PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA—SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 210 — № 228 (1968)

210. O JEDNOJ KVADRATNOJ FUNKCIONALNOJ JEDNAČINI

D. S. Mitrinović i *P. M. Vasić*

(Primljeno 5. januara 1966.)

Neka je data funkcionalna jednačina

$$Af^2(x, y)+2Bf(x, y)f(y, x)+Cf^2(y, x)+2Df(x, y)+2Ef(y, x)+F=0, \tag{1}$$

gde su A, B, C, D, E, F dati realni brojevi i f nepoznata realna funkcija realnih promenljivih x i y.

Ako u (1) permutujemo x i y, dobijamo

$$Af^2(y, x)+2Df(x, y)f(y, x)+Cf^2(x, y)+2Df(y, x)+2Ef(x, y)+F=0. \tag{2}$$

Oduzimanjem odgovarajućih strana jednačina (1) i (2), nalazimo

$$(f(x, y)-f(y, x))((A-C)(f(x, y)+f(y, x))+2(D-E))=0. \tag{3}$$

Ako stavimo

$$f(x, y)=M(x, y)+N(x, y). \tag{4}$$

gde je $M(x, y)=M(y, x)$ i $N(x, y)=-N(y, x)$, iz (3) sleduje

$$N(x, y)((A-C)M(x, y)+D-E)=0. \tag{5}$$

1. $\underline{A=C,\ D=E,\ A\neq -B.}$ Uslov (5) je u ovom slučaju identično ispunjen. Ako stavimo

$$f(x, y)=-\frac{D}{A+B}+g(x, y), \tag{6}$$

gde je g nova nepoznata funkcija, iz (1) sleduje

$$A(g^2(x, y)+g^2(y, x))+2Bg(x, y)g(y, x)=-\frac{F(A+B)+2D^2}{A+B}, \tag{7}$$

tj.

$$(A-B)(g(y, x)-g(x, y))^2+(A+B)(g(y, x)+g(x, y))^2=2F', \tag{8}$$

gde je

$$F'=-\frac{F(A+B)+2D^2}{A+B}. \tag{9}$$

Na kraju, ako stavimo

$$g(x, y) = M'(x, y) + N'(x, y), \tag{10}$$

gde su M' i N' simetrični odnosno asimetrični deo funkcije g (tj. $M'(x, y) = M'(y, x)$ i $N'(x, y) = -N'(y, x)$), jednačina (8) postaje

$$2(A+B)M'^2(x, y) + 2(A-B)N'^2(x, y) = F'. \tag{11}$$

1.1. $A = C,\ D = E,\ A \neq -B,\ (A-B \geqslant 0 \wedge A+B > 0 \wedge F' < 0) \vee (A-B \leqslant 0 \wedge A+B < 0 \wedge F' > 0)$. Pod ovim uslovima (11) ne može da važi ni za jedno realno M' i N', pa stoga (1) nema rešenja.

1.2. $A = C,\ D = E,\ A \neq -B,\ (A-B \geqslant 0 \wedge A+B > 0 \wedge F' \geqslant 0) \vee (A-B \leqslant 0 \wedge A+B < 0 \wedge F' \leqslant 0) \vee (A-B)(A+B) < 0)$. Neka skupovi S_1 i S_2 čine jednu particiju skupa R^2, gde je R skup realnih brojeva. Definišimo funkciju e na sledeći način:

$$e(x, y) = 1 \quad ((x, y) \in S_1), \tag{12}$$
$$ = 0 \quad ((x, y) \in S_2).$$

Tada iz (11) dobijamo

$$M'(x, y) = (1 - 2e(x, y)) \left(\frac{F' - 2(A-B)N'^2(x, y)}{2(A+B)}\right)^{1/2}.$$

Prema tome, u ovom slučaju opšte rešenje funkcionalne jednačine (1) je funkcija f, data sa

$$f(x, y) = -\frac{D}{A+B} + (1 - 2e(x, y)) \left(\frac{F' - 2(A-B)N'^2(x, y)}{2(A+B)}\right)^{1/2}, \tag{13}$$

gde je N' proizvoljna asimetrična funkcija takva da je izraz pod korenom uvek nenegativan, e funkcija definisana pomoću (12) i S_1 i S_2 dva skupa koji čine particiju skupa R^2 takvi da je svaki od njih ponaosob simetričan u odnosu na pravu $y = x$.

