PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 230 — № 241 (1968)

233. KARAKTERISTIČNE POVRŠINE U NEPOREMEĆENOM HELIOCENTRIČNOM KRETANJU*

Dobrivoje Mihailović

U ovome članku autor daje analizu prirode površina drugog reda karakterističnih za oblik putanja u neporemećenom heliocentričnom kretanju nebeskih tela. Koristeći se klasičnim analitičkim postupkom za proučavanje ovih površina, autor je, polazeći od diferencijalnih jednačina neporemećenog heliocentričnog kretanja i njihovih poznatih integrala, izveo analitički izraz onih površina, na kojima leže putanje neporemećene mase, proučio prirodu ovih površina i dao jednu novu interpretaciju integracionih konstanata koje figurišu u rešenjima ovoga problema.

1. Vektorska diferencijalna jednačina neporemećenog heliocentričnog kretanja ima oblik

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}+\frac{\mu}{r^3}\mathfrak{r}=0, \tag{1}$$

gde je $\mathfrak{r}$ — vektor relativnog položaja učene mase prema Suncu, $r=|\mathfrak{r}|$, a $\mu=f(M+m)$, pri čemu je f — gravitaciona konstanta, M — masa Sunca, a m — masa planete.

Diferencijalna jednačina (1) ima sledeća dva vektorska i jedan skalarni integral [**1**]:

a) integral sektorske brzine

$$\mathfrak{r}\times\mathfrak{v}=\mathfrak{C}, \tag{2}$$

pri čemu $\mathfrak{C}$ označava vektorsku integracionu konstantu — vektor upravan na ravni putanje;

b) LAPLACE-HAMILTONOV integral

$$\mathfrak{D}=\mathfrak{v}\times\mathfrak{C}-\mu\frac{\mathfrak{r}}{r}, \tag{3}$$

pri čemu $\mathfrak{D}$ predstavlja konstantni vektor koji leži u ravni putanje, upravan je na vektoru $\mathfrak{C}$ i usmeren prema perihelu putanje. Kratkoće radi ovaj vektor ćemo zvati perihelnim vektorom;

c) KEPLEROV integral

$$n(t-T)=u-e\sin u, \tag{4}$$

* Primljeno 19. juna 1968.

gde n označava srednje kretanje planete, T — vreme prolaza planete kroz perihel, u — ekscentričnu anomaliju i e — ekscentricitet putanje.

2. Ako umesto klasičnih eliptičnih elemenata koristimo MILANKOVIĆEVU grupu vektorskih elemenata $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, τ, [1], tada postoji uslovna relacija $\mathfrak{C}\mathfrak{D}=0$ koja izražava upravnost vektora $\mathfrak{C}$ na ravni planetske putanje.

Množenjem LAPLACE-HAMILTONOVOG integrala (3) skalarno vektorom $\mathfrak{r}$, dobijamo

$$\mathfrak{D}\mathfrak{r}=\mathfrak{r}\cdot(\mathfrak{v}\times\mathfrak{C})-\mu\frac{(\mathfrak{r}\mathfrak{r})}{r}.$$

Kako je

$$\mathfrak{r}\cdot(\mathfrak{v}\times\mathfrak{C})=\mathfrak{C}\cdot(\mathfrak{r}\times\mathfrak{v})=\mathfrak{C}\,\mathfrak{C}=C^2,$$

to prethodna jednačina dobija oblik

$$\mathfrak{D}\mathfrak{r}=C^2-\mu\, r. \tag{5}$$

Ako se uzme u obzir da $\mathfrak{r}$ označava vektor relativnog položaja planete prema Suncu, tada ova jednačina u ravni planetske putanje

$$\mathfrak{C}\mathfrak{r}=0 \tag{6}$$

predstavlja krivu drugog reda. Zaista, ako se označi

$$\sphericalangle(\mathfrak{D},\mathfrak{r})=\varphi, \quad |\mathfrak{D}|=D,$$

tada jednačina (5) daje

$$D\, r\cos\varphi=C^2-\mu\, r,$$

odakle je

$$r=\frac{\dfrac{C^2}{\mu}}{1+\dfrac{D}{\mu}\cos\varphi} \tag{7}$$

koja predstavlja elipsu, hiperbolu ili parabolu prema tome, da li je respektivno

$$D<\mu, \quad D>\mu \text{ ili } D=\mu.$$

Posmatrajmo sada LAPLACE-HAMILTONOV integral (5) u trodimenzijalnom euklidskom prostoru. Ako se sa $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, $\mathfrak{n}_3$ označe jedinični vektori osa fiksiranog DEKARTOVOG pravouglog koordinatnog sistema sa početkom u Suncu, tada je

