PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 210 — № 228 (1968)

214. EVANESCENCE DE L'ARGUMENT CANTORIEN POUR LE CARDINAL DES NOMBRES DYADIQUES*

A. Sade

Un des théorèmes fondamentaux de la théorie des ensembles est la non dénombrabilité de l'ensemble des nombres dyadiques de l'intervalle $[0-1]$. Tout nombre dyadique de cet intervalle peut être représenté par la notation $0, abcd\ldots$ où les chiffres $a, b, c\ldots$ sont égaux à 0 ou à 1. Si $N=\{1, 2, 3, \ldots\}$ est l'ensemble des entiers naturels, la démonstration consiste à faire voir qu'aucune application biunivoque de N dans $[0-1]$ ne peut être bijective.

(i). Les ensembles $[0-1]$ et $E=[0-1[=[0-1]-1$ ont même nombre cardinal, puisque le premier diffère du second par le seul élément 1. Ainsi $E=[0-1[$ et $[0-1]$ seront en même temps dénombrables ou non dénombrables et l'on peut raisonner sur E. A des différences de style près, l'argument suivant se retrouve dans la plupart des exposés.

(ij) Soit $f=N\to E$ une application $1-1$ de N dans E, soit $f(x)$ l'image du nombre x de N par f dans E et $g(x, n)$ le n^ième^ chiffre de $f(x)$; $g=0$ ou 1. (1)

Soit $B=\{x\in N \mid g(x, x)=0\}$. (2)

Soit $C=\{x\in N \mid g(x, x)=1\}$. (3)

On a $B\cap C=\emptyset \wedge B+C=N$. (4)

Soit D le nombre dyadique $0, pqr\ldots$ dont le chiffre de rang y est 1 si $y\in B$ et 0 si $y\in C$. (5).

Alors, par f, le nombre D ne peut jamais avoir de pré-image dans N. Car sinon, $(\exists z\in N,\ f(z)=D)$, z serait dans B ou dans C. Si $z\in B$, d'après (2), $g(z, z)=0$; d'après (5), $g(z, z)=0\Rightarrow z\in C$. Mais z ne peut être dans B et dans C, d'après (4), donc $z\notin B$. Si au contraire $z\in C$, d'après (3), $g(z, z)=1$, donc d'après (5), $z\in B$, d'où la même contradiction. Ainsi D n'a pas de pré-image dans N, l'application f ne peut pas être bijective et

$$\text{Card }(N)\neq\text{Card }(E)=\text{Card }[0-1].$$

* Présenté le 4 avril 1968 par D. S. Mitrinović.

(ijj). Ce raisonnement suppose tacitement que C n'est pas vide, car si $C=\emptyset$, alors B comprend N tout entier, d'après (5) tous les chiffres de D sont égaux à 1 et $D=0{,}11111\ldots=1$. Or d'après (1) ce nombre ne fait pas partie de E. On a seulement prouvé ceci: Dans toute application biunivoque de N dans E, aucun élément, x, de N n'a pour image $f(x)=1$, ce qui est un truisme puisque $1\notin E$, et certainement pas une contradiction.

Pour pouvoir conclure que f n'est jamais bijective il faudrait avoir démontré que *quelle que soit l'application f, ($f=N\to E$) il y a toujours au moins un élément x de N pour lequel $g(x,x)=1$, c'est-à-dire que $C\neq\emptyset$.*

Or il est facile de prouver, au contraire, que si f est une application $1-1$ de N sur E, C sera nécessairement vide. Car, f étant supposée bijective, si le nombre D, défini comme plus haut, appartenait à l'intervale semi-ouvert $[0-1[$, il existerait par hypothèse un $u\in N$, tel que $f(u)=D$. Or, ou bien $g(u,u)=0$, ou bien $g(u,u)=1$.

Si $g(u,u)=0$, d'après (5), $u\in C$ et d'après (2), $u\in B$, donc $u\in B\cap C$ et d'après (4), $u\in\emptyset$.

Si $g(u,u)=1$, d'après (5), $u\in B$, et d'après (3), $u\in C$, donc encore $u\in B\cap C=\emptyset$.

Dans les deux cas on aboutit à la contradiction $\sim\emptyset=\emptyset$. Ainsi, $D=0,pqr\ldots$ n'étant pas dans l'intervalle $[0-1[$ est égal à $0{,}111111\ldots$ ou 1; $g(x,x)$ est identiquement égal à 0, $B=N, C=\emptyset$.

Si f est injective, le problème reste ouvert.

D'autre part, l'auteur de la présente note a défini un processus illimité de rangement des nombres dyadiques pour lequel la fonction $g(x,x)$ est toujours égale à 0 et dont le détail sera publié ultérieurement.

Adresse de l'auteur:

364, Cours de la République
Pertuis (Vaucluse), France