PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 230 — № 241 (1968)

230. ECHELLE DE L'ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE DENOMBRABLE. PARADOXE DE L'IDEMPOTENCE*

Albert Sade

Introduction

Dans [3], l'auteur a montré que l'argument classique pour établir la non équivalence d'un ensemble dénombrable et de son booléien se réduit à un truisme quand on l'applique à l'ensemble des parties propres de cet ensemble. Si l'on appelle sous-ensemble *singulier* d'un ensemble E tout sous-ensemble de E ayant un complément fini dans E, on démontre de même que le raisonnement classique ne s'applique pas à l'ensemble des sous-ensembles non-singuliers de E. Soit G l'ensemble des parties non-singulières de l'ensemble dénombrable $N=(1, 2, 3, \ldots)$; l'ensemble G a même puissance que le booléien de N, car l'ensemble des parties finies de N est dénombrable. On va définir une relation de bon ordre total sur G; la méthode sera la même que celle de CANTOR ([1], № 7) pour l'ensemble des rationnels.

Echelle des parties de N

Soit E un ensemble quelconque, et $B(E)$ son booléien. Soit E' l'ensemble $E+x$, où x n'appartient pas à E. Soit $B(E)_x$ la famille d'ensembles obtenue en adjoignant x à chacun des sous-ensembles de E qui constituent $B(E)$. Alors

$$(1) \qquad \text{Pour tout } E, \quad B(E')=B(E)+B(E)_x.$$

En effet, $B(E')$ comprend d'une part tous les sous-ensembles de E, c'est-à-dire $B(E)$, d'autre part, tous les sous-ensembles de E' qui ne sont pas contenus dans E, c'est-à-dire les sous-ensembles de E' auxquels l'élément x appartient; si, à chacun d'eux, on retranche x, il reste un sous-ensemble de E. Inversement, si, à une partie quelconque de E, on adjoint l'élément x, on obtient un sous-ensemble de E'. Cette seconde partie de $B(E')$ est donc précisément $B(E)_x$, et comme les deux parties sont disjointes, on a (1).

S'il existe une relation de bon ordre total sur $B(E)$, les conditions (2) définiront un bon ordre total sur $B(E')$,

$$(2) \qquad \begin{cases} (i) \quad \forall\, X, Y \subseteq E, \qquad X \prec Y+x, \\ (ij) \quad (X \prec Y) \rightleftarrows (X+x \prec Y+x). \end{cases}$$

* Reçu le 20 juillet 1968.

Si maintenant E est le segment à gauche $(1, 2, 3, \ldots, p) \subset N$, l'égalité (1) fait de $B(E')$, où $x = p+1$, un ensemble discret bien ordonné et, par induction complète, établit une échelle infinie de rangement des parties non singulières de N du même modèle que celle qu'utilise CANTOR ([1], № 6) pour démontrer $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$. Ainsi $G(N)$ est effectivement dénumérable. On voit d'ailleurs sans peine que, tout sous-ensemble $\{a, b, c, \ldots\} \subset N$ occupe dans cette échelle le rang $r = R(a, b, c, \ldots)$

$$R(a, b, c, \ldots) = 1 + 2^{a-1} + 2^{b-1} + 2^{c-1} + \cdots,$$

fonction monotone analogue à celle de CANTOR (ibid),

$$p = m + (1/2)(m+n-1)(m+n-2)$$

pour la bijection entre $\{r\}$ et $\{m, n\}$.

Que R soit monotone est évident, d'après le processus même de construction de l'échelle de G. D'ailleurs, pour s'assurer que

$$[R(a, b, c, \ldots) = R(a', b', c', \ldots)] \rightleftarrows (a = a' \ \& \ b = b' \ \& \ \ldots)$$

il suffit d'observer que R est un nombre entier du système dyadique.

On parvient à un résultat analogue avec les nombres fractionnaires dyadiques de l'intervalle $(0-1($, problème équivalent, [4]. Le rang du nombre $\Sigma(1/2)^x$ est ici $R[\Sigma(1/2)^x] = 1 + \Sigma 2^{x-1}$, avec $R(0) = 1$, pour tout entier naturel, x.

L'échelle obtenue, dans un cas comme dans l'autre, est illimitée et peut-être prolongée indéfiniment.

Ainsi, dans la première échelle, le rang de l'ensemble des nombres pairs est

$$R(2, 4, 6, \ldots) = 1 + 2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 + \cdots$$

Enfin, le résultat ne provient en aucune façon d'un désaccord sur les principes logiques ou sur les axiomes. En disant que l'échelle de $G(N)$ parcourt tous les sous-ensembles non-singuliers, finis ou non de N, on ne déclare pas que ce soit là le seul moyen de parvenir à l'ensemble G et cela ne contredit en rien le fait que cet ensemble G peut aussi être regardé comme embrassé d'emblée, dans sa totalité.