$$\mathfrak{r}=x\,\mathfrak{n}_1+y\,\mathfrak{n}_2+z\,\mathfrak{n}_3; \quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Analogno je

$$\mathfrak{C}=C_1\,\mathfrak{n}_1+C_2\,\mathfrak{n}_2+C_3\,\mathfrak{n}_3; \quad C^2=C_1{}^2+C_2{}^2+C_3{}^2;$$

$$\mathfrak{D}=D_1\,\mathfrak{n}_1+D_2\,\mathfrak{n}_2+D_3\,\mathfrak{n}_3; \quad D^2=D_1{}^2+D_2{}^2+D_3{}^2.$$

Jednačina (5) tada postaje

$$D_1\,x+D_2\,y+D_3\,z=C^2-\mu\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

odakle je

$$\mu^2(x^2+y^2+z^2)=(D_1\,x+D_2\,y+D_3\,z-C^2)^2.$$

Posle sređivanja ova jednačina dobija oblik

$$
\begin{aligned}
(8)\qquad &(\mu^2-D_1^2)\,x^2+(\mu^2-D_2^2)\,y^2+(\mu^2-D_3^2)\,z^2-2\,D_1\,D_2\,xy-2\,D_1\,D_3\,xz-2\,D_2\,D_3\,yz\\
&\qquad -2\,C^2\,D_1\,x-2\,C^2\,D_2\,y-2\,C^2\,D_3\,z-C^4=0.
\end{aligned}
$$

Jednačina (8), odnosno jednačina (5) predstavlja u trodimenzijalnom prostoru jednačinu površine drugog reda, čija opšta jednačina ima oblik:

$$
\begin{aligned}
(9)\qquad &a_{11}\,x^2+a_{22}\,y^2+a_{33}\,z^2+2\,a_{12}\,xy+2\,a_{13}\,xz+2\,a_{23}\,yz\\
&\qquad +2\,a_{14}\,x+2\,a_{24}\,y+2\,a_{34}\,z+a_{44}=0.
\end{aligned}
$$

Upoređivanjem koeficijenata uz odgovarajuće članove u jednačinama (8) i (9) nalazimo:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}=\mu^2-D_1^2,\quad a_{22}=\mu^2-D_2^2,\quad a_{33}=\mu^2-D_3^2,\\
(10)\qquad &a_{12}=a_{21}=-D_1\,D_2,\quad a_{13}=a_{31}=-D_1\,D_3,\quad a_{23}=a_{32}=-D_2\,D_3,\\
&a_{14}=a_{41}=-C^2\,D_1,\quad a_{24}=a_{42}=-C^2\,D_2,\quad a_{34}=a_{43}=-C^2\,D_3,\\
&a_{44}=-C^4.
\end{aligned}
$$

Poznato je da su invarijante površine (9) date sledećim izrazima:

$$
J_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\qquad
J_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}
$$

$$
J_3=a_{11}+a_{22}+a_{33},
$$

$$
J_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}
$$

$$
=a_{11}\,a_{22}+a_{11}\,a_{33}+a_{22}\,a_{33}-a_{12}^2-a_{13}^2-a_{23}^2.
$$

Za površinu (8) ove invarijante, prema (10), imaju sledeće vrednosti:

$$
J_1=\begin{vmatrix} (\mu^2-D_1^2) & -D_1\,D_2 & -D_1\,D_3\\ -D_1\,D_2 & (\mu^2-D_2^2) & -D_2\,D_3\\ -D_1\,D_3 & -D_2\,D_3 & (\mu^2-D_3^2)\end{vmatrix}=\mu^4\,(\mu^2-D^2),
$$

$$
(11)\qquad J_2=\begin{vmatrix} (\mu^2-D_1^2) & -D_1\,D_2 & -D_1\,D_3 & -C^2\,D_1\\ -D_1\,D_2 & (\mu^2-D_2^2) & -D_2\,D_3 & -C^2\,D_2\\ -D_1\,D_3 & -D_2\,D_3 & (\mu^2-D_3^2) & -C^2\,D_3\\ -C^2\,D_1 & -C^2\,D_2 & -C^2\,D_3 & -C^4\end{vmatrix}=-C^4\,\mu^6,
$$

