PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 205 (1967)

SUR UNE EQUATION FONCTIONNELLE LINEAIRE*

Petar M. Vasić et *Radovan R. Janić*

Dans l'article [1] nous avons résolu l'équation fonctionnelle suivante:

$$(0)\quad F(\Delta\{x_{11}, \ldots, x_{n-1,\,n-1}, x_{nn}\}, \Delta\{x_{n+1,\,1}\, x_{n+2,\,2}, \ldots, x_{2n-1,\,n-1}, x_{2n,\,n}\})$$
$$= \sum_{k=1}^{n} F(\Delta\{x_{11}, \ldots, x_{n-1,\,n-1}, x_{n+k,\,n}\}, \Delta\{x_{n+1,\,1}, \ldots, x_{n+k-1,\,k-1}, x_{nk}, x_{n+k+1,\,k+1}, \ldots, x_{2n,\,n}\}).$$

Dans cet article nous allons résoudre l'équation fonctionnelle qui généralisé l'équation (0).

Soit

$$\Delta(x_{s1}, x_{s+1,\,2}, \ldots, x_{s+\nu-2,\,\nu-1}, x_{r\nu}, x_{s+\nu,\,\nu+1}, \ldots, x_{s+n-1,\,n})$$
$$= \begin{vmatrix} x_{s1} & x_{s2} & \cdots & x_{sn} \\ x_{s+1,\,1} & x_{s+1,\,2} & & x_{s+1,\,n} \\ \vdots & & & \\ x_{s+\nu-2,\,1} & x_{s+\nu-2,\,2} & & x_{s+\nu-2,\,n} \\ x_{r1} & x_{r2} & & x_{rn} \\ x_{s+\nu,\,1} & x_{s+\nu,\,2} & & x_{s+\nu,\,n} \\ \vdots & & & \\ x_{r+n-1,\,1} & x_{r+n-1,\,2} & & x_{r+n-1,\,n} \end{vmatrix}$$

et

$$\theta_{n,\,rn+k}\, F(\Delta(x_{11}, \ldots, x_{n-1,\,n-1}, x_{nn}), \ldots, \Delta(x_{rn+1,\,1}, \ldots, x_{rn+k-1,\,k-1}, x_{rn+k,\,k}, x_{rn+k+1,\,k+1}, \ldots, x_{(r+1)n,\,n}), \ldots, \Delta(x_{(m-1)n+1,\,1}, \ldots, x_{mn,\,n}))$$
$$= \mathrm{F}(\Delta(x_{11}, \ldots, x_{u-1,\,n-1}, x_{rn+k,\,n}), \ldots, \Delta(x_{rn+1,\,1}, \ldots, x_{rn+k-1,\,k-1}, x_{nk}, x_{rn+k+1,\,k+1}, \ldots, x_{(r+1)n,\,n}), \ldots, \Delta(x_{(m-1)n+1,\,1}, \ldots, x_{mn,\,n})).$$

---

* Présenté le 1 novembre 1967 par D. S. Mitrinović.

Toutes les fonctions qu'on considère dans cet article sont des fonctions réelles des variables réelles.

Nous allons considerer l'équation fonctionnelle suivante:

$$(1)\quad (m-1)\,F(\Delta(x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{n-1,\,n-1}, x_{nn}), \ldots, \Delta(x_{(m-1)n+1,\,1}, \ldots, x_{mn,\,n}))$$

$$= \sum_{\nu=n+1}^{mn} \theta_{n,\,\nu}\, F(\Delta(x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{n-1,\,n-1}, x_{nn}), \ldots, \Delta(x_{(m-1)n+1,\,1}, \ldots, x_{mn,\,n})).$$

Théorème. *La solution générale mesurable de l'équation fonctionnelle* (1) *est*

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_m) = Cu_1 u_2 \cdots u_m,$$

où C est une constante réelle arbitraire.

Tout d'abord, nous demontrerons les lemmes suivants.

Lemme 1. *On a*

$$F(0, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}) \equiv 0,$$

si au moins un des nombres $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ est égal à 0.

Démonstration. Si l'on pose

$$x_{ij} = x \quad (i = 1, 2, \ldots, mn;\ j = 1, 2, \ldots, n),$$

de l'équation (1) on obtient

$$f(0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Posons

$$x_{kn+1,\,1} = x_k\ (k = 0, 1, \ldots, m-1);\ x_{kn+i,\,i} = 1\ (k = 0, 1, \ldots, m-1;\ i = 2, 3, \ldots, n)$$

et remplaçons toutes les autres variables par 0. Alors, on obtient de (1):

$$(2)\quad F(0, 0, x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}) + F(0, x_1, 0, x_3, \ldots, x_{m-1}) + \cdots$$
$$+ F(0, x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}, 0) = 0.$$

Soit $E_{m-1} = \{1, 2, \ldots, m-1\}$ et $S_\nu\ (1 < \nu \leqslant m-1)$ un sous-ensemble quelconque de E_{m-1} contenant ν éléments.

Supposons que l'on ait

$$(3)\quad F(0, v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}) = 0,$$

où

$$\begin{aligned} v_i &= 0 && (i \in S_\nu), \\ &= y_i && (i \in E_{m-1} \setminus S_\nu). \end{aligned}$$

Nous allons démontrer que

$$F(0, w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}) = 0,$$

où

$$\begin{aligned} w_i &= 0 && (i \in S_{\nu-1}), \\ &= y_i && (i \in E_{m-1} \setminus S_{\nu-1}), \end{aligned}$$

si l'hypothese (3) est vraie.