2. $A = C,\ D = E,\ A = -B.$ U ovom slučaju jednačinu (1) možemo predstaviti u obliku

$$A(f(x, y) - f(y, x))^2 + 2D(f(x, y) + f(y, x)) + F = 0, \tag{14}$$

tj. na osnovu (4) u obliku

$$4AN^2(x, y) + 4DM(x, y) + F = 0. \tag{15}$$

2.1. $A = C,\ D = E,\ A = -B,\ D \neq 0.$ Tada iz (15) dobijamo

$$M(x, y) = -\frac{4AN^2(x, y) + F}{4D}, \tag{16}$$

pa je opšte rešenje jednačine (1)

$$f(x, y) = N(x, y) - \frac{4AN^2(x, y) + F}{4D}, \tag{17}$$

gde je N proizvoljna asimetrična funkcija.

2.2. $A = C,\ D = E,\ A = -B,\ D = 0,\ AF < 0.$ Iz (15) nalazimo

$$N(x, y) = (1 - 2e(x, y))\left(-\frac{F}{4A}\right)^{1/2}, \tag{18}$$

gde je funkcija e definisana pomoću formula (12). Kako mora da važi jednakost $N(x, y) = -N(y, x)$, na osnovu (18) zaključujemo da skupovi S_1 i S_2 moraju biti simetrični u odnosu na pravu $y = x$.

Dakle, u ovom slučaju, opšte rešenje funkcionalne jednačine (1) je funkcija f, data sa

$$f(x, y) = M(x, y) + (1 - 2e(x, y))\left(-\frac{F}{4A}\right)^{1/2}, \tag{19}$$

gde su: M proizvoljna simetrična funkcija, e funkcija definisana pomoću formule (12) i S_1 i S_2 skupovi koji čine jednu particiju skupa R^2 a koji su simetrični u odnosu na pravu $y = x$.

2.3. $A = C,\ D = E = 0,\ A = -B,\ A \neq 0,\ F \neq 0,\ AF > 0.$ Iz (15) izlazi da tada jednačina (1) nema rešenja.

2.4. $A = C,\ D = E = 0,\ A = -B,\ A \neq 0,\ F = 0.$ Rešenje jednačine (1) je

$$f(x, y) = M(x, y), \tag{20}$$

gde je M proizvoijna simetrična funkcija.

2.5. $A = B = C = D = E = 0,\ F \neq 0.$ Jednačina (1) nema rešenja.

3. $A = C,\ D \neq E.$ Iz uslova (5) dobijamo da je $N(x, y) = 0$, pa je $f(x, y) = M(x, y)$, gde je M simetrična funkcija. Zamenom u (1) nalazimo da funkcija M mora da zadovoljava jednačinu

$$2(A + B)M^2(x, y) + 2(D + E)M(x, y) + F = 0\,. \tag{21}$$

3.1. $A = C,\ D \neq E,\ A = -B,\ D = -E,\ F \neq 0.$ Jednačina (1) nema rešenja.

3.2. $A = C,\ D \neq E,\ A = -B,\ D = -E,\ F = 0.$ Rešenje jednačine (1) je funkcija (20).

3.3. $A = C,\ D \neq E,\ A = -B,\ D \neq -E.$ Iz (21) dobijamo

$$M(x, y) = -\frac{F}{2(D + E)}, \tag{22}$$

pa je opšte rešenje funkcionalne jednačine (1) konstanta:

$$f(x, y) = -\frac{F}{2(D + E)}. \tag{23}$$

3.4. $A=C,\ D\neq E,\ A\neq -B,\ (D+E)^2-2F(A+B)\geqslant 0$. Iz (21) nalazimo da funkcija M, tj. funkcija f, ima oblik

$$f(x, y)=\alpha e(x, y)+\beta(1-e(x, y)), \tag{24}$$

gde su α i β koreni kvadratne jednačine

$$2(A+B)z^2+2(D+E)z+F=0; \tag{25}$$

funkcija e definisana je formulom (12), dok je skup S_1, zbog uslova $M(x, y)=M(y, x)$, simetričan u odnosu na pravu $y=x$. Istu osobinu ima, naravno, i skup S_2.