$$
J_3=(\mu^2-D_1^2)+(\mu^2-D_2^2)+(\mu^2-D_3^2)=3\,\mu^2-D^2,
$$

$$
\begin{aligned}
J_4=&(\mu^2-D_1^2)\,(\mu^2-D_2^2)+(\mu^2-D_1^2)\,(\mu^2-D_3^2)+(\mu^2-D_2^2)\,(\mu^2-D_3^2)\\
&-D_1^2\,D_2^2-D_1^2\,D_3^2-D_2^2\,D_3^2=\mu^2\,(3\,\mu^2-2\,D^2).
\end{aligned}
$$

Na osnovu relacija (11) jednačina (8) predstavlja površinu sa centrom pod uslovom da je

(12) $$J_1 \neq 0, \quad \text{tj.} \quad \mu \neq D,$$

a površinu bez centra ako je

(13) $$J_1 = 0, \quad \text{tj.} \quad \mu = D.$$

Analiziraćemo posebno ova dva slučaja.

3. Jednačina (8) će prema (12) predstavljati jednačinu površine sa centrom pod uslovom da je

$$J_1 \neq 0, \quad \text{tj.} \quad \mu \neq D.$$

Koordinate centra ove površine određene su sledećim sistemom linearnih jednačina

(14) $$\begin{aligned} (\mu^2 - D_1^2)\, x - D_1 D_2\, y - D_1 D_3\, z &= C^2 D_1, \\ -D_1 D_2\, x + (\mu^2 - D_2^2)\, y - D_2 D_3\, z &= C^2 D_2, \\ -D_1 D_3\, x - D_2 D_3\, y + (\mu^2 - D_3^2)\, z &= C^2 D_3. \end{aligned}$$

Iz ovoga sistema se za koordinate centra površine dobijaju sledeće vrednosti:

(15) $$x_0 = \frac{\Delta_1}{J_1}, \quad y_0 = \frac{\Delta_2}{J_1}, \quad z_0 = \frac{\Delta_3}{J_1},$$

pri čemu je

(16) $$\Delta_1 = \begin{vmatrix} C^2 D_1 & -D_1 D_2 & -D_1 D_3 \\ C^2 D_2 & (\mu^2 - D_2^2) & -D_2 D_3 \\ C^2 D_3 & -D_2 D_3 & (\mu^2 - D_3^2) \end{vmatrix} = C^2 \mu^4 D_1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} (\mu^2 - D_1^2) & C^2 D_1 & -D_1 D_3 \\ -D_1 D_2 & C^2 D_2 & -D_2 D_3 \\ -D_1 D_3 & C^2 D_3 & (\mu^2 - D_3^2) \end{vmatrix} = C^2 \mu^4 D_2,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} (\mu^2 - D_1^2) & -D_1 D_2 & C^2 D_1 \\ -D_1 D_2 & (\mu^2 - D_2^2) & C^2 D_2 \\ -D_1 D_3 & -D_2 D_3 & C^2 D_3 \end{vmatrix} = C^2 \mu^4 D_3.$$

Zamenom $\Delta_i\,(i = 1, 2, 3)$ iz (16) i J_1 iz (11) u relacije (15) dobijaju se za koordinate centra površine (8) sledeće vrednosti:

(17) $$x_0 = \frac{C^2}{\mu^2 - D^2} D_1, \quad y_0 = \frac{C^2}{\mu^2 - D^2} D_2, \quad z_0 = \frac{C^2}{\mu^2 - D^2} D_3.$$

Ako se sa $\mathfrak{R}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ označi vektor položaja centra površine prema odabranom polu, tada se može sistem od tri skalarne jednačine (17) zameniti vektorskom relacijom:

(18) $$\mathfrak{R}_0 = \frac{C^2}{\mu^2 - D^2} \cdot \mathfrak{D}.$$

Koristeći relacije između vektorskih elemenata i eliptičnih elemenata a i e [1]

$$\frac{\mu^2-D^2}{C^2}=\frac{\mu}{a}, \quad e=\frac{D}{\mu}$$

nalazimo da je

$$\frac{C^2}{\mu^2-D^2}=\frac{ae}{D}$$

pa relacija (18) postaje $\mathfrak{R}_0=ae\frac{\mathfrak{D}}{D}$, tj.

$$\mathfrak{R}_0=ae\cdot \operatorname{ort}\mathfrak{D}. \tag{19}$$

To znači da je vektor položaja centra površine (8) kolinearan sa perihelnim vektorom $\mathfrak{D}$, pri čemu je $|\mathfrak{R}_0|=ae$.

