PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 200 (1967)

ХАРАКТЕРИСТИКИ ВРЕМЕННЫХ ПЕРЕМЕН ВЕКТОРА ПЕРИГЕЛИЯ В ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРОБЛЕМЕ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Д. Михаилович

(Принято 15. X 1967.)

В. В. Радзиевский в своем научном исследовании [1] сформулировал и третировал проблему относительного движения двух тел с массами m и m_1 в гомогенной сферичной туче постоянной плотности δ при чем являются взаимные влияния между этими телами и частицами тучи-силы тяготения Ньютона.

Векторное дифференциальное уравнение проблемы, вычисление которой дает вектор $\mathfrak{r}$ относительного положения массы m по отношению к массе m_1 имеет форму:

$$\ddot{\mathfrak{r}} = -\left(\frac{\mu}{r^2} + k\,r\right)\frac{\mathfrak{r}}{r} \tag{1}$$

где $r = |\mathfrak{r}|$, $\mu = G\,(m + m_1)$ — постоянная тяготения $k = \dfrac{4}{3}\pi\delta G$.

Если дифференциальное уравнение (1) написать в форме:

$$\ddot{\mathfrak{r}} + \frac{\mu}{r^3}\,\mathfrak{r} = -k\,\mathfrak{r} \tag{2}$$

тогда видно, что проблему Радзиевского можно понять как проблему возмущенного движения Кеплера, в которой сила возмущения дается в форме

$$\mathfrak{S} = \operatorname{grad} R = -k\,\mathfrak{r}\,. \tag{3}$$

Автор в статье [2] дал форму дифференциальных уравнений для решения этой проблемы воспользуясь группой векторных элементов Милановича ([3], [4]) и формой дифференциального уравнения для временных перемен тех элементов, которые дали М. Миланкович ([3], [4]) и Б. Попович [5]. Воспользуясь формой векторного дифференциального уравнения Поповича:

$$\frac{d\mathfrak{C}}{dt} = [\mathfrak{r}\,\mathfrak{S}]$$

для определенных временных перемен вектора секторной скорости автор на основе (3) показал, что $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0$ ($\mathfrak{C}_0$ векторная псстоянная), т.е. что секториальная скорость в проблеме Радзиевского является постоянной как векторная величина, что в пследствии дает непеременчивую ориентацию плоскости движения возмущенной массы.

В настоящей статье будут показаны некоторые характеристики временных перемен перигельного вектора $\mathfrak{D}$ как векторного элемента, который входит в дифференциальное уравнение проблемы.

Векторное дифференциальное уравнение, характеризующее временные перемены вектора $\mathfrak{D}$ в форме, которую дал Попович [5] выглядит так:

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = [\text{grad } R, \mathfrak{C}] + [\mathfrak{v}\,[\mathfrak{r} \text{ grad } R]] \qquad \left(\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right) \tag{4}$$

на основе (3) это уравнение дает:

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = -k\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{C}] - [\mathfrak{v}\,[\mathfrak{r}, k\,\mathfrak{r}]] \tag{5}$$

или:

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = k\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{r}] \tag{6}$$

или:

$$\mathfrak{B} = k\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{r}] \qquad \left(\mathfrak{B} = \frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right). \tag{6'}$$

С помощью сукцессивного диффереицирования последнего уравнения по времени мы находим:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{B}}{dt} &= k\,[\mathfrak{C}\,\dot{\mathfrak{r}}], \\ \frac{d^2\mathfrak{B}}{dt^2} &= k\,[\mathfrak{C}\,\ddot{\mathfrak{r}}]. \end{aligned} \tag{7}$$

Воспользуясь векторным дифференциальным уравнением (1) проблема последнего уравнения дает:

$$\frac{d^2\mathfrak{B}}{dt^2} = -k\left[\mathfrak{C}, \left(\frac{\mu}{r^2} + kr\right)\frac{\mathfrak{r}}{r}\right],$$

или:

$$\frac{d^2\mathfrak{B}}{dt^2} = -\frac{k}{r}\left(\frac{\mu}{r^2} + kr\right)[\mathfrak{C}\,\mathfrak{r}],$$

т.е. пользуясь (6'):

$$\frac{d^2\mathfrak{B}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3}\,\mathfrak{B} = -k\,\mathfrak{B}. \tag{8}$$

Вектор $\mathfrak{B}$ представляет скорость временного изменения перигельного вектора $\mathfrak{S}$. Векторное дифференциальное уравнение для определния вектора $\mathfrak{B}$ по форме то же что и уравнение (1) с той разницей, что вместо вектора положения $\mathfrak{r}$ стоит вектор $\mathfrak{B}$ скорости перемены перигельного вектора