3.5. $A=C,\ D\neq E,\ A\neq -B,\ (D+E)^2-2F(A+B)<0$. Tada ne postoji ni jedna realna funkcija M koja zadovoljava jednačinu (21), pa stoga funkcionalna jednačina (1) nema u ovom slučaju rešenja.

4. $A\neq C$. Neka skupovi S_1, S_2, S_3 čine jednu particiju skupa R^2. Definisaćemo funkciju ε na sledeći način

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, y) &= -1 && ((x, y)\in S_1),\\ &= 0 && ((x, y)\in S_2),\\ &= 1 && ((x, y)\in S_3). \end{aligned} \tag{26}$$

Na osnovu (5) funkcija f mora biti oblika

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2}\varepsilon(x, y)(\varepsilon(x, y)-1)N(x, y)\\ &\quad+(1-\varepsilon^2(x, y))M(x, y)+\varepsilon^2(x, y)\frac{E-D}{A-C}. \end{aligned} \tag{27}$$

Funkciju (27) možemo predstaviti u obliku

$$\begin{aligned} f(x, y) &= M(x, y) && ((x, y)\in S_1),\\ &= N(x, y)+\frac{E-D}{A-C} && ((x, y)\in S_2),\\ &= \frac{E-D}{A-C} && ((x, y)\in S_3). \end{aligned} \tag{28}$$

Ova funkcija mora da bude rešenje jednačine (1) za proizvoljne skupove S_1, S_2, S_3. Prirodno, odavde sleduje da skupovi S_1, S_2, S_3 moraju, svaki ponaosob, da budu simetrični u odnosu na pravu $y=x$.

Stavljajući u (28) $S_2=S_3=\emptyset$ i zamenom u (1), dobijamo uslov

$$(A-2B+C)N^2(x, y)+\left(\frac{E-D}{A-C}\right)^2(A+2B+C)+2\frac{E^2-D^2}{A-C}+F=0. \tag{29}$$

Iz (28) i (1), za $S_1=S_3=\emptyset$, dobijamo

$$(A+2B+C)M^2(x, y)+2(D+E)M(x, y)+F=0. \tag{30}$$

Najzad, za $S_1=S_2=\emptyset$, iz (28) i (1) nalazimo

$$(31)\qquad \left(\frac{E-D}{A-C}\right)^2 (A+2B+C)+2\frac{E^2-D^2}{A-C}+F=0.$$

Kratkoće radi, u daljem tekstu, koristićemo se oznakom

$$(32)\qquad \lambda=\left(\frac{E-D}{A-C}\right)^2 (A+2B+C)+2\frac{E^2-D^2}{A-C}+F.$$

4.1. $A\neq C,\ \lambda=0,\ A-2B+C=0,\ B\neq 0,\ (D+E)^2-4BF\geqslant 0.$ Tada su uslovi (29) i (31) ispunjeni. Neka skupovi S_2' i S_2'' čine jednu particiju skupa S_2 i neka je funkcija e_2 definisana sa

$$(33)\qquad \begin{aligned} e_2(x,y)&=1 \qquad ((x,y)\in S_2'),\\ &=0 \qquad ((x,y)\in S_2''). \end{aligned}$$

Tada iz (32) nalazimo

$$(34)\qquad M(x,y)=\alpha e_2(x,y)+\beta(1-e_2(x,y)),$$

gde su α i β koreni jednačine

$$(35)\qquad 4Bz^2+2(D+E)z+F=0.$$

pa je opšte rešenje jednačine (1)

$$(36)\qquad \begin{aligned} f(x,y)=&\frac{1}{2}\varepsilon(x,y)(\varepsilon(x,y)-1)N(x,y)\\ &+(1-\varepsilon^2(x,y))(\alpha e_2(x,y)+\beta(1-e_2(x,y)))+\varepsilon^2(x,y)\frac{E-D}{A-C}. \end{aligned}$$

Skupovi S_2' i S_2'' moraju takođe biti svaki ponaosob simetrični u odnosu na pravu $y=x$.

