PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ A BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 210 — № 228 (1968)

218. INÉGALITÉS POUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES ÉLÉMENTAIRES

D. S. Mitrinović et *P. M. Vasić*

(Reçu le 1 février 1968)

1. Désignons: par a_ν $(\nu=1, \ldots, n)$ des nombres positifs, par $c_k^{(i)}$ une fonction symétrique élémentaire de degré k des nombres $a_1, \ldots, a_i$.

Acceptons aussi:

$$c_k=c_k^{(n)}, \quad \overline{c}_k=c_k^{(n-1)}, \quad c_0^{(i)}=1, \quad c_{-k}^{(i)}=0 \qquad (k=1, \ldots).$$

Pour les fonctions $c_k^{(i)}$ l'inégalité (voir, par exemple [**1**], p. 52, ou [**2**], p. 117):

$$c_{k-1}^{(i)}\, c_{k+1}^{(i)}-\left(c_k^{(i)}\right)^2<0 \qquad (k=1, \ldots, i-1;\ i=1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

est valable.

Cette inégalité est équivalente à

$$\frac{c_{k-1}^{(i)}}{c_k^{(i)}}<\frac{c_k^{(i)}}{c_{k+1}^{(i)}} \qquad (k=1, \ldots, i-1;\ i=1, \ldots, n), \tag{1.2}$$

d'où provient

$$\frac{c_0^{(i)}}{c_1^{(i)}}<\frac{c_1^{(i)}}{c_2^{(i)}}<\cdots<\frac{c_{i-2}^{(i)}}{c_{i-1}^{(i)}}<\frac{c_{i-1}^{(i)}}{c_i^{(i)}} \qquad (i=1, \ldots, n). \tag{1.3}$$

Par suite, on a

$$\frac{c_{s-1}^{(i)}}{c_s^{(i)}}<\frac{c_{k-1}^{(i)}}{c_k^{(i)}} \qquad (s<k \leqslant i). \tag{1.4}$$

2. En partant de ces résultats bien connus, nous allons prouver plusieurs inégalités concernant les fonctions symétriques élémentaires.

***Théorème* 1.** *Si* $s<k$ $(s, k=1, \ldots, n-1)$, *on a*

$$\frac{c_s}{c_k}<\frac{\overline{c}_s}{\overline{c}_k}. \tag{2.1}$$

Démonstration. Considérons

$$f(a_n)=\frac{c_s}{c_k}=\frac{\bar{c}_s+a_n\,\bar{c}_{s-1}}{\bar{c}_k+a_n\,\bar{c}_{k-1}}\,,$$

$$f'(a_n)=\frac{\bar{c}_{s-1}\,\bar{c}_k-\bar{c}_s\,\bar{c}_{k-1}}{(\bar{c}_k+a_n\,\bar{c}_{k-1})^2}=\frac{\bar{c}_s\,\bar{c}_k}{c_k{}^2}\left(\frac{\bar{c}_{s-1}}{\bar{c}_s}-\frac{\bar{c}_{k-1}}{\bar{c}_k}\right).$$

Dans le cas où $s<k$, on a, selon (1.4), $f'(a_n)<0$, et alors

$$f(a_n)<\lim_{a_n\to 0+} f(a_n).$$

De là, étant donné que $\lim\limits_{a_n\to 0+} f(a_n)=\dfrac{\bar{c}_s}{\bar{c}_k}$, on obtient (2.1).

Théorème 2. *Si* $s<k$ $(s, k=1, 2, \ldots)$ *et si* p *et* q *sont des nombres réels, tels que* $0<p<q$, *on a*

$$\frac{(c_s)^p}{(c_k)^q}<\frac{(\bar{c}_s)^p}{(\bar{c}_k)^q}. \tag{2.2}$$

Démonstration. Partons de la fonction f, définie par

$$f(a_n)=\frac{(c_s)^p}{(c_k)^q}=\frac{(\bar{c}_s+a_n\,\bar{c}_{s-1})^p}{(\bar{c}_k+a_n\,\bar{c}_{k-1})^q}\,,$$

et de sa dérivée f', donnée par

$$f'(a_n)=\frac{(\bar{c}_s+a_n\,\bar{c}_{s-1})^{p-1}}{(\bar{c}_k+a_n\,\bar{c}_{k-1})^{q+1}}\left((p-q)\,\bar{c}_{k-1}\,\bar{c}_{s-1}\,a_n+p\bar{c}_k\,\bar{c}_{s-1}-q\bar{c}_s\,\bar{c}_{k-1}\right).$$

Pour prouver que $f'(a_n)<0$, supposons que $f'(a_n)\geqslant 0$. On aurait alors

$$(p-q)\,\bar{c}_{k-1}\,\bar{c}_{s-1}\,a_n+p\bar{c}_k\,\bar{c}_{s-1}-q\bar{c}_s\,\bar{c}_{k-1}\geqslant 0\,,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} a_n &\leqslant\frac{p\bar{c}_k\,\bar{c}_{s-1}-q\bar{c}_s\,\bar{c}_{k-1}}{(q-p)\,\bar{c}_{k-1}\,\bar{c}_{s-1}}\\ &<\frac{q}{q-p}\,\frac{\bar{c}_s\,\bar{c}_k}{\bar{c}_{s-1}\,\bar{c}_{k-1}}\left(\frac{\bar{c}_{s-1}}{\bar{c}_s}-\frac{\bar{c}_{k-1}}{\bar{c}_k}\right)\\ &<0\,, \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec la supposition que $a_n>0$.

