

**О КОРНЕВЫХ ГОДОГРАФАХ НЕЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ  
АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ\***

*А. И. Кузнецов\*\**

Рассматриваются способы построения корневых годографов нелинейных импульсных автоматических систем, динамика которых описывается алгебраическими уравнениями с комплексными коэффициентами. Для построения корневых годографов этих систем могут быть применены ранее разработанные методы конформных преобразований.

Проблема анализа и синтеза нелинейных автоматических систем (НИАС) продолжает оставаться актуальной. В теории нелинейных непрерывных систем получили распространение, в частности, методы, основанные на частотных критериях устойчивости нелинейных систем В. М. Попова. Полученные в этой области результаты позволили в дальнейшем разработать методы анализа и синтеза нелинейных непрерывных систем с использованием асимптотических логарифмических характеристик [1]. Аналогичные критерии устойчивости были выведены Я. З. Цыпкиным для НИАС [2]. Однако дальнейшее распространение этих частотных методов, аналогичных применяемым в теории линейных и нелинейных непрерывных систем, и основанных на использовании годографов Найквиста и диаграмм Боде, наталкивается на значительные трудности, очевидные уже в применении этих методов к анализу нелинейных непрерывных систем и которые еще более усугубляются при применении их к импульсным системам. Эти трудности сводятся главным образом к тому, что построение годографов Найквиста и диаграмм Боде при ограничениях, накладываемых на класс систем, требует значительных и к тому же приближенных расчетов, не гарантирующих однако достоверных результатов, трудно поддающихся оценке.

Тем не менее можно надеяться, что путь к анализу и синтезу НИАС может быть открыт после разработки алгебраических методов анализа и синтеза нелинейных непрерывных и импульсных систем, разработанных в последнее время М. Стоичем [3].

\* Статья предложена для опубликования М. Ракичем, 27. 9. 1967. г.

\*\* Анатолий Иванович Кузнецов сотрудник Московского Энергетического института (МЕИ), Москва, СССР.

Проблема анализа поведения системы автоматического управления в этом случае сводится к анализу алгебраических уравнений, аналогичных уравнениям линейных систем. В теории же линейных систем, как известно, одним из наиболее полных, гибких и эффективных является метод корневого годографа.

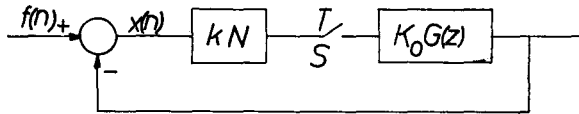


Рис. 1. Структурная схема системы

Как показано в [3] НИАС может быть представлена структурной схемой, изображенной на рис. 1, и описана алгебраическим уравнением с комплексными коэффициентами

$$(1) \quad kNK_0G^*(z) + 1 = 0.$$

Блок  $kN$  является линейным комплексным эквивалентом нелинейного элемента, характеристика которого удовлетворяет неравенству

$$(2) \quad r < \frac{\Phi[x(n)]}{x(n)} < k$$

при анализе устойчивости положения равновесия, или неравенству

$$r + \varepsilon' < \frac{d\Phi[x(n)]}{dx(n)} < k - \varepsilon'$$

при оценке устойчивости процесса, и удовлетворяет также другим обычным условиям [2]. Введем обозначение

$$(3) \quad B = \frac{r}{k}.$$

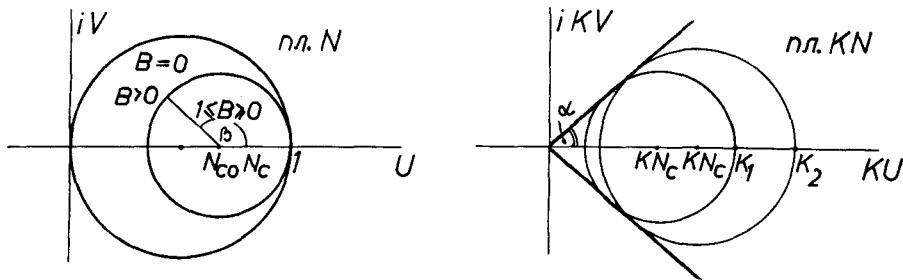


Рис. 2. (а)  $N$ -окружности, (б)  $N$ -окружности в плоскости  $KN$

$N$ -комплексная функция, удовлетворяющая уравнению окружности рис. 2

$$(4) \quad N = N_c + \rho e^{i\beta} = U + iV = U + i\sqrt{\rho^2 - (U - N_c)^2},$$

где

$$(5) \quad V^2 = \rho^2 - (U - N_c)^2,$$

причем параметры окружности определяются параметрами нелинейного элемента следующим образом

$$(6) \quad N_c = \frac{1+B}{2}, \quad \rho = \frac{1-B}{2}$$

$$(7) \quad K_0 G^*(z) = K_0 \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{\Psi_m^*(z)}{\Phi_n(z)} \cdot K_0$$

-передаточная функция линейной непрерывной части системы, являющейся рациональной функцией  $z$  и имеющей конечное число полюсов и нулей, и полученная путем применения  $z$ -преобразования к  $G(s)$ .  $K_0$ -коэффициент усиления линейной части системы. Отметим сразу, что корни уравнения (1) в случае наличия скрытых колебаний не содержат всех полюсов передаточной функции замкнутой системы, что однако не бывает часто. В противном случае в модифицированном  $z$ -преобразовании выходной величины появляются дополнительные полюса.

