PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 230 — № 241 (1968)

231. ОТКРЫТИЕ МНОЖЕСТВЕННОСТИ И ЕГО ФИЛОСОФСКОЕ ЗНАЧЕНИЕ*

Эрнест Кольман

Широко известен исторический факт, что философы различных направлений — а в особенности, вследствие крайне абстрактного характера математики, идеалистических — всегда стремились найти в математике аргументы для обоснования или подтверждения своих взглядов.

Так пифагорейцы, исходя из ошибочного предположения, будто отношение любых отрезков можно выразить отношением целых чисел, считали целые числа сущностью всех вещей и основанием единства мира. Поэтому, когда около 400 лет до н. э. была доказана невозможность выразить указанным образом отношение между диагональю и стороной квадрата, пало этим самым и пифагорейское мифическое мировоззрение.

Так и Кант, опираясь на мастерское дело евклидовых „Начал", теоремы которых считались на протяжении двух тысячелетий безусловно общими и необходимыми, и побуждаемый кажущейся самоочевидной неоспоримостью арифметики, объявил, что чувственно-наглядное восприятие пространства и времени — которые он считал основой геометрических и соответственно, арифметических суждений — априорны, что они существуют до всякого чувственного опыта изначально в сознании.

Однако 23 февраля 1826 года высказал Лобачевский впервые публично мысль, что евклидова геометрия не является единственной непротиворечивой геометрией, и создал свою собственную неевклидову систему, логическая непротиворечивость которой была позже доказана, во всяком случае постольку, поскольку ее удалось свести к непротиворечивости геометрии Евклида. Но тем самым начало становиться ясным, что чувствено-наглядное восприятие пространства и само понятие пространства являются абстрактными — неполными и односторонними — отображениями вещей и отношений объективного материального мира, и что, если вообще возможно ответить на вопрос об истинности геометрии, то единственно эмпирический опыт, наблюдения и эксперименты физики и астрономии, в состоянии решить, какая из различных геометрий — евклидова или неевклидова — отображает вернее объективную действительность. Тем самым кантианский субъективный идеализм потерял свою опору в геометрии, но ему пока что осталась арифметика надежным аргументом.

* Принято 7. 6. 1968.

Когда Георг Кантор в 1873 г. начал создавать теорию множеств как логическую основу математики, то он, следуя Платону, приписывал числам и всем математическим абстракциям вообще, среди них и созданным им понятиям различных бесконечных множеств, актуально бесконечному и т.д., самостоятельное объективное существование в царстве идей. Однако эта крепость теоретикомножественного абсолютного идеализма вскоре пошатнулась. Сначала сам Кантор, а позже и другие математики открыли ряд антиномий в теории множеств и в служащей ей математической логике, среди которых особенно обеспокаивающе действовала антиномия Расселла. Почти пять десятилетий длившиеся напрасные попытки избавиться от антиномий — состояние, которое сами математики охарактеризовали как „кризис основ" — привели к тому, что возникли школы субъективно-идеалистического интуиционизма и его разновидности — эффективизма, равно как и логицизма, конвенционализма и формализма, причем интуиционизм, и в особенности формализм сыграли большую роль в прояснении основ математики, хотя ни одна из этих школ не смогла решить проблему — обосновать математику раз и навсегда, потому что эта проблема в такой антидиалектической постановке принципиально неразрешима. Несмотря на это, открытием неевклидовой геометрии началась новая эпоха в логическом и гносеологическом обосновании математики.

