PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 210 — № 228 (1968)

216. INÉGALITÉS DU TYPE DE RADO CONCERNANT DES FONCTIONS SYMÉTRIQUES

D. S. Mitrinović et *P. M. Vasić*

(Reçu le 5 decembre 1967)

1. Soit $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une suite des nombres positifs et

$$(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)=x^n+c_1 x^{n-1}+\cdots+c_{n-1}x+c_n.$$

Alors, $c_k\,(k=1, 2, \ldots, n)$ est une fonction symétrique élémentaire de degré k des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Nous acceptons aussi que

$$c_0=1 \quad c_{-k}=0 \quad (k=1, 2, \ldots), \quad c_k=0 \quad (k=n+1, n+2, \ldots).$$

Désignons par $c_k^{(i)}$ une fonction symétrique élémentaire de degré k des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_i$. Donc, $c_k^{(n)}=c_k$.

Nous introduisons aussi les notations suivantes:

$$p_k=\frac{c_k}{\binom{n}{k}}, \qquad p_k^{(i)}=\frac{c_k^{(i)}}{\binom{i}{k}}.$$

Observons que

$$p_n^{\frac{1}{n}}=(a_1 a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}=G_n(a), \qquad \left(p_i^{(i)}\right)^{\frac{1}{i}}=(a_1 a_2\cdots a_i)^{\frac{1}{i}}=G_i(a),$$

$$p_1=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A_n(a), \qquad p_1^{(i)}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_i}{i}=A_i(a),$$

où $A_n(a)$ et $G_n(a)$ désignent la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique respectivement.

Dans l'article **[1]** nous avons démontré l'inégalité suivante

$$(1.1) \qquad V_n A_n(a;\ v)-\lambda\frac{v_n}{w_n}W_n G_n(a;\ w)$$

$$\geqslant V_{n-1}A_{n-1}(a;\ v)-\lambda^{W_n/W_{n-1}}\frac{v_n}{w_n}W_{n-1}G_{n-1}(a;\ w) \qquad (\lambda>0),$$

avec

$$V_n=\sum_{i=1}^{n} v_i, \quad W_n=\sum_{i=1}^{n} w_i \qquad (v_i,\ w_i>0;\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

$$A_n(a;\ v)=\frac{v_1 a_1+v_2 a_2+\cdots+v_n a_n}{V_n}, \quad G(a;\ w)=(a_1^{w_1} a_2^{w_2}\cdots a_n^{w_n})^{1/W_n}.$$

Une autre démonstration de l'inégalité (1.1) a été donnée par P. S. BULLEN dans l'article [2]. Dans l'article [2], BULLEN a démontré aussi l'inégalité

$$\frac{(A_n(a;\ v)+\lambda)^{V_n}}{(G_n(a;\ w))^{v_n W_n/w_n}} \geqslant \frac{(A_{n-1}(a;v)+\lambda V_n/V_{n-1})^{V_{n-1}}}{(G_{n-1}(a;\ w))^{v_n W_{n-1}/w_n}} \qquad (\lambda>0). \tag{1.2}$$

Dans le cas où $v_i=w_i=1$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, les inégalités (1.1) et (1.2) deviennent

$$n\left(p_1-\lambda p_n^{\frac{1}{n}}\right) \geqslant (n-1)\left(p_1^{(n-1)}-\lambda^{\frac{n}{n-1}}\left(p_{n-1}^{(n-1)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right) \qquad (\lambda>0), \tag{1.3}$$

$$\frac{(p_1+\lambda)^n}{p_n} \geqslant \frac{\left(p_1^{(n-1)}+\dfrac{n}{n-1}\lambda\right)^{n-1}}{p_{n-1}^{(n-1)}} \qquad (\lambda>0). \tag{1.4}$$

2. Nous démontrerons le théorème suivant qui contient l'inégalité (1.2):

***Théorème* 1.** *Pour* $\lambda>0$, *l'inégalité suivante*

$$n\left(p_1-\lambda p_k^{\frac{1}{k}}\right) \tag{2.1}$$

$$\geqslant (n-1)\left(p_1^{(n-1)}-\frac{n}{k}\,\frac{k-1}{n-1}\,\lambda^{\frac{k}{k-1}}\left(p_{k-1}^{(n-1)}\right)^{\frac{1}{k-1}}-\frac{n-k}{k(n-1)}\,\frac{p_k^{(n-1)}}{p_{k-1}^{(n-1)}}\right).$$

est valable.

