PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 230 — № 241 (1968)

234. EINE BEMERKUNG ÜBER DAS QUELLENFREIE FELD*

Stanimir Fempl

Für ein quellenfreies Feld charakterisierenden Vektor

$$\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\} \qquad (v_i = v_i(x, y, z), \quad i = x, y, z)$$

für das also

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \tag{1}$$

gilt, existiert das vektorielle Potential $\vec{U}$, so dass

$$\vec{v} = \operatorname{rot} \vec{U}$$

ist. Bezüglich der Gleichung (1) ist $\vec{U}$ eine beliebige Vektorfunktion die aus drei willkürlichen skalaren Felder zusammengesetzt ist. Indessen ist die Vektorfunktoin $\vec{v}$ nur aus zwei beliebigen skalaren Funktionen komponiert.

In dieser Arbeit zeige ich dass sich die Funktion $\vec{v}$ durch

$$\vec{v} = \operatorname{grad} \Phi \times \operatorname{grad} \Psi \tag{2}$$

repräsentieren lässt, wo Φ und Ψ zwei willkürliche Funktionen von den Veränderlichen x, y, z sind.

Um diese Behauptung zu beweisen, benütze ich einen Satz den JACOBI im *Crelles Journal*, 27. bewiesen hat. Dieser Satz lautet: Sind X, X_1, X_2, ..., X_n Funktionen der $n+1$ Veränderlichen x, x_1, ..., x_n, welche der Bedingung,

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n} = 0 \tag{3}$$

genügen, so lässt sich der Ausdruck

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

darstellen durch

$$\sum \pm \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n},$$

* Eingegangen am 22. VI 1968.

wo $f_1, f_2, \ldots, f_n$ wilkürliche Funktionen von $x, x_1, \ldots, x_n$ sind, so dass also $X, X_1, \ldots, X_n$ die zu $\partial f/\partial x, \partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$ gehörigen Partialdeterminanten sind. Dies ist auch die allgemeine Lösung der Gleichung (3).

Im Falle eines quellenfreien Feldes sind die Komponenten v_x, v_y, v_z des Vektors $\vec{v}$ als Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \tag{4}$$

zu betrachten. Da jetzt $X=v_x$, $X_1=v_y$, $X_2=v_z$ ist, so erhält man die Lösungen der Gleichung (4) aus der Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} & \frac{\partial \Psi}{\partial y} & \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

wo Φ und Ψ beliebige Funktionen der Veränderlichen x, y, z sind. Es ist also nach dem erwähnten Satz

$$v_x=\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial z}-\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y=\frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{\partial \Psi}{\partial x}-\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad v_z=\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y}-\frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Auf Grund dessen kann man den Vektor $\vec{v}$ durch

$$\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} & \frac{\partial \Psi}{\partial y} & \frac{\partial \Psi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

darstellen, woraus unmittelbar die Gleichung (2) folgt, was zu beweisen war.

Es ist interessant auch die Rotation des Vektors $\vec{v}$ auszudrücken. Auf Grund des Satzes von der Rotation eines Vektorproduktes folgt [1]

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{v} &= \operatorname{rot}(\operatorname{grad}\Phi \times \operatorname{grad}\Psi) = \operatorname{grad}\Phi\, \nabla^2 \Psi - \operatorname{grad}\Psi\, \nabla^2 \Phi \\ &\quad + (\operatorname{grad}\Psi\, \nabla)\operatorname{grad}\Phi - (\operatorname{grad}\Phi\, \nabla)\operatorname{grad}\Psi. \end{aligned} \tag{5}$$

Hier ist ∇ der Hamiltonoperator $\vec{i}\,\partial/\partial x+\vec{j}\,\partial/\partial y+\vec{k}\,\partial/\partial z$.

Im Falle eines Laplacefeldes ist auch $\operatorname{rot}\vec{v}=0$ und man kann den Vektor $\vec{v}$ als Gradienten einer willkürlichen skalaren Funktion $U(x, y, z)$ betrachten. Dasselbe ersieht man auch der Gleichung (5), weil in diesem Falle die Funktionen Φ und Ψ nicht mehr unabhängig sind.

LITERATUR

[1] IVANOVIĆ DRAGIŠA: *Vektorska analiza*, Beograd 1960, S. 203.