Возглавляемый Брауэром интуиционизм отклонял актуальную бесконечность и наивное понимание математического существования, не желал признавать логику как науку предшествующую математике, поскольку он считал, что так называемая „праинтуиция", т. е. неоспоримая спекулятивная или наглядная ясность и очевидность таких элементарных суждений как „0 = 0", и таких понятий как натуралього ряда чисел, являются последним основанием истинности математики. Интуиционистская логика (независимо от различия ее разновидностей) не признавала принципа исключенного третьего (в том смысле, что из двух противоречащих друг другу положений не обязательно одно должно быть истинным), закона снятия двойного отрицания апагогического доказательства, и придавала дизъюнкции, отрицанию, суждению общности свои собственные, ограничительные интерпретации. Интуиционистская точка зрения приводила к тому, что многие практически важные теоремы должны были быть исключены из математики, причем эта жертва не окупалась логической последовательностью интуиционизма, так как например для очень больших конечных чисел (скажем для целого числа, число десятичных мест которого выражается числом, насчитывающим десять миллиардов знаков) возникают трудности доказать его существование не меньшие, чем для бесконечных чисел.

Логицизм, с Расселлом во главе, в противоположность к интуиционизму пытался вывести не логику из математики, а математику из логики, требуя, чтобы недифинируемые математические исходные понятия определялись в логических терминах, все математические теоремы выражались языком математической логики и доказывались по ее правилам. Неожиданным окончательным результатом этих долго продолжавшихся попыток было однако, что Гёдель в 1931 г. доказал принципиальную неполноту логики, представляющую систему тавтологий, рассматриваемых как априорно истинные. Иными словами, он доказал, что невозможно в такой системе вывести все содержательные математические теоремы и доказать непротиворечивость этой системы логическими средствами, которые формализованы в самой этой системе. Далее вскоре была доказана неразрешимость проблемы разрешимости в такого рода системах, равно как и невозможность доказать аксиому бесконечности (существование бесконечных множеств) и аксиому сводимости, которая должна была исключить опасность порочного круга. Это крушение логицизма было прежде всего связано с тем, что вместо того, чтобы искать в материальной действительности конкретные, или хотя бы менее абстрактные модели крайне абстрактных математических понятий, он пытался свести их к понятиям еще более абстрактным.

Обоснованный Пуанкаре конвенционализм, утверждавший, что математика не имеет эмпирического происхождения и основания, а строится на произвольных соглашениях, избранных по причинам удобства и прагматической полезности, не смог последовательно оправдать себя, так как был вынужден ограничить произвольность выбора аксиом их непротиворечивостью, которую, однако, можно было доказать только тогда, когда удавалось указать по меньшей мере одну область объектов, для которых эта система аксиом обладала конкретным чувственным смыслом, вследствие чего непротиворечивость оказалась зависимой от истинности. Столь же мало удачным оказался и более поздний конвенционализм Карнапа и Айдукиевича в математической логике, постулировавший свободу выбора логической системы для всякого математика, ограниченную лишь единственным условием, что она должна быть „ясно", „экзактно" формулирована, не будучи однако в состоянии определить эту „ясность" или „экзактность" иначе чем через содержательную логику, через практическую верификацию.

Наконец, Гильбертова школа формализма, пыталась найти выход из трудностей, возникших в связи с антиномиями, в том, что она стремилась доказать непротиворечивость математики при помощи передачи содержательной математики в особую область — метаматематику — которая якобы дана априори как специальная способность нашего духа. Гильберт хотел при этом использовать свой метод, который он прежде успешно применил для доказательства непротиворечивости евклидовой геометрии, когда он пользовался арифметической моделью, в которой участвовали теоретикомножественные представления, чья непротиворечивость постулировалась. Однако, в случае непротиворечивости всей математики требуется доказать, что теоретикомножественные противоречия не встретятся в правильно проводимых математических доказательствах. Поэтому он рассматривал актуальную бесконечность лишь как символ, которому в реальном мире ничто не соответствует, но который может служить вспомогательным средством в конечной области. Он построил финитистскую теорию доказательства, чьими объектами являются лишь конечные множества символов, и пытался доказать, что в математике, формализованной этим путем, никогда нельзя будет прийти к противоречивой формуле вида „$0 = 1$". Упомянутое выше доказательство Гёделя того, что даже теория элементарной арифметики натуральных чисел не может быть полностью формализована, вскрыло невозможность осуществления программы формализма.