En remplaçant dans (2)

$$x_i = w_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1),$$

d'après l'hypothese (3) on obtient

$$(\nu-1)\, F(0, w_1, w_2, \ldots, w_{m-1}) = 0 .$$

Donc, nous avons démontré par induction que

$$F(0, u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}) = 0 ,$$

si précisément ν $(0 < \nu \leqslant m-1)$ éléments parmi $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ sont égaux à 0.

Lemme 2. *On a*

$$F(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}, 0) = 0 .$$

Démonstration. Si l'on pose

$$x_{n,k} = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, n), \ x_{(m-1)n+i,j} = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n-1;\ j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_{mn,n} = 1, \ x_{ni+k,k} = 1 \ (i = 0, 1, \ldots, m-2;\ k = 2, 3, \ldots, n),$$

$$x_{ni+1,1} = u_{i+1} \ (i = 0, 1, \ldots, m-2),$$

d'après le lemme 1, de l'équation (1) on obtient (4).

Démonstration du théorème. Nous allons démontrer le théorème par induction.

Pour $m = 2$, le théorème est démontré dans l'article [1].

Supposons que le théorème soit vrai pour $m-1$, c'est-à-dire que la solution générale mesurable de l'équation fonctionnelle

$$(5) \quad (m-2) f(\Delta(x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{n-1,n-1}, x_{nn}), \ldots, \Delta(x_{(m-2)n+1,1}, \ldots, x_{(m-1)n,n}))$$
$$= \sum_{\nu=n+1}^{(m-1)n} \theta_{n,\nu} f(\Delta(x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{n-1,n-1}, x_{nn}), \ldots, \Delta(x_{(m-2)n+1,1}, \ldots, x_{(m-1)n,n}))$$

soit donnée par

$$(6) \qquad f(u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}) = C u_1 u_2 \cdots u_{m-1},$$

où C est une constante réelle arbitraire.

Si l'on pose dans l'équation (1)

$$x_{n,k} = x_{(m-1)n+1,k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_{(m-1)n+i,i} = 1 \qquad (i = 2, 3, \ldots, n-1),$$

$$x_{mn,n} \cdot x_{(m-1)n+1,1} = 1, \ x_{(m-1)n+i,j} = 0 \ (i = 2, 3, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, i-1),$$

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, 1) \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}),$$

d'après le lemme 2, on obtient l'équation (5).

Donc, d'après (6), on a

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, 1) = C x_1 x_2 \cdots x_{m-1} .$$

En posant dans l'équation (1)

$$x_{ni+1,\,1}=y_{i+1}\ (i=0,\,1\,,\ldots,\,m-2),\ x_{mn,\,n}=y_m\,,$$

$$x_{ni+k,\,k}=1\ \ (i=0,\,1\,,\ldots,\,m-2;\ k=2,\,3\,,\ldots,\,n),$$

$$x_{n(m-1)+k,\,k}=1\ \ (k=1,\,2\,,\ldots,\,n-1)\,,$$

et en remplaçant toutes les autres variables par 0, d'après le lemme 1, on obtient

$$F(y_1\,,\,y_2\,,\ldots,\,y_m)=F(y_1y_m\,,\,y_2\,,\ldots,\,y_{m-1}\,,\,1)\,. \tag{8}$$

D'après (7) et (8), on a

$$F(y_1\,,\,y_2\,,\ldots,\,y_m)=Cy_1y_2\cdots y_m\,. \tag{9}$$

Inversement, nous allons prouver que la fonction (9) est justement la solution de l'équation (1). A cet effet, considérons le déterminant

$$D(j)=\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{21} & x_{22} & & x_{2n} & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ x_{n-1,\,1} & x_{n-1,\,2} & & x_{n-1,\,n} & 0 & 0 & & 0 \\ x_{n1} & x_{n2} & & x_{nn} & x_{n1} & x_{n2} & & x_{nn} \\ x_{nj+1,\,1} & x_{nj+1,\,2} & & x_{nj+1,\,n} & x_{nj+1,\,1} & x_{nj+1,\,2} & & x_{nj+1,\,n} \\ \vdots & & & & & & & \\ x_{nj+n,\,1} & x_{nj+n,\,2} & & x_{nj+n,\,n} & x_{nj+n,\,1} & x_{nj+n,\,2} & & x_{nj+n,\,n} \end{vmatrix}=0\,. \tag{10}$$

D'après l'identité (10) on conclut que l'identité suivante est vraie

$$\sum_{j=1}^{m-1} D(j)\cdot\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m-1}\Delta(x_{ni+1,\,1}\,,\,x_{ni+2,\,2}\,,\ldots,\,x_{ni+n,\,n})=0\,. \tag{11}$$

En évaluant le déterminant $D(j)$ d'après la règle de Laplace et en utilisant l'identité (11), on vérifie que la fonction (9) est une solution de l'équation (1).

La démonstration du théorème est ainsi achevée.

REFERENCES

[1] P. M. Vasić — R. R. Janić, *Sur une équation fonctionnelle où interviennent les déterminants*, Matematički Vesnik, 4 (19) (1967), 325—328.