Analizirajmo sada prirodu korena sekularne jednačine i odredimo vrednosti ovih korena. Sekularna jednačina za površinu (8) ima oblik:

$$-\lambda^3+J_3\lambda^2-J_4\lambda+J_1=0,$$

ili posle zamene vrednosti za J_3, J_4 i J_1 iz (11):

$$-\lambda^3+(3\mu^2-D^2)\lambda^2-\mu^2(3\mu^2-2D^2)\lambda+\mu^4(\mu^2-D^2)=0. \tag{20}$$

Jednostavno se može utvrditi da jednačina (20) ima jedno rešenje

$$\lambda_1=\mu^2,$$

a ostala dva se dobijaju iz jednačine

$$\lambda^2-(2\mu^2-D^2)\lambda+\mu^2(\mu^2-D^2)=0,$$

odakle nalazimo

$$\lambda_2=\mu^2, \quad \lambda_3=\mu^2-D^2.$$

To znači da sekularna jednačina (20) ima realna rešenja

$$\lambda_1=\lambda_2=\mu^2, \quad \lambda_3=\mu^2-D^2. \tag{21}$$

Odredimo glavne pravce centralne površine (8). Kako sekularna jednačina (20) ima dvostruki koren $\lambda_1=\lambda_2=\mu^2$, to je, prema opštoj teoriji površina drugog reda, jedan od glavnih pravaca određen jediničnim vektorom $\mathfrak{f}_1=\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ čije se projekcije dobijaju iz sistema jednačina:

$$(a_{11}-\lambda_1)\alpha_1+a_{12}\beta_1+a_{13}\gamma_1=0, \quad \alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+\gamma_1{}^2=1,$$

tj. u posmatranom slučaju

$$D_1\alpha_1+D_2\beta_1+D_3\gamma_1=0, \quad \alpha_1{}^2+\beta_1{}^2+\gamma_1{}^2=1 \tag{22}$$

koji skraćeno možemo pisati u obliku

$$\mathfrak{D}\mathfrak{f}_1=0, \quad \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1=1. \tag{22 a}$$

Iz ovih relacija proizlazi da jedinični vektor $\mathfrak{f}_1$ nije jednoznačno određen, tj. svi jedinični vektori $\mathfrak{f}_1$ leže u ravni

$$\mathfrak{D}\mathfrak{R}=0$$

koja prolazi kroz pol O, a upravna je na vektoru $\mathfrak{D}$.

Drugi od glavnih pravaca definisan jediničnim vektorom $\mathfrak{f}_2=\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ određuje se rešenjem sistema jednačina

$$(a_{11}-\lambda_1)\,\alpha_2+a_{12}\,\beta_2+a_{13}\,\gamma_2=0$$
$$\alpha_1\,\alpha_2+\beta_1\,\beta_2+\gamma_1\,\gamma_2=0$$
$$\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1$$

koji za površinu (8) ima oblik

$$D_1\,\alpha_2+D_2\,\beta_2+D_3\,\gamma_2=0$$
$$\alpha_1\,\alpha_2+\beta_1\,\beta_2+\gamma_1\,\gamma_2=0 \tag{23}$$
$$\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2=1$$

ili u skraćenom obliku

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{f}_2=0, \quad \mathfrak{f}_1\,\mathfrak{f}_2=0, \quad \mathfrak{f}_2\,\mathfrak{f}_2=1. \tag{23 a}$$

Kako je vektor $\mathfrak{f}_2$ upravan i na $\mathfrak{D}$ i na $\mathfrak{f}_1$, to on takođe leži u ravni

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{R}=0.$$

Za treći glavni pravac, čiji je jedinični vektor $\mathfrak{f}_3=\{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}$ dobija se sledeći sistem jednačina:

$$(a_{11}-\lambda_3)\,m+a_{12}\,n+a_{13}\,p=0$$
$$a_{21}\,m+(a_{22}-\lambda_3)\,n+a_{23}\,p=0$$
$$a_{31}\,m+a_{32}\,n+(a_{33}-\lambda_3)\,p=0,$$

tj. u slučaju površine (8), a za $\lambda_3=\mu^2-D^2$

$$(D_2^2+D_3^2)\,m-D_1\,D_2\,n-D_1\,D_3\,p=0$$
$$-D_1\,D_2\,m+(D_3^2+D_1^2)\,n-D_2\,D_3\,p=0 \tag{24}$$
$$-D_1\,D_3\,m-D_2\,D_3\,n+(D_1^2+D_2^2)\,p=0,$$

gde su m, n, p veličine proporcionalne respektivno projekcijama jediničnog vektora $\mathfrak{f}_3$.

