-1-z}\ \varphi^{z+1}=\varphi^n.$$

De même les limitations $z\geqslant 0$ et $n-1-z\geqslant 0$ sont évidentes, c'est-à-dire $0\leqslant z\leqslant n-1$. Ceci achève la démonstration du théorème 3.

4. L'ensemble des puissances de la substitution d'application

Soit le nombre entier nonnégatif selon

(15) $$R^{v-1}(\varphi)\neq R^v(\varphi)=R^{v+1}(\varphi)$$

le rang variant de la substitution φ.

Théorème 4. *Pour la substitution φ, avec le rang variant v et le domaine contenant s éléments, la substitution $R^v(\varphi)$ est une substitution vide ou une substitution permutante avec p couples de substitution déterminés. En même temps les limitations $p\leqslant s-v$ et $0\leqslant v\leqslant s$ ont lieu.*

Démonstration. Selon (15) et la définition de l'opération de la réduction on a

(16) $$D[R^v(\varphi)]=A[R^v(\varphi)].$$

Maintenant, deux cas sont possibles:

1° $P[R^v(\varphi)]=0$

ce qui indique que $R^v(\varphi)$ est une substitution vide;

2° $P[R^v(\varphi)]\neq 0$

démontre avec l'équation (16) que $R^v(\varphi)$ représente la substitution permutante. Puisque $R^m(\varphi)$ résulte de $R^{m-1}(\varphi)$, en y posant au moins un couple de substitution indéfini on aura évidemment $p\leqslant s-v$. En cas particulier il serait $p=0$, ce qui implique $v\leqslant s$. D'autre part si on a $\varphi=R(\varphi)$ il sera $v=0$. On a démontré ainsi le théorème ci-dessus.

Etant donné que s soit fini on voit du théorème 4 que le nombre v existe et il est unique.

Théorème 5. *L'ensemble*

(17) $$\{\varphi^n\mid n=1,2,\ldots\}$$

contient $v+g$ éléments différents où v représente le rang variant de la sustitution φ et g le nombre des puissances mutuellement différentes de la substitution permutante $R^v(\varphi)$.

Démonstration. C'est de la définition de l'opération de la réduction et de la première partie de la relation (15) qu'il suit:

$A[R^n(\varphi)] \subset A[R^{n-1}(\varphi)]$, $n=1, \ldots, \nu$, ce qui conduit selon l'équation (13) à

$$\varphi^{n+1} \neq \varphi^n, \quad n=1, \ldots, \nu.$$

Autrement dit, l'ensemble (17) pour $n=1, 2, \ldots, \nu$ comprend ν éléments différents.

Considérons maintenant le nombre d'éléments de l'ensemle (17) dans le cas où $m=\nu+1, \ \nu+2, \ldots$

C'est à partir de la relation (12) et (15) qu'on obtient

$$\varphi^{\nu+f} = \varphi^\nu [R^\nu(\varphi)]^f, \quad f=1, 2, \ldots,$$

c'est-à-dire le nombre des substitutions différentes dans l'ensemble (17) pour $n=\nu+f, \ f=1, 2, \ldots$ est égal au nombre d'éléments différents de l'ensemble

$$\{[R^\nu(\varphi)]^f \mid f=1, 2, \ldots\}.$$

Etant donné que $R^\nu(\varphi)$ soit la substitution permutante (qui décrit une permutation) il est connu que le nombre g de ces puissances différentes est fini. Or, l'ensemble (17) a $\nu+g$ éléments différents, ce qu'il fallait démontrer.

Adresse de l'auteur
T. Ž. Aleksić
Université de Niš, B. P. 123
Niš, Yougoslavie