PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 210 — № 228 (1968)

# 215. GÉNÉRALISATION D'UN PROCÉDÉ FOURNISSANT DES INÉGALITÉS DU TYPE DE RADO

*D. S. Mitrinović* et *P. M. Vasić*

(Reçu le 1 décembre 1967)

**0.** Soient $p=(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $q=(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ des suites des nombres positifs.

Introdusisons les notations suivantes:

$$P_n=\sum_{i=1}^{n} p_i, \quad Q_n=\sum_{i=1}^{n} q_i, \quad P_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1} p_i, \quad Q_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1} q_i;$$

$$A_n(a;\, q)=\frac{1}{Q_n}\sum_{i=1}^{n} q_i a_i, \quad A_{n-1}(a;\, q)=\frac{1}{Q_{n-1}}\sum_{i=1}^{n-1} q_i a_i;$$

$$G_n(a;p)=\Big(\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i}\Big)^{\frac{1}{P_n}}, \quad G_{n-1}(a;p)=\Big(\prod_{i=1}^{n-1} a_i^{p_i}\Big)^{\frac{1}{P_{n-1}}}.$$

Il en résulte que:

$$A_n(a;q)=\frac{Q_{n-1}}{Q_n}A_{n-1}(a;q)+\frac{q_n}{Q_n}a_n,$$

$$G_n(a;p)=a_n^{\frac{p_n}{P_n}}G_{n-1}(a;p)^{\frac{P_{n-1}}{P_n}}.$$

Cet article contient certaines généralisations de quelques inégalités, démontrées dans [1] et [2].

**1.** Généralisant une inégalité due à Rado, nous avons démontré l'inégalité suivante [1]:

$$(1.1) \qquad Q_n A_n(a;q)-\lambda\frac{q_n}{p_n}P_n G_n(a;p)$$
$$\geqslant Q_{n-1}A_{n-1}(a;q)-\lambda^{\frac{P_{n-1}}{P_n}}\frac{q_n}{p_n}P_{n-1}G_{n-1}(a;p) \qquad (\lambda>0).$$

Une autre généralisation de l'inégalité de RADO a été donnée par BULLEN [2], à savoir

$$(1.2)\qquad Q_n\{A_n(a;q)-(G_n(a;p))^{\frac{q_n}{p_n}\frac{P_n}{Q_n}}\}$$

$$\geqslant Q_{n-1}\{A_{n-1}(a;q)-(G_{n-1}(a;p))^{\frac{q_n}{p_n}\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}}\}.$$

L'inégalité qui sera prouvée dans le présent article contient les inégalités (1.1) et (1.2). En fait, nous allons démontrer le résultat suivant:

***Théorème* 1.** *Soient* $\lambda$ *et* $\mu$ *deux nombres réels tels que* $\lambda\mu>0$. *Dans le cas où* $\mu p_n-P_n<0$, *on a*

$$(1.3)\qquad Q_n A_n(a;q)-\lambda\frac{q_n}{p_n}P_n(G_n(a;p))^{\mu}$$

$$\geqslant Q_{n-1}A_{n-1}(a;q)-\lambda^{\frac{P_n}{P_n-\mu p_n}}\frac{q_n}{p_n}(G_{n-1}(a;p))^{\frac{\mu P_{n-1}}{P_n-\mu p_n}}(P_n{}^{\frac{\mu p_n}{P_n-\mu p_n}}-p_n\mu^{\frac{P_n}{P_n-\mu p_n}}).$$

*Dans le cas où* $\mu p_n-P_n>0$, *on a l'inégalité contraire.*

*Dans tous les deux cas l'égalité a lieu si et seulement si*

$$a_n=(\lambda\mu)^{\frac{P_n}{P_n-\mu p_n}}(G_{n-1}(a;p))^{\frac{\mu P_{n-1}}{P_n-\mu p_n}}.$$

**Démonstration.** Partons de

$$(1.4)\qquad f(a_n)=Q_nA_n(a;q)-\lambda\frac{q_n}{p_n}P_n(G_n(a;p))^{\mu},$$

$$(1.5)\qquad f'(a_n)=q_n-q_n\lambda\mu\, a_n^{\frac{\mu p_n}{P_n}-1}(G_{n-1}(a;p))^{\frac{\mu P_{n-1}}{P_n}}.$$

La fonction $f'$ a un seul zéro suivant

$$(a_n)_1=(\lambda\mu)^{\frac{P_n}{P_n-\mu p_n}}(G_{n-1}(a;p))^{\frac{\mu P_{n-1}}{P_n-\mu p_n}}.$$

Étant donné que

$$f''(a_n)=-\lambda\mu\, q_n\left(\frac{\mu p_n}{P_n}-1\right)(G_{n-1}(a;p))^{\frac{\mu P_{n-1}}{P_n}}a_n^{\frac{\mu p_n}{P_n}-2},$$

on a $f''(a_n)>0$ pour $\mu p_n-P_n<0$, et $f''(a_n)<0$ pour $\mu p_n-P_n>0$. C'est pourquoi, on obtient:

$$\min f(a_n)=f((a_n)_1)\qquad \text{pour } \mu p_n-P_n<0,$$

$$\max f(a_n)=f((a_n)_1)\qquad \text{pour } \mu p_n-P_n>0,$$

avec

$$f((a_n)_1)=Q_{n-1}A_{n-1}(a;q)-\frac{q_n}{p_n}\lambda^{\frac{P_n}{P_n-\mu p_n}}(G_{n-1}(a;p))^{\frac{\mu P_{n-1}}{P_n-\mu p_n}}(P_n\mu^{\frac{\mu p_n}{P_n-\mu p_n}}-p_n\mu^{\frac{P_n}{P_n-\mu p_n}}).$$

Ceci démontre le théorème **1**.