Iz sistema (24) nalazimo

$$m=\frac{D_1}{D_3}\,p, \quad n=\frac{D_2}{D_3}\,p, \quad (m^2+n^2+p^2=1),$$

odakle je

$$m=D_1/D, \quad n=D_2/D, \quad p=D_3/D$$

tj.

$$\mathfrak{f}_3=\{D_1/D,\ D_2/D,\ D_3/D\}=\operatorname{ort}\mathfrak{D}=\mathfrak{D}_0. \tag{25}$$

To znači da se treći glavni pravac površine (8) poklapa sa perihelnim vektorom $\mathfrak{D}$.

Iz napred izloženih rezultata koji se odnose na određivanje glavnih pravaca mogu se izvesti sledeći zaključci:

1° jedan od glavnih pravaca se poklapa sa pravcem perihelnog vektora $\mathfrak{D}$;

2° druga dva glavna pravca su ortogonalna među sobom i pripadaju ravni koja prolazi kroz pol a upravna je na vektoru $\mathfrak{D}$;

3° pravac vektora $\mathfrak{C}$ — konstantne sektorske brzine predstavlja jedan specijalan slučaj onih parova glavnih pravaca koji leže u ravni

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{R}=0;$$

4° odgovarajućim usmeravanjem jediničnih vektora $\mathfrak{f}_i\,(i=1,2,3)$ glavnih pravaca moguće je postići da oni formiraju trijedar desne orijentacije.

Transformacijom

$$x=x_0+\alpha_1 x_1+\alpha_2 y_1+\alpha_3 z_1,\quad y=y_0+\beta_1 x_1+\beta_2 y_1+\beta_3 z_1,$$
$$z=z_0+\gamma_1 x_1+\gamma_2 y_1+\gamma_3 z_1, \tag{26}$$

gde su x_0, y_0, z_0 dati relacijama (17), a $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ predstavljaju projekcije jediničnih vektora $\mathfrak{f}_i$ glavnih pravaca na ose sistema $OXYZ$, može se jednačina površine (8) neposredno transformisati i dovesti na kanonični oblik u sistemu $O_1\,\mathfrak{f}_1\,\mathfrak{f}_2\,\mathfrak{f}_3$:

$$\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 y_1^2+\lambda_3 z_1^2+\frac{J_2}{J_1}=0, \tag{27}$$

tj. u posmatranom slučaju

$$\mu^2(x_1^2+y_1^2)+(\mu^2-D^2)\,z_1^2-\frac{C^4\mu^6}{\mu^4(\mu^2-D^2)}=0,$$

tj.

$$\mu^2(\mu^2-D^2)\,(x_1^2+y_1^2)+(\mu^2-D^2)^2 z_1^2=C^4\mu^2$$

odakle je

$$\frac{x_1^2+y_1^2}{\dfrac{C^4}{\mu^2-D^2}}+\frac{z_1^2}{\dfrac{C^4\mu^2}{(\mu^2-D^2)^2}}=1. \tag{28}$$

Kako je u slučaju eliptične putanje $\dfrac{D}{\mu}=e<1$, tj. $D<\mu$, odakle $\mu^2-D^2>0$, to jednačina (28) predstavlja jednačinu rotacionog elipsoida sa glavnim pravcem $O_1\,\mathfrak{f}_3$ kao osom rotacije.

U slučaju hiperbolične putanje je

$$\frac{D}{\mu}=e>1,$$

tj. $D>\mu$, odakle je $\mu^2-D^2<0$, pa jednačina (28) dobija oblik

$$\frac{x_1^2+y_1^2}{\dfrac{C^4}{D^2-\mu^2}}-\frac{z_1^2}{\dfrac{C^4\mu^2}{(D^2-\mu^2)^2}}=-1 \tag{29}$$

koja predstavlja rotacioni dvograni hiperboloid sa glavnim pravcem $O_1\,\mathfrak{f}_3$ kao osom rotacije.