Поводом для возникновения названных школ, споривших долго и ожесточенно между собой, однако в дальнейшем своем развитии взаимно сблизившихся, существенно примиривших свои противоречия и переставших сегодня существовать в чистом виде, послужили, как уже сказано, антиномии теории множеств и логики. Их причиной явилось слишком широкое, неограниченное понимание понятия „множества" и логической „области рассмотрения", некритический перенос логических концепций, возникших как крайне упрощенные абстрактные отображения конкретных отношений, господствующих в конечном, на идеализированное бесконечное.

С философской, теоретико-познавательной точки зрения, все эти школы были обременены тем, что для всех них математика считалась чисто идеальной наукой связанной только исторически, эвристически, психологически или дидактически, но отнюдь не теоретико-познавательно с материальным миром, и применимой для практики лишь случайно, вследствие того, что она в состоянии целесообразно описывать упрощенно какие-нибудь иначе слишком сложные физические закономерности, — такова точка зрения субъективного идеализма, — или же, — согласно объективно-идеалистическим воззрениям, — вследствие якобы принципиального преимущества логико-математических истин над эмпирическими истинами. Опираясь на эти идеалистические позиции, сторонники этих школ ставили проблему непротиворечивости математики настолько метафизически, что они неизбежно должны были потерпеть неудачу.

Однако как для математики, так и для философии не меньшее значение чем слишком большая широта понятия „множества" имело то обстоятельство, что система аксиом теории множеств оказалась слишком узкой. Уже в 1874 г. Кантор доказал, что множество всех действительных чисел не является счетным. Начиная с 1880 г. он пытался доказать выдвинутую им гипотезу континуума, согласно которой мощность $\aleph$ множества всех вещественных чисел является наименьшей среди всех мощностей, которые больше чем мощность $\aleph_0$ множества натуральных чисел. Несмотря на длительные усилия многих выдающихся математиков, эту гипотезу не удалось доказать, но не удалось и опровергнуть. Та же судьба постигла и некоторые другие утверждения, как например то, что всякое множество можно вполне упорядочить, т. е. что существует для него правило, согласно которому для любых его двух элементов удастся установить который из них предшествует другому, и что данное множество и всякое его непустое подмножество имеют первый элемент, или утверждение, которое выдвинул Цермело в 1904 г. для того, чтобы доказать только-что названное утверждение — оно получило название аксиомы выбора Цермело — что во всяком расчлененном множестве можно избрать во всех его непересекающихся подмножествах по одному единственному элементу. Наконец, в 1938 г. Гёдель доказал непротиворечивость аксиомы выбора и гипотезы континуума, а в 1963—1964 гг. Поль Дж. Коэн доказал, что оба эти предложения не зависят от остальных аксиом теории множеств. Следовательно, в этой системе аксиом они не могут быть принципиально ни опровергнуты, ни доказаны.

В математике, базирующейся почти полностью на теории множеств, возникла таким образом — как это предвидели Френкель и Бар-Гиллел — ситуация подобная возникшей в геометрии, когда была открыта неевклидова геометрия: также как вследствие доказательства независимости аксиомы параллельных геометрия раскололась, так и теперь дошло до раскола теории множеств и опирающейся на нее математики на две или несколько ветвей, в зависимости от того, принимаем ли мы в качестве аксиом гипотезу континуума (равно как и другие указанные утверждения) или же ее отрицание.

Но указанная аналогия неполна. В то время как евклидова геометрия, гиперболическая геометрия Лобачевского и эллиптическая геометрия Римана являются частными случаями общей геометрии Римана, математика с гипотезой континуума и без нее не находится в подобном взаимоотношении. Затем, если можно надеяться, что с помощью экспериментов удастся решить какая из геометрий более адекватна действительности, то для математики в целом такие перспективы пока не предвидятся, поскольку даже не ясно, как отразится принятие или отклонение гипотезы континуума на самой математике.