Si l'on pose $\mu=1$ avec $\lambda>0$, on a

$$\mu p_n - P_n = -P_{n-1} < 0$$

et alors l'inégalité (1.3) prend la forme (1.1).

Si l'on pose $\mu = \dfrac{q_n P_n}{p_n Q_n}$ et $\lambda=1$, on a

$$\mu p_n - P_n = -\frac{P_n}{Q_n} Q_{n-1} < 0$$

et alors le théorème **1** conduit à l'inégalité (1.2).

**2.** P. S. BULLEN [2] a démontré l'analogie multiplicative de l'inégalité (1.1):

$$\frac{(A_n(a;q)+\lambda)^{Q_n}}{(G_n(a;p))^{q_n P_n/p_n}} \geqslant \frac{(A_{n-1}(a;q)+\lambda\, Q_n/Q_{n-1})^{Q_{n-1}}}{(G_{n-1}(a;p))^{q_n P_{n-1}/p_n}} \qquad (\lambda>0). \tag{2.1}$$

Nous allons démontrer le théorème suivant qui contient cette inégalité.

***Théorème 2.*** *Soient $\alpha, \gamma, \beta$ des nombres réels tels que $\lambda>0$ et $\beta(\alpha-\beta p_n)>0$. Alors, pour $\alpha-\beta p_n>0$, on a*

$$\frac{(A_n(a;q)+\lambda)^{\alpha}}{(G_n(a;p))^{\beta P_n}} \geqslant \left(\frac{q_n}{\beta p_n}\right)^{\beta p_n} \left(\frac{\alpha}{Q_n}\right)^{\alpha} \left(\frac{Q_{n-1}}{\alpha-\beta p_n}\right)^{\alpha-\beta p_n} \frac{(A_{n-1}(a;q)+\lambda\, Q_n/Q_{n-1})^{\alpha-\beta p_n}}{(G_{n-1}(a;p))^{\beta P_{n-1}}}. \tag{2.2}$$

*Dans le cas où $\alpha-\beta p_n<0$, on a l'inégalité contraire.*

*Dans tous les deux cas, l'égalité a lieu si et seulement si*

$$(\alpha-\beta p_n)\, q_n a_n = \beta p_n (Q_{n-1} A_{n-1}(a;q)+\lambda Q_n).$$

**Démonstration.** En étudiant la fonction $f$, définie par

$$f(a_n) = \frac{(A_n(a;q)+\lambda)^{\alpha}}{(G_n(a;p))^{\beta P_n}} = \frac{(A_n(a;q)+\lambda)^{\alpha}}{(G_{n-1}(a;p))^{\beta P_{n-1}}}\, a_n^{-\beta p_n}, \tag{2.3}$$

nous obtenons que $f$ a un seul extremum pour

$$a_n = (a_n)_1 = \beta \frac{p_n}{q_n} \frac{Q_{n-1} A_{n-1}(a;q)+\lambda Q_n}{\alpha-\beta p_n}.$$

Dans le cas où $\alpha-\beta p_n<0$, on a

$$f(a_n) \geqslant \min f(a_n) = f((a_n)_1),$$

et dans le cas où $\alpha-\beta p_n>0$, on a

$$f(a_n) \leqslant \max f(a_n) = f((a_n)_1).$$

Puisque

$$f((a_n)_1)=\frac{(A_{n-1}(a;q)+\lambda\,Q_n/Q_{n-1})^{Q_{n-1}}}{(G_{n-1}(a;p))^{q_n P_{n-1}/p_n}},$$

le théorème **2** est ainsi démontré.

Si l'on pose $\alpha=Q_n$ et $\beta=\frac{q_n}{p_n}$, l'inégalité (2.2) conduit à (2.1).

**3.** ***Généralisation.*** Par le même procédé on pourrait obtenir des inégalités plus générales que (1.3) et (2.1). Par exemple, en partant de

$$f(a_n)=Q_n A_n(a;q)-\lambda\,G_n(a;p)^{\mu}-\nu\,G_n(a;r)^{\theta},$$

où $\lambda$, $\mu$, $\nu$, $\theta$ sont des nombres réels quelconques et $r=(r_1,\ldots,r_n)$, on obtient

$$f'(a_n)=q_n-\lambda\,\mu\frac{p_n}{P_n}a_n^{\mu\frac{p_n}{P_n}-1}G_{n-1}(a;p)^{\mu\frac{P_{n-1}}{P_n}}-\nu\,\theta\frac{r_n}{R_n}a_n^{\theta\frac{r_n}{R_n}-1}G_{n-1}(a;r)^{\theta\frac{R_{n-1}}{R_n}}.$$

avec

$$R_n=\sum_{i=1}^{n}r_i.$$

L'équation $f'(a_n)=0$ a un seul zéro si l'on a, par exemple,

$$\theta\frac{r_n}{R_n}=\mu\frac{p_n}{P_n},$$

et pour cette valeur de $a_n$ la fonction $f$ atteint son extremum. Ce fait conduit à une inégalité plus générale que (1.3).

## RÉFÉRENCES

[1] D. S. Mitrinović et P. M. Vasić, *Une classe d'inégalités où interviennent les moyennes d'ordre arbitraire*, ces Publications, № **159** — № **170** (1966), 9—14.

[2] P. S. Bullen, *Some more inequalities involving the arithmetic and geometric means*, ces Publications, № **181** — № **196** (1967), 61—66.

[3] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge 1952, p. 61, problème 60.