L'égalité a lieu si et seulement si

$$a_n=\frac{n}{k}\lambda^{\frac{k}{k-1}}\left(p_{k-1}^{(n-1)}\right)^{\frac{1}{k-1}}-\frac{n-k}{k}\,\frac{p_k^{(n-1)}}{p_{k-1}^{(n-1)}}.$$

Démonstration. Partons de

$$f(a_n)=n\left(p_1-\lambda p_k^{\frac{1}{k}}\right) \tag{2.2}$$

$$=(n-1)p_1^{(n-1)}+a_n-n\lambda\left(\frac{n-k}{n}\,p_k^{(n-1)}+\frac{k}{n}\,p_{k-1}^{(n-1)}a_n\right)^{\frac{1}{k}},$$

$$f'(a_n)=1-\lambda p_{k-1}^{(n-1)}\left(\frac{n-k}{n}\,p_k^{(n-1)}+\frac{k}{n}\,p_{k-1}^{(n-1)}a_n\right)^{\frac{1}{k}-1}. \tag{2.3}$$

La fonction f' a un seul zéro

$$(2.4)\qquad (a_n)_1=\frac{n}{k}\lambda^{\frac{k}{k-1}}\left(p_{k-1}^{(n-1)}\right)^{\frac{1}{k-1}}-\frac{n-k}{k}\,\frac{p_k^{(n-1)}}{p_{k-1}^{(n-1)}}.$$

De là, d'après la condition $a_n>0$, on obtient

$$(2.5)\qquad \lambda^{\frac{k}{k-1}}>\frac{n-k}{n}\,\frac{p_k^{(n-1)}}{\left(p_{k-1}^{(n-1)}\right)^{k/(k-1)}}.$$

Étant donné que

$$f''(a_n)=\lambda\frac{k-1}{n}\left(p_{k-1}^{(n-1)}\right)^2\left(\frac{n-k}{n}\,p_k^{(n-1)}+\frac{k}{n}p_{k-1}^{(n-1)}\right)^{\frac{1}{k}-2}>0,$$

pour la fonction f on a

$$f(a_n)\geqslant\min f(a_n)=f((a_n)_1)$$

$$=(n-1)\left(p_1^{(n-1)}-\frac{n}{k}\,\frac{k-1}{n-1}\,\lambda^{\frac{k}{k-1}}\left(p_{k-1}^{(n-1)}\right)^{\frac{1}{k-1}}-\frac{n-k}{k\,(n-1)}\,\frac{p_k^{(n-1)}}{p_{k-1}^{(n-1)}}\right).$$

Donc, nous avons démontré le théorème **1** sous la condition (2.5). Mais, l'inégalité (2.1) est aussi valable si $\lambda>0$ et $a_n>0$. Si nous supposons que $p_k^{(n-1)}>0$ et $p_{k-1}^{(n-1)}>0$ (non obligatoirement $a_n>0$), la fonction f est définie pour

$$(2.6)\qquad a_n\geqslant-\frac{n-k}{k}\,\frac{p_k^{(n-1)}}{p_{k-1}^{(n-1)}}.$$

Le zéro $(a_n)_1$ satisfait à la condition (2.6) pour $\lambda>0$. Donc, l'inégalité (2.1) est valable pour chaque a_n qui satisfait à la condition (2.6) et d'autant plus pour chaque $a_n>0$.

Ceci démontre le théorème **1** pour chaque $\lambda>0$.