4.2. $A\neq C,\ \lambda=0,\ A-2B+C=0,\ B\neq 0,\ (D+E)^2-4BF<0.$ U ovom slučaju su uslovi (29) i (31) ispunjeni. Međutim, ne postoji realna funkcija M takva da važi (30). Stoga treba uzeti $S_2=\emptyset$. Tada se funkcija f može predstaviti u nešto jednostavnijem obliku nego što je to formula (36) i to na sledeći način:

$$(37)\qquad f(x,y)=e(x,y)N(x,y)+(1-e(x,y))\frac{E-D}{A-C},$$

gde je funkcija e definisana formulom (12). S_1 i S_2 su proizvoljni skupovi koji čine jednu particiju skupa R^2 i koji su svaki posebno simetrični u odnosu na pravu $y=x$.

4.3. $A\neq C,\ \lambda=0,\ A-2B+C=0,\ B=0,\ D\neq -E.$ Uslovi (29) i (31) su ispunjeni, pa iz (30) nalazimo

$$(38)\qquad M(x,y)=\frac{-F}{2(D+E)}.$$

Prema tome, opšte rešenje jednačine (1) je

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \varepsilon(x, y)(\varepsilon(x, y) - 1) N(x, y) + (1 - \varepsilon^2(x, y)) \frac{-F}{2(D+E)} + \varepsilon^2(x, y) \frac{E-D}{A-C}, \tag{39}$$

gde je N proizvoljna asimetrična funkcija, ε funkcija definisana sa (26).

4.4. $A \neq C,\ \lambda = 0,\ A - 2B + C = 0,\ B = 0,\ D = -E.$ Tada je i $F = 0$. U ovom slučaju su sva tri uslova: (29), (30), (31) ispunjena, pa je opšte rešenje jednačine (1) dato formulom (27), gde su M i N proizvoljne funkcije koje zadovoljavaju uslove $M(x, y) = M(y, x)$ i $N(x, y) = -N(y, x)$.

4.5. $A \neq C,\ \lambda = 0,\ A - 2B + C \neq 0.$ Za ove vrednosti koeficijenata uslov (29) važi ako i samo ako je $A = 0$, pa stoga treba uzeti $S_1 = \emptyset$.

4.5.1. $A \neq C,\ \lambda = 0,\ A - 2B + C \neq 0,\ A + 2B + C \neq 0,\ (D+E)^2 - 4BF \geqslant 0.$ Neka je S_1, S_2 jedna particija skupa R^2 i S_2', S_2'' jedna particija skupa S_2. Tada opšte rešenje jednačine (1) možemo predstaviti na sledeći način:

$$f(x, y) = (1 - e(x, y))(\alpha e_2(x, y) + \beta(1 - e_2(x, y))) + e(x, y) \frac{E-D}{A-C}, \tag{40}$$

gde su α i β koreni kvadratne jednačine (35).

4.5.2. $A \neq C,\ \lambda = 0,\ A - 2B + C \neq 0,\ A + 2B + C \neq 0,\ (D+E)^2 - 4BF < 0.$ U ovom slučaju ne postoji funkcija M koja zadovoljava uslov (30), pa treba uzeti da je i $S_2 = \emptyset$. Stoga je opšte rešenje posmatrane jednačine dato sa

$$f(x, y) = \frac{E-D}{A-C}. \tag{41}$$

4.5.3. $A \neq C,\ \lambda = 0,\ A - 2B + C \neq 0,\ A + 2B + C = 0,\ D \neq -E.$ Iz uslova (30) dobijamo da je M oblika (38). Dakle, opšte rešenje jednačine (1) je

$$f(x, y) = e(x, y) \frac{E-D}{A-C} + (1 - e(x, y)) \frac{-F}{2(D+E)}. \tag{42}$$

4.5.4. $A \neq C,\ \lambda = 0,\ A - 2B + C \neq 0,\ A + 2B + C = 0,\ D = -E.$ Tada je takođe i $F = 0$, pa su uslovi (30) i (31) ispunjeni. Stoga je opšte rešenje funkcionalne jednačine (1) funkcija f, data sa

$$f(x, y) = (1 - e(x, y)) M(x, y) + e(x, y) \frac{E-D}{A-C}, \tag{43}$$

gde je e dato sa (12) a M je proizvoljna simetrična funkcija.