On peut d'alleurs ordonner le booléien de N de bien des façons; par exemple en faisant correspondre à chaque sous-ensemble ordonné $S = (a, b, c, \ldots, u, v, x)$ de N un point de l'espace euclidien de la manière suivante. Soit n le cardinal de S et soit $P(x, n)$ l'ensemble de toutes les parties de N, de cardinal n, et dont le plus grand élément est x, $a < b < c < \cdots < u < v < x$.

Les ensembles $P(x, n)$ peuvent être construits et ordonnés au moyen de la loi de récurrence

$$P(x, n+1) = P(n, n)_x + P(n+1, n)_x + P(n+2, n)_x + \cdots + P(x-1, n)_x,$$

où $P(a, n)_x$ désigne la famille de sous-ensembles de N obtenus en adjoignant l'élément x à chacun des sous-ensembles qui constituent $P(a, n)$, $(x > a)$.

S'il existe une relation de bon ordre total sur les ensembles P du second membre, elle induit une relation de bon ordre total sur le premier membre $P(x, n+1)$. Comme les plus petites familles P se réduisent à un seul élément, il en résulte que $P(x, n)$ est bien ordonné pour toutes valeurs de x et de n.

Un calcul facile montre alors que le rang de $S=(a, b, c, \ldots, u, v, x)$ dans $P(x, n)$ est

$$R(S)=1+\binom{a-1}{1}+\binom{b-1}{2}+\binom{c-1}{3}+\cdots+\binom{u-1}{n-2}+\binom{v-1}{n-1}.$$

Formule qui se réduit à 1 si $n=1$ et qui n'a pas de sens pour $n=0$. On pose $R(\emptyset)=1$.

Cela posé les coordonnées de S sont x, n, $R(S)$.

On peut enfin ordonner le booléien lui-même en une seule suite en définissant sur lui une relation de bon ordre total par

$$[P(x, n) \prec P(x, m)] \rightleftarrows (n \prec m)$$

$$[\forall\, m, n,\ P(x, n) \prec P(y, m)] \rightleftarrows (x \prec y).$$

Le rang du sous-ensemble $S=(a, b, c, \ldots, u, v, x)$ est alors, 1 si $n=0$;

$$2^{x-1}+1 \text{ si } n=1 \text{ et } 2^{x-1}+\left[\binom{x-1}{0}+\binom{x-1}{1}+\binom{x-1}{2}+\cdots+\binom{x-1}{n-2}\right]$$

$$+\left[1+\binom{a-1}{1}+\binom{b-1}{2}+\binom{c-1}{3}+\cdots+\binom{u-1}{n-2}+\binom{v-1}{n-1}\right] \text{ si } n>1.$$

Paradoxe de l'idempotence

Il est bien connu que

$$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0, \tag{3}$$

$$\aleph_0\aleph_0=\aleph_0, \tag{4}$$

donc

$$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0\aleph_0. \tag{5}$$

Cela signifie que, si l'on ne considère que les nombres transfinis en soi, sans se préoccuper des ensembles que l'on peut choisir pour les représenter, l'addition fournit le même résultat que la multiplication et que, par conséquent, il ne s'agit là que de deux noms différents et de deux signes opératoires différents pour désigner une même chose. On sait, de plus que cette opération unique est associative et commutative.

Soit $E=(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ un ensemble dénombrable quelconque. Si l'on remplace chaque élément, a_i, de cet ensemble par $\aleph_0$ et si l'on fait la somme de tous ces termes égaux à $\aleph_0$, il est bien connu que le résultat est $\aleph_0$,

$$\aleph_0+\aleph_0+\aleph_0+\aleph_0+\cdots=\aleph_0.$$

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad a_4, \ldots$$

D'après (5), si l'on remplace partout le signe + **de l'addition** par celui de la multiplication, il n'y aura rien de changé au **résultat, c'est-à-dire** au membre de droite, $\aleph_0$, donc

$$\aleph_0 \; \aleph_0 \; \aleph_0 \; \aleph_0 \cdots = \aleph_0.$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \; \ldots$$

Mais, par définition, le premier membre (à gauche) est devenu $\aleph_0^{\aleph_0}$, donc

$$\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_0. \tag{6}$$

Alors, pourquoi ce qui est accepté de tous dans le cas de la somme ne l'est-il plus dans le cas du produit? Les deux cas ne sont pourtant que deux représentations *du même modèle logique*. Il y a là une rupture choquante dans le mode de maniement de la pensée, un choix arbitraire d'une nouvelle façon de juger que rien ne justifie.