To znači da u slučaju površine sa centrom, putanje u neporemećenom kretanju leže na rotacionom elipsoidu za slučaj eliptične putanje, a na rotacionom dvogranom hiperboloidu za slučaj hiperbolične putanje. Osim toga odavde proizlazi da u oba slučaja putanja zadržava nepromenjene parametre oblika ukoliko njena ravan rotira oko perihelnog vektora $\mathfrak{D}$.

4. U slučaju kada je $e=\frac{D}{\mu}=1$, tj. $J_1=0$ jednačina (8) predstavlja površinu bez centra. Pod uslovom $D=\mu$ je

$$
\begin{aligned}
&J_1=\mu^2(\mu^2-D^2)=0\\
&J_2=-C^4\mu^6<0\\
&J_3=3\,\mu^2-D^2=2\,D^2>0\\
&J_4=\mu^2(3\,\mu^2-2\,D^2)=D^4>0,
\end{aligned}
\tag{30}
$$

a sekularna jednačina (20) ima korene

$$\lambda_1=\lambda_2=\mu^2=D^2,\quad \lambda_3=0. \tag{31}$$

Na osnovu (30) i (31) kanonični oblik jednačine površine (8) biće

$$\lambda_1 x_1^2+\lambda_2 y_1^2+2\,b_{34}z_1=0, \tag{32}$$

gde je $b_{34}=a_{14}\alpha_3+a_{24}\beta_3+a_{34}\gamma_3$.

Na osnovu relacija (20) i (24) dobijamo

$$b_{34}=-C^2D_1\frac{D_1}{D}-C^2D_2\frac{D_2}{D}-C^2D_3\frac{D_3}{D}$$

tj.

$$b_{34}=-\frac{D_1^2+D_2^2+D_3^2}{D}C^2=-C^2D. \tag{33}$$

Prema (31) i (33) jednačina (32) dobija oblik

$$D^2(x_1^2+y_1^2)-2\,C^2Dz_1=0,$$

tj.

$$2\,C^2z_1=D(x_1^2+y_1^2). \tag{34}$$

Ova jednačina predstavlja rotacioni paraboloid, čija se osa rotacije poklapa sa glavnim pravcem određenim jediničnim vektorom $\mathfrak{f}_3$. U ovom slučaju parabolična putanja leži na površini ovoga rotacionog paraboloida, pri čemu se njen oblik ne menja ako ravan ove putanje rotira oko pravca perihelnog vektora $\mathfrak{D}$.

5. Ako se Laplace-Hamiltonov i Keplerov integral vežu relacijom

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{D}+\frac{n\tau}{C}\mathfrak{C} \tag{35}$$

kao što je to učinio Bilimović u članku [2], tada se grupa vektorskih elemenata $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, τ zamenjuje grupom $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{G}$.

Skalarnim množenjem jednačine (35) vektorom $\mathfrak{r}$ dobija se

$$\mathfrak{G}\mathfrak{r}=\mathfrak{D}\mathfrak{r}+\frac{n\tau}{C}(\mathfrak{C}\mathfrak{r}). \tag{36}$$

Ova jednačina u trodimenzijalnom prostoru takođe predstavlja površinu drugog reda. Primenom napred izloženog postupka moguće je izvršiti iscrpnu analizu jednačine (36).

No ovde je od interesa učiniti sledeću napomenu. Ako se traži linija preseka površine (36) sa ravni putanje, tada je jednačina ove ravni

$$\mathfrak{C}\mathfrak{r} = 0,$$

pa će njen presek sa površinom (36) dati putanju čija je jednačina

$$\mathfrak{G}\mathfrak{r} = \mathfrak{D}\mathfrak{r},$$

tj. prema (5)

$$\mathfrak{G}\mathfrak{r} = C^2 - \mu\, r. \tag{37}$$

To znači da linije preseka površine (8) i površine (36) sa ravni $\mathfrak{C}\mathfrak{r} = 0$ predstavljaju istu krivu — putanju uočene neporemećene mase.

LITERATURA

[1] M. Milanković, *O upotrebi vektorskih elemenata u računu planetskih poremećaja*, Glas SAN CLXXXI, prvi razred, A. Matematičke nauke **90** (1949), 1—72.