Par suite, $f(a_n)<\lim\limits_{a_n\to 0+} f(a_n)$.

De là, on obtient (2.2).

***Théorème* 3.** *Si $k \leqslant n$ et si p et q sont des nombres réels tels que $0 < p < q$, l'inégalité suivante*

$$\frac{(c_n)^p}{(c_k)^q} \leqslant \frac{p^p}{q^q} (q-p)^{q-p} (\overline{c_k})^{p-q} \frac{(\overline{c_{n-1}})^p}{(\overline{c_{k-1}})^q} \tag{2.3}$$

a lieu.

Démonstration. Envisageons

$$f(a_n) = \frac{(c_n)^p}{(c_k)^q} = \frac{(a_n \overline{c_{n-1}})^p}{(\overline{c_k} + a_n \overline{c_{k-1}})^q},$$

$$f'(a_n) = \frac{(a_n)^{p-1} (\overline{c_{n-1}})^p}{(\overline{c_k} + a_n \overline{c_{k-1}})^{q+1}} ((p-q) \overline{c_{k-1}} + p \overline{c_k}).$$

Puisque $0 < p < q$, la fonction f' a un seul zéro positif:

$$(a_n)_1 = \frac{p}{q-p} \frac{\overline{c_k}}{\overline{c_{k-1}}}. \tag{2.4}$$

Étant donné que

$$f''((a_n)_1) = \frac{(a_n)^{p-1} (\overline{c_{n-1}})^p}{(\overline{c_k} + a_n \overline{c_{k-1}})^{q+1}} (p-q) \overline{c_{k-1}} < 0,$$

on a

$$f(a_n) \leqslant \max f(a_n) = f((a_n)_1).$$

Ceci conduit à l'inégalité (2.3).

Si dans (2.3) l'on pose $p = k = 1$ et $q = n$, on obtient l'inégalité bien connue (voir, par exemple, [3])

$$\left(\frac{G_n(a)}{A_n(a)}\right)^n \leqslant \left(\frac{G_{n-1}(a)}{A_{n-1}(a)}\right)^{n-1},$$

où $A_n(a)$ et $G_n(a)$ désignent la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique respectivement.

***Théorème* 4.** *Si l'on a $s > k$, $s > l$, $\lambda > 0$, ou $k < s < l$, $\lambda < 0$, on a l'inégalité suivante:*

$$\frac{c_k - \lambda c_l}{c_s} < \frac{\overline{c_k} - \lambda \overline{c_l}}{\overline{c_s}}.$$

Si l'on a $l < s < k$, $\lambda < 0$, ou $s < k$, $s < l$, $\lambda > 0$, l'inégalité suivante

$$\frac{c_k - \lambda c_l}{c_s} > \frac{\overline{c_k} - \lambda \overline{c_l}}{\overline{c_s}}$$

a lieu.

Démonstration. En partant de

$$f(a_n) = \frac{c_k - \lambda c_l}{c_s} = \frac{\overline{c_k} + a_n \overline{c_{k-1}} - \lambda (\overline{c_l} + a_n \overline{c_{l-1}})}{\overline{c_s} + a_n \overline{c_{s-1}}},$$

on trouve

$$f'(a_n)=\frac{(\overline{c_{k-1}}\,\overline{c_s}-\overline{c_k}\,\overline{c_{s-1}})-\lambda(\overline{c_s}\,\overline{c_{l-1}}-\overline{c_l}\,\overline{c_{s-1}})}{c_s^{\,2}}\,.$$

Pour $s>k$, $s>l$, $\lambda>0$ ou $k<s<l$, $\lambda<0$, on a $f'(a_n)<0$; donc, on a

$$f(a_n)<f(0)\,. \tag{2.5}$$

Dans le cas où $l<s<k$, $\lambda<0$ ou $s<k$, $s<l$, $\lambda>0$, on a $f'(a_n)>0$; donc, on a

$$f(a_n)>f(0)\,. \tag{2.6}$$

De (2.5) et (2.6) résulte le théorème **3.**

Observation. Par un choix convenable d'une fonction réelle

$$F(c_1, c_2, \dots, c_r, \dots, c_n;\ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m),$$

avec $r\leqslant n$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ des nombres réels, on pourrait former d'autres inégalités analogues à celles indiquées plus haut.

RÉFÉRENCES

[1] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge 1952.

[2] J. V. Uspensky, *Theory of equations*, New York—Toronto—London 1948.

[3] D. S. Mitrinović et P. M. Vasić, *Nouvelles inégalités pour les moyennes d'ordre arbitraire*, ces Publications, № **159** — № **170** (1966), 1—8.