Из выражения (7) и уравнения (1) следует, при  $K_0 k = K$ ,

$$(8) \quad \Phi_n(z) + KN \Psi_m^*(z) = 0$$

и

$$(9) \quad KN = -\frac{\Phi_n(z)}{\Psi_m^*(z)} = f(z).$$

В отличие от обычных линейных систем  $KN$  есть комплексная функция. Если рассмотреть комплексную плоскость

$$(10) \quad KN = KU + iKV$$

при  $K$  меняющимся от 0 до  $\infty$ , то получим сектор, в который вписаны  $N$  окружности, рис. 2б, при постоянном  $B$ . Изменение величины  $B$  приводит к изменению угла раствора сектора  $\alpha$ , который не может превышать  $\pm 90^\circ$ .

С общей точки зрения задача сводится к конформному отображению некоторой области плоскости  $KN$  в плоскость

$$(11) \quad z = \delta + i\omega$$

т.е.

$$z = f^{-1}(KN),$$

или

$$\delta = \delta(KN), \quad \omega = \omega(KN).$$

Насколько нам известно, в новое время на подобный подход впервые обратил внимание V. C. M. Yen [9]. REZA F. M. [4] отметил, что в более обобщенном виде проблемы, которые мы рассматриваем в рамках теории корневых годографов, активно рассматривались математиками уже в 19 веке. REZA F. M. рассматривал алгебраические полиномы с комплексными коэффициентами, отмечая, что „неважно, что подобные системы в настоящее время (1956 г.) не имеют инженерного значения.“

Записывая выражение (10) в виде:

$$(12) \quad \frac{\Psi_m(z)}{\Phi_n(z)} = -\frac{1}{KN} = \left| \frac{1}{KN} \right| e^{(1+2l)\pi-\alpha}$$

и обращаясь к рис. 2 замечаем, что конформное отображение сектора в плоскости  $z$  легко начертить, пользуясь методом построения годографов постоянных фазовых углов  $\alpha = \text{Const}$ , разработанным У. Сну [5]. Для  $\alpha = 0$  мы получим конформное отображение вещественной оси  $KU$  в плоскости  $z$ , являющееся обычным корневым годографом Теодорчика — Эванса. При изменении параметров нелинейного элемента, на пример, при уменьшении  $B$ , ветви корневого годографа будут все более отклоняться от годографа линейной системы.

На основе потенциальной аналогии, построив ортогональную сетку годографов постоянных модулей комплексных коэффициентов усиления и фазовых углов нетрудно нанести на неё по точкам фигуру, в которую отображается окружность  $N$  при некотором значении  $K$ . Отметим, в частности, что конформными отображениями окружностей занимался Максвелл [6].

Общий аналитический подход к построению обобщенных корневых годографов на основе теории конформных отображений и аналитического метода Г. А. Бендрикова и К. Ф. Теодорчика [7] развит в последнее время Г. В. Римским [8]. В этой же работе получены, в частности, аналитические выражения годографов постоянного модуля комплексного коэффициента усиления и постоянных фазовых углов.

Для нахождения отображения окружности  $KN$  в плоскость  $z$  произведем подстановку (11) в уравнение (9) и, выделив мнимую и вещественную части, запишем

$$(13) \quad E + i\omega F + KN(P + i\omega R) = 0, \text{ где}$$

$$(14) \quad E = \text{Re } \Phi_n(z) = \sum_{\mu=0}^L \sum_{j=0}^{n-2\mu} (-1)^\mu \omega^{2\mu} C_{n-j}^{2\mu} a_j \delta^{n-2\mu-j}$$

$$(15) \quad \omega F = \text{Im } \Phi_n(z) = \sum_{\mu=0}^L \sum_{j=0}^{n-2\mu-1} (-1)^\mu \omega^{2\mu+1} C_{n-j}^{2\mu+1} a_j \delta^{n-2\mu-j-1}$$

$$(16) \quad P = \text{Re } \Psi_m(z) = \sum_{\mu=0}^M \sum_{j=0}^{m-2\mu} (-1)^\mu \omega^{2\mu} C_{m-j}^{2\mu} b_j \delta^{m-2\mu-j}$$

$$(17) \quad \omega R = \text{Im } \Psi_m(z) = \sum_{\mu=0}^M \sum_{j=0}^{m-2\mu-1} (-1)^\mu \omega^{2\mu+1} C_{m-j}^{2\mu+1} b_j \delta^{m-2\mu-j-1},$$