4.6. $A \neq C,\ \lambda \neq 0.$ U ovom slučaju moramo uzeti $S_3 = \emptyset$ jer uslov (31) ne važi.

4.6.1. $A \neq C,\ \lambda \neq 0,\ A - 2B + C = 0,\ A + 2B + C \neq 0,\ (D+E)^2 - 4BF \geqslant 0.$ Kako uslov (29) ne može da bude ispunjen ni za jednu vrednost funkcije N, moramo uzeti takođe da je $S_1 = \emptyset$. Stoga je opšte rešenje funkcionalne jednačine (1)

$$f(x, y) = \alpha e(x, y) + \beta(1 - e(x, y)), \tag{44}$$

gde e ima značenje kao i ranije i α, β su koreni kvadratne jednačine (35).

4.6.2. $A \neq C$, $\lambda \neq 0$, $A-2B+C=0$, $A+2B+C \neq 0$, $(D+E)^2-4BF<0$. U ovom slučaju ni jedan od uslova (29), (30), (31) ne može biti ispunjen, pa funkcionalna jednačina (1) nema rešenja.

4.6.3. $A \neq C$, $\lambda \neq 0$, $A-2B+C=0$, $A+2B+C=0$, $D \neq -E$. I sada moramo uzeti da je $S_1=\emptyset$. Kako iz (32) sleduje da je M oblika (38), opšte rešenje funkcionalne jednačine (1) je

$$f(x, y)=\frac{-F}{2(D+E)}. \tag{45}$$

4.6.4. $A \neq C$, $\lambda \neq 0$, $A-2B+C=0$, $A+2B+C=0$, $D=-E$. Tada je i $F=0$, pa je (30) identično ispunjeno. Prema tome, opšte rešenje funkcionalne jednačine (1) je (20).

4.6.5. $A \neq C$, $\lambda \neq 0$, $A-2B+C \neq 0$, $A+2B+C \neq 0$, $\lambda(A-2B+C)<0$, $(D+E)^2-$ $-4BF \geqslant 0$. Neka skupovi S_1' i S_1'' čine jednu particiju skupa S_1 i neka je e_1 sledeća funkcija:

$$\begin{aligned} e_1(x, y) &= 1 \qquad ((x, y) \in S_1'), \\ &= 0 \qquad ((x, y) \in S_1''). \end{aligned} \tag{46}$$

Neka su dalje skupovi S_2' i S_2'' jedna particija skupa S_2 i neka je funkcija e_2 definisana sa (33). Tada na osnovu (29) i (30) opšte rešenje jednačine (1) glasi:

$$\begin{aligned} f(x, y) = {} & e(x, y)\left[1-2e_1(x, y)\left(\frac{-\lambda}{A-2B+C}\right)^{1/2}\right] \\ & + (1-e(x, y))(\alpha e_2(x, y)+\beta(1-e_2(x, y))), \end{aligned} \tag{47}$$

gde su α i β koreni jednačine (35).

4.6.6. $A \neq C$, $\lambda \neq 0$, $A-2B+C \neq 0$, $A+2B+C \neq 0$, $\lambda(A-2B+C)<0$, $(D+E)^2-$ $-4BF<0$. U ovom slučaju moramo uzeti da je $S_2=\emptyset$, pa je opšte rešenje

$$f(x, y)=(1-2e_1(x, y))\left(\frac{-\lambda}{A-2B+C}\right)^{1/2}, \tag{48}$$

gde je e_1 definisano sa (47), a skupovi S_1' i S_1'' su simetrični prema pravoj $y=x$.