[2] A. Bilimović, *Pfafov izraz i vektorske diferencijalne jednačine planetskih poremećaja*, Glas SAN, CXCI, Odeljenje prirodno-matematičkih nauka, **96** (1948), 83—115

Zusammenfassung

CHARAKTERISTISCHE FLÄCHEN IN UNGESTÖRTER HELIOZENTRISCHER BEWEGUNG

D. Mihailović

In der Arbeit behandelt der Verfasser die charakteristische Flächen die mit der Bahngestalt im Zweikörperproblem der Himmelsmechanik in Verbindung stehen. Dabei er von der Vektorendifferentialgleichung der ungestörter heliozentrischer Bewegung

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3}\mathfrak{r} = 0$$

aus. Die Lösungen dieser Gleichung sind folgende:

1° Das Flächenintegral

$$\mathfrak{r} \times \mathfrak{v} = \mathfrak{C};$$

2° Das Laplace-Hamiltonintegral

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{v} \times \mathfrak{C} - \frac{\mu}{r}\mathfrak{r};$$

3° Das Keplerintegral

$$n\,(t - \tau) = u - e \sin u.$$

Die Konstanten $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, τ stellen die Milankovitschsche Grupe der Vektorelementen [1].

Aus den Laplace-Hamiltonintegral folgt nach skalarer Multiplication mit $\mathfrak{r}$

$$\mathfrak{D}\mathfrak{r} = C^2 - \mu\, r.$$

Diese Gleichung stellt im Raume E_3 eine Fläche II Grades dar, deren analytischer Ausdruck durch die Relation (8) gegeben ist, wo $\mathfrak{C} = \{C_1, C_2, C_3\}$; $\mathfrak{D} = \{D_1, D_2, D_3\}$ ist.

Von der Exzentrizität $e = \frac{D}{\mu}$ Rücksicht nehmend, analysierte der Verfasser die Gleichung (8) und zeigte dass

1° Die Bahnen der ungestörten Massen liegen in der Schnittlinie der Fläche (8) und der Ebene $\mathfrak{C}\mathfrak{R} = 0$.

2° Diese Flächen sind Rotationsflächen deren Rotationsachse die Richtung des Perihelvektors besitzt.

3° Eine von den Hauptrichtungen der Fläche besitzt die Richtung des Perihelvektors, die übrigen liegen in der Ebene $\mathfrak{D}\mathfrak{R} = 0$.

4° Im Falle einer Fläche die den Mittelpunkt

$$J_1 = \mu^4 (\mu^2 - D^2) \neq 0$$

enthält, stellt die Gleichung (8) dar:

a) für $D < \mu$ d. h. $e < 1$ ein Rotationselipsoid mit der kanonischen Gleichung

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{\frac{C^4}{\mu^2 - D^2}} + \frac{z_1^2}{\frac{C^4 \mu^2}{(\mu^2 - D^2)^2}} = 1;$$

b) für $D > \mu$, d. h. $e > 1$ ein zweischaliges Rotationshyperboloid mit der kanonischen Gleicung

$$\frac{x_1^2 + y_1^2}{\frac{C^4}{D^2 - \mu^2}} - \frac{z_1^2}{\frac{C^4 \mu^2}{(D^2 - \mu^2)^2}} = -1.$$

5° Im Falle einer Fläche ohne Mittelpunkt d. h. $e = \frac{D}{\mu} = 1$, ist

$$J_1 = \mu^4 (\mu^2 - D^2) = 0$$

die Gleichung (8) reduziert sich zur kanonischer Form

$$2\, C^2 z_1 = D\, (x_1^2 + y_1^2)$$

und stellt ein elliptisches Rotationsparaboloid dar.

6° Wenn man nach Bilimovitsch [2] das Vektorelement

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{D} + \frac{n\tau}{C}\, \mathfrak{C}$$

einführt, so liegt die ungestörte heliozentrische Bahn auf der Fläche II Grades

$$\mathfrak{R}\mathfrak{r} = \mathfrak{D}\mathfrak{r} - \frac{n\tau}{C} (\mathfrak{C}\mathfrak{r}).$$

Ihre Schnittlinie mit der Ebene $\mathfrak{C}\mathfrak{r} = 0$ deckt sich mit der Schnittlinie der Fläche

$$\mathfrak{D}\mathfrak{r} = C^2 - \mu\, r$$

und der erwähnten Ebene und stellt die Bahn der betrachteten Masse dar.