Позволим себе высказать здесь предположение, которое, из-за отсутствия аргументов, сами рассматриваем как фантастическое: не исключено, что некоторые из прославленных математических проблем, давно не решенных, вроде несуществования нечетных совершенных чисел, теорема Ферма, проблемы четырех красок и других, не решены вовсе не потому, что пока не удалось изобрести требуемые для их решения новые методы, а что они принципиально неразрешимы. Именно в том смысле, что скажем в математике, не допускающей гипотезу континуума, окажется возможным доказать, например, существование таких целых положиельных чисел $n>2$, для которых уравнение $x^n+y^n=z^n$ решается в целых числах, отличных от 0 и 1. Между тем как для математики, допускающей гипотезу континуума, удастся доказать, что — как это утверждал Ферма — такие числа n не существуют. Но повторяем, поскольку связь между гипотезой континуума и остальной математикой пока неясна, высказанное предположение является лишь ничем необоснованным домыслом.

Те из математиков, которые защищают платоновское или феноменологическое понимание математической истины, как реальности мира идей, понятно убеждены, что только одна из различных альтернатив может быть истинной, а поэтому они стремятся найти новую аксиоматику теории множеств, которая обеспечила бы однозначное решение всех проблем. Противоположная альтернативистская точка зрения является субъективно-идеалистической, так как она подчиняет вопрос бытия вопросу истинности: каждому математику предоставляется право выбрать ту или другую альтернативу. Напротив, диалектический материализм понимает эту проблему познания, поставленную с такой остротой открытием множественности математик, так, что различные логически равноправные непротиворечивые разновидности математики являются различными односторонними абстрактными отображениями объективной действительности. В частности такие проблемы как проблема гипотезы континуума возникают вследствие того, что действительность является диалектическим неделимым единством прерывного и непрерывного, но мы воспринимаем это единство односторонне и как бы разорванное пропастью — в арифметике как индивидуальные числа, в геометрии как однородные сплошные пространственные фигуры.

Сформулированный Лениным в „Материализме и эмпириокритицизме" принцип познания, направленный против догматического окостенения и гласящий, что диалектический материализм не связывает себя естественно-научными представлениями, возникающими на том или другом историческом этапе, а настаивает единственно на независимости материального бытия от познания и на познаваемости сущности движущейся материи, получает здесь, в применении к математическим представлениям, особое значение.

Резюме

Издавна пытались идеалистические философы (напр. пифагорейцы, Кант) использовать математику для своих целей, однако ее развитие (открытие несоизмеримых, неевклидовой геометрии) всякий раз лишало их этой опоры.

Кризис основания математики на рубеже последнего века, вызванный антиномиями теории множеств и логики, и породивший ряд спорящих между собой школ, возник вследствие неограниченного понимания понятия „множества" и некритического переноса на бесконечность элементарной логики, являющейся абстрактным отражением конечного.

Величайшее значение как для математики, так и для теории познания на ряду с широтой понятия „множества" имела узость ее системы аксиом, сделавшая невозможным решить ряд важных проблем, в особенности проблему гипотезы континуума. Недавнее открытие независимости этой гипотезы от остальных аксиом теории множеств создало для математики в целом ситуацию, аналогичную той, которая возникла для геометрии открытием неевклидовой системы. Вместо одной единственной математики, мы имеем теперь множественность одинаково непротиворечивых математик.

Ни объективно-идеалистическо-платоновское или феноменологическое — ни субъективно-идеалистическое альтернативистское — понимание математики не способно справиться с фактом множественности математик. Между тем этот факт подтверждает еще раз материалистически-диалектическую теорию отражения, согласно которой мы имеем здесь односторонние, неполные абстрактные отображения отношений реального материального мира, представляющего неразрывное единство прерывного и непрерывного.

Вместе с тем подтверждается важный познавательный принцип, высказанный Лениным, согласно которому наша философия не должна связывать себя временными представлениями материи, пространства, времени, причинности и т. п., добытыми отдельными науками, а будучи научной философией, опирающейся единственно на обобщения их результатов, связывать себя единственно признанием независимости материальной действительности от сознания и признанием познаваемости всегда изменяющейся сущности этой действительности.

Адрес автора:
СССР,
Москва А-80,
улица Алабяна, дом 1/40,
Корпус 6, Квартира 151.