Pour $n=k$, étant donné que $p_n^{(n-1)}=0$, de (2.1) on obtient l'inégalité (1.4). Pour $\lambda=1$, on trouve l'inégalite de Rado (voir [3] et [4].).

3. Nous allons donner à présent une généralisation de l'inégalité (1.4), à savoir nous prouverons le théorème suivant:

***Théorème* 2.** *Pour chaque* $\mu>0$ *on a l'inégalité*

$$(2.1)\qquad \frac{(c_1+\mu)^k}{k^k c_k}\geqslant\frac{\left(c_1^{(n-1)}+\mu-\dfrac{c_k^{(n-1)}}{c_{k-1}^{(n-1)}}\right)^{k-1}}{(k-1)^{k-1}\,c_{k-1}^{(n-1)}}\qquad (k=2,3,\ldots,n).$$

L'égalité a lieu si et seulement si

$$a_n=\frac{1}{k-1}\left(\mu+c_1^{(n-1)}-k\frac{c_k^{(n-1)}}{c_{k-1}^{(n-1)}}\right).$$

Démonstration. La dérivée de la fonction f, définie par

$$(2.2)\qquad f(a_n)=\frac{(c_1+\mu)^k}{c_k}=\frac{\left(c_1^{(n-1)}+a_n+\mu\right)^k}{c_k^{(n-1)}+c_{k-1}^{(n-1)}+a_n}\qquad (k=2,\,3,\,\ldots,\,n),$$

est donnée par

$$(2.3)\quad f'(a_n)=\left(c_1^{(n-1)}+a_n+\mu\right)^{k-1}\frac{(k-1)\,c_{k-1}^{(n-1)}\,a_n+kc_k^{(n-1)}-c_1^{(n-1)}\,c_{k-1}^{(n-1)}-\mu c_{k-1}^{(n-1)}}{\left(c_k^{(n-1)}+c_{k-1}^{(n-1)}\,a_n\right)^2}.$$

La fonction f' a seulement un zéro positif

$$(2.4)\qquad (a_n)_1=\frac{1}{k-1}\left(\mu+c_1^{(n-1)}-k\frac{c_k^{(n-1)}}{c_{k-1}^{(n-1)}}\right),$$

où, d'après la condition $a_n>0$, on doit avoir

$$(2.5)\qquad \mu>-c_1^{(n-1)}+k\,\frac{c_k^{(n-1)}}{c_{k-1}^{(n-1)}}.$$

Étant donné que

$$f''((a_n)_1)=\left(c_1^{(n-1)}+(a_n)_1+\mu\right)^{k-1}\frac{(k-1)\,c_{k-1}^{(n-1)}}{\left(c_k^{(n-1)}+c_{k-1}^{(n-1)}\,(a_n)_1\right)^2}>0,$$

la fonction f atteint son minimum pour $(a_n)_1$.

Donc, si la condition (2.5) est remplie, on a

$$f(a_n)\geqslant \min f(a_n)=f((a_n)_1).$$

On peut démontrer, comme dans **1**, que (2.1) est valable pour $\mu\geqslant 0$.

Pour $k=n$, d'après les égalités

$$c_1=np_n,\quad c_1^{(n-1)}=(n-1)\,p_{n-1},\quad c_n^{(n-1)}=0,$$

de (2.1) on obtient (1.4), avec μ au lieu de $n\lambda$.

RÉFÉRENCES

[1] D. S. Mitrinović et P. M. Vasić, *Une classe d'inégalités où interviennent les moyennes d'ordre arbitraire*, ces Publications № **159** — № **170** (1966), 1—8.

[2] P. S. Bullen, *Some more inequalities involving the arithmetic and geometric means*, ces Publications № **181** — № **196** (1967), 61—66.

[3] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge 1952, p. 61.

[4] L. Tchakaloff, *Sur quelques inégalités entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique*, Publications de l'Institut mathématique de Belgrade (2), **3** (1963), 43—46.