4.6.7. $A \neq C$, $\lambda \neq 0$, $A-2B+C \neq 0$, $A+2B+C \neq 0$, $\lambda(A-2B+C)>0$, $(D+E)^2-$ $-4BF \geqslant 0$. U ovom slučaju mora da je $S_1=\emptyset$, pa je stoga opšte rešenje jednačine (1) funkcija (45).

4.6.8. $A \neq C$, $\lambda \neq 0$, $A-2B+C \neq 0$, $A+2B+C \neq 0$, $\lambda(A-2B+C)>0$, $(D+E)^2-$ $-4BF<0$. Sada mora biti $S_1=S_2=S_3=\emptyset$, pa stoga jednačina (1) nema rešenja.

4.6.9. $A \neq C$, $\lambda \neq 0$, $A-2B+C \neq 0$, $A+2B+C=0$, $\lambda(A-2B+C)<0$, $D+E \neq 0$. Iz (30) dobijamo da je M oblika (38), pa je opšte rešenje funkcionalne jednačine (1) sledeća funkcija:

$$f(x, y)=e(x, y)\left[1-2e_1(x, y)\left(\frac{-\lambda}{A-2B+C}\right)^{1/2}\right]+(1-e(x, y))\frac{-F}{2(D+E)}. \tag{49}$$

4.6.10. $A \neq C, \lambda \neq 0, A-2B+C \neq 0, \lambda(A-2B+C)>0, A+2B+C=0, D+E \neq 0.$ Uslov (29) ne može da važi ni za jednu realnu funkciju N, pa stoga treba staviti $S_1=\varnothing$. Prema tome, opšte rešenje funkcionalne jednačine (1) je funkcija (45).

4.6.11. $A \neq C, \lambda \neq 0, A-2B+C \neq 0, \lambda(A-2B+C)<0, A+2B+C=0, D+E=0,$ $F \neq 0$. Uslov (30) ne može da važi pa moramo staviti $S_2=\varnothing$. Stoga je funkcija (49) opšte rešenje funkcionalne jednačine (1).

4.6.12. $A \neq C, \lambda \neq 0, \lambda(A-2B+C)>0, A+2B+C=0, D+E=0, F \neq 0$. U ovom slučaju jednačina (1) nema uopšte rešenja.

Pregled rešenja jednačine (1) det je u tabeli koja se nalazi u rezimeu ovoga članka. Pored oznaka koje su ranije korišćene uvedena je i oznaka $\Delta=(D+E)^2-4BF$.

Résumé

SUR UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE DU SECOND DEGRÉ

D. S. Mitrinović et *P. M. Vasić*

L'objet de cet article est l'équation fonctionnelle suivante

$$(*) \quad Af^2(x, y)+2Bf(x, y)f(y, x)+Cf^2(y, x)+2Df(x, y)+2Ef(y, x)+F=0,$$

où les coefficients A, B, C, D, E, F désignent des nombres réels donnés et f une fonction réelle des variables réelles x et y.

Soient:

$$F'=-\frac{F(A+B)+2D^2}{A+B} \quad (A \neq -B), \quad \Delta=(D+E)^2-4BF,$$

$$\lambda=\left(\frac{E-D}{A-C}\right)^2(A+2B+C)+2\frac{E^2-D^2}{A-C}+F \quad (A \neq C).$$

Par M et M' sont désignées des fonctions symétriques réelles quelconques et par N et N' des fonctions asymétriques réelles quelconques, à savoir

$$M(x, y)=M(y, x), \quad N(x, y)=-N(y, x), \quad \text{etc.}$$

La fonction e intervenant dans les formules (13), (19), (37), (40), (42), (43), (44), (47) et (49) est définie par (12), S_1 et S_2 indiquent deux ensembles arbitraires présentant une partition de l'ensemble R^2 (R, ensemble des nombers réels), et étant tels que chacun d'eux soit séparément symétrique par rapport à la droite $y=x$.

La fonction ε paraissant dans les formules (27), (36) et (39) est définie par (26). Les ensembles S_1, S_2, S_3 sont arbitraires, faisant une partition de l'ensemble R^2, chacun de ces trois ensembles étant séparément symétrique par rapport à la droite $y=x$.