Idempotence pour des nombres transfinis quelconques

Pour tout cardinal transfini, a, on a, **[2]**

$$aa = a + a = a \tag{7}$$

et, quels que soient a et b,

$$a + b = ab, \tag{8}$$

$$a + b = b + a, \tag{9}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c). \tag{10}$$

On dérive d'abord de là le même résultat que pour $\aleph_0$, mais valable cette fois pour un cardinal transfini quelconque, x. En effet, l'itération de la somme fournit le produit

$$\forall x, \; y, \; x + x + x + x + \cdots = xy,$$

et l'itération du produit fournit la puissance

$$\forall x, \; y, \; x\,x\,x\,x\,x \cdots = x^y.$$

Mais, d'après (7), le résultat de l'addition est le même que celui de la multiplication; donc

$$\forall x, \; y, \; x + x + x + x + \cdots = x\,x\,x\,x \cdots = x^y.$$

En particulier, si $x = y$

$$x = x + x = xx = x^x,$$

contrairement au résultat classique $x^x > x$.

Comment l'itérée d'une opération binaire unique et bien déterminée, effectuée *sur les mêmes élémentes* peut-elle avoir deux valeurs *différentes* du simple fait que cette opération porte deux noms différents! Il est clair que le résultat ne peut dépendre que de l'opération elle même et non de la manière de la nommer. Ce résultat resterait encore le même si l'on ne donnait plus de nom du tout à l'opération qui le détermine.

La même chose peut être dite du signe opératoire. Que l'on écrive $a+b$ ou ab, rien n'est changé au composant de a et b, ni au résultat final d'une suite, finie ou infinie, de telles opérations commutatives et associatives, puisque l'on est d'accord au départ (8), pour déclarer que $a+b$ est toujours égal à ab, quels que soient a et b.

Sur un nouveau paradoxe

On peut lire dans M. MEIGNE, *Logique de la pensée créatrice en mathématiques* (1964), p. 29, que l'ensemble H de toutes les expressions formelles (non effectuées), $a+b+c+\cdots$, où a, b, c, ... sont des entiers positifs quelconques, inégaux ou non, a une puissance au moins égale à celle du booléien $\mathcal{B}(N)$ de l'ensemble N des entiers naturels.

Dans l' analyse que fait K. SCHÜTTE de cet ouvrage, (*Math. Rev.* 29, 1965, № 5710), le rev. conteste cette affirmation: „So wird auf S. 29 die falsche Behauptung aufgestellt, das die Menge der arithmtischen Ausdrücke (die etwa aus natürlichen Zahlen oder Zahlenvariabeln und dem Additionszeichen gebildet werden können) nicht abzählbar sei".

Soit $E=(x, y, z, \ldots)$ un sous-ensemble quelconque de N. Si, dans E, on remplace partout la virgule par le signe $+$, on obtient une somme

$$S=x+y+z+\cdots$$

qui satisfait à la définition des éléments de H; $S\in H$.

Si l'on remplace tout sous-ensemble $E\subseteq N$ par la somme correspondante S, on obtient un ensemble $(S, \ldots)=\Sigma$, qui est semblable au booléien de N,

$$f=\mathcal{B}\rightarrow\Sigma=(,\rightarrow+); \text{ donc}$$

(11) $$\operatorname{Card}\Sigma=\operatorname{Card}\mathcal{B}(N).$$

D'autre part Σ est visiblement une partie de H; donc

(12) $$\operatorname{Card}\Sigma\leqslant\operatorname{Card}H.$$

D'après la théorie classique, (SCHÜTTE), H est dénombrable

(13) $$\operatorname{Card}H=\aleph_0.$$

Enfin, d'après le théorème de CANTOR,

(14) $$\operatorname{Card}\mathcal{B}(N)>\aleph_0.$$

Eliminant Card Σ entre (11) et (12), on a

$$\operatorname{Card}\mathcal{B}(N)\leqslant\operatorname{Card}H,$$

et tenant compte de (13),

(15) $$\operatorname{Card}\mathcal{B}(N)\leqslant\aleph_0.$$

Or $$(14)=\neg(15).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Kantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Math. Annalen, **46** (1895), 481—512; **49** (1897), 207—246.

[2] G. Hessenberg, *Potenzen transfiniter Ordnungszahlen*, Jahresb. Deutsch. Math.-Verein. **16** (1907), 130—137.

[3] A. Sade, *Lacune dans l'argument qui établit la non-équivalence d'un ensemble et de son booléien*, Rev. Fac. Cien. Lisaboa, 2 ser. A, **11** (1968), 299—301.

[4] A. Sade, *Evanescence de l'argument cantorien pour le cardinal des nombres dyadiques*, ces Publications, **№ 209—№ 228** (1968), 25—26.

Adresse de l'auteur:
364, Cours de la République
Pertuis (Vaucluse), France