$C_r^k$  — биномиальные коэффициенты;

$$L = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{для } n \text{ четных,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{для } n \text{ нечетных,} \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} \frac{m}{2} & \text{для } m \text{ четных,} \\ \frac{m-1}{2} & \text{для } m \text{ нечетных.} \end{cases}$$

Подставляя в (13)  $N = U + iV$  и приравнявая нулю мнимую и вещественную части получим

$$(18) \quad \begin{aligned} E - KUP - \omega KVR &= 0 \\ F + KVP + \omega KUR &= 0. \end{aligned}$$

Откуда, с учетом (5), имеем

$$(19) \quad U = -\frac{EP + \omega^2 FR}{K(P^2 + \omega^2 R^2)} = N_c \pm \sqrt{\rho^2 - \frac{\omega^2 (RE - PF)^2}{K^2 (P^2 + \omega^2 R^2)^2}}.$$

Это обычное выражение позволяет вычислять значения  $U$ , устанавливая соответствие точек в плоскости  $z$  с точками плоскости  $KN$  в области определения функций  $U$  и  $f^{-1}(KN)$ . Преобразуя равые части (19) получим полиномиальное уравнение Бендрикова-Теодорчика, определяющего искомое конформное отображение

$$(20) \quad \begin{aligned} K^2(N^2 - \rho^2)(P^2 + \omega^2 R^2)^2 + KN_c 2(P^2 + \omega^2 R^2)(EP + \omega^2 FR) \\ + (EP + \omega^2 FR)^2 + \omega^2 (RE - PF)^2 = 0. \end{aligned}$$

Выражения (19) и (20), очевидно, соответствуют выражениям, полученным Г. В. Римским, но для окружности, смещенной по вещественной оси. По уравнениям (19) и (20), куда входит  $\omega^2$ , можно построить траектории корней, отображающих окружность  $KN$ . Производя подстановку полиномиальных выражений (14—17) в уравнения (19) и (20), получим уравнения Бендрикова-Теодорчика в каноническом виде. Эти же уравнения могут быть приведены к канонической форме и путем расложения функций  $\Phi_n(z)$  и  $\Psi_m(z)$  в ряды Тейлора с конечным числом членов. Однако для более манипулятивного анализа представляется рациональным строить по возможности полную сеть конформного отображения, которая позволяет наблюдать эффект от изменения коэффициента усиления и параметра  $B$ . Наглядно эти годографы можно представить в виде обычного годографа линейной системы, на ветви которого „нанизаны“ отображения окружностей, изменяющие свою форму и масштаб при изменении  $K$ . Построение корневых годографов НИАС таким образом не встречает значительных трудностей.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] В. В. Наумов, *Исследование абсолютной устойчивости положения равновесия в нелинейных системах автоматического управления при помощи логарифмических частотных характеристик*, Автоматика и телемеханика, т. XXVI, № 4, 1965 г.  
 [2] Я. З. Цыпкин, *Абсолютная устойчивость положения равновесия и процессов в нелинейных импульсных автоматических системах*, Автоматика и телемеханика, т. XXIV, № 11, 1963 г.

[3] М. Р. Стоић, *Анализа нелинеарних система аутоматској ујављања применом алгебарских критеријума асимптотске стабилности*, Докторска дисертација. Универзитет у Београду, Електротехнички факултет, Београд 1966.

[4] F. M. REZA, *Some mathematical properties of root-loci for controls system design*, AIEE Trans., v. 75, pt. I, 1956, pp. 103—108.

[5] Y. CHU, *Synthesis of feedback control systems by phase-angle loci*, AIEE Trans., v. 71, pt. II, 1952, pp. 330—339.

[6] J. C. MAXWELL, *On the cyclide*, The quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics. 9 (1868) pp. III-126.

[7] Г. А. Бендриков, К. Ф. Теодорчик, *Траектории корней линейных автоматических систем*, „Наука“, Москва, 1964 г.

[8] Г. В. Римский, *К теории корневых траекторий систем автоматического управления*, Известия Академии наук Белорусской ССР, серия физико-технических наук, 1966, № 3, стр. 109—119.

[9] V. C. M. YEN, *The Study of Transient in Linear systems by Conformal Mapping and the Root-Locus Methods*, Trans. of ASME, 76, № 3, (1954), 349—361.

## Summary

In this paper a method of obtaining the roots of nonlinear sampled-data control systems is investigated. The dynamic of aforementioned system is described by an algebraic equations with the complex coefficients. To obtain the system root-loci one can applied up to now given methods, based upon the application of conformal mapping.