Les fonctions e_1 et e_2 entrant dans les formules (36), (40), (47), (48) et (49) sont définies par (46) et (33) respectivement. Les ensembles S_1 et S_2 y intervenant font une partition de l'ensemble R^2, tandis que les ensembles S_1' et S_1'' font une partition de S_1 et les ensembles S_2' et S_2'' une partition de S_2.

Par α et β sont indiquées dans (24) les racines de l'équation (25), et dans (36) et (44) les racines de (35).

Les notations indiquées plus haut étant admises, la solution générale de l'équation fonctionnelle (*) est donnée dans la table suivante:

Cas possibles				Solution
$A=C$	$D=E$	$A\neq -B$	$A-B\geqslant 0,\ A+B>0,\ F'<0$	sans solution
			$A-B\leqslant 0,\ A+B<0,\ F'>0$	sans solution
			$A-B\geqslant 0,\ A+B>0,\ F'\geqslant 0$	(13)
			$A-B\leqslant 0,\ A+B<0,\ F'\leqslant 0$	(13)
			$(A-B)\,(A+B)<0$	(13)
		$A=-B$	$D\neq 0$	(17)
			$D=0,\ AF<0$	(19)
			$D=0,\ AF>0$	sans solution
			$D=0,\ A\neq 0,\ F=0$	(20)
			$D=0,\ A=0,\ F\neq 0$	sans solution
	$D\neq E$		$A=-B,\ D=-E,\ F\neq 0$	sans solution
			$A=-B,\ D=-E,\ F=0$	(20)
			$A=-B,\ D\neq -E$	(23)
			$A\neq -B,\ \Delta\geqslant 2\,F\,(A-B)$	(24)
			$A\neq -B,\ \Delta<2\,F\,(A-B)$	sans solution
$A\neq C$	$\lambda=0$		$A-2\,B+C=0,\ B\neq 0,\ \Delta\geqslant 0$	(36)
			$A-2\,B+C=0\ \ B\neq 0,\ \Delta\leqslant 0$	(37)
			$A-2\,B+C=0,\ B=0,\ D=-E$	(39)
			$A-2\,B+C=0,\ B=0,\ D=-E$	(27)
			$A-2\,B+C\neq 0,\ A+2\,B+C\neq 0,\ \Delta\geqslant 0$	(40)
			$A-2\,B+C\neq 0,\ A+2\,B+C\neq 0,\ \Delta<0$	(41)
			$A-2\,B+C\neq 0,\ A+2\,B+C=0,\ D\neq -E$	(42)
			$A-2\,B+C\neq 0,\ A+2\,B+C=0,\ D=-E$	(43)
	$\lambda\neq 0$		$A-2\,B+C=0,\ A+2\,B+C\neq 0,\ \Delta\geqslant 0$	(44)
			$A-2\,B+C=0,\ A+2\,B+C\neq 0,\ \Delta<0$	sans solution
			$A-2\,B+C=0,\ A+2\,B+C=0,\ D\neq -E$	(45)
			$A-2\,B+C=0,\ A+2\,B+C=0,\ D=-E$	(20)
			$\lambda\,(A-2\,B+C)<0,\ A+2\,B+C\neq 0,\ \Delta\geqslant 0$	(47)
			$\lambda\,(A-2\,B+C)<0,\ A+2\,B+C\neq 0,\ \Delta<0$	(48)
			$\lambda\,(A-2\,B+C)>0,\ A+2\,B+C\neq 0,\ \Delta\geqslant 0$	(45)
			$\lambda\,(A-2\,B+C)>0,\ A+2\,B+C\neq 0,\ \Delta<0$	sans solution
			$\lambda\,(A-2\,B+C)<0,\ A+2\,B+C=0,\ D\neq -E$	(49)
			$\lambda\,(A-2\,B+C)>0,\ A+2\,B+C=0,\ D\neq -E$	(45)
			$\lambda\,(A-2\,B+C)<0,\ A+2\,B+C=0,\ D=-E,\ F\neq 0$	(49)
			$\lambda\,(A-2\,B+C)>0,\ A+2\,B+C=0,\ D=-E,\ F\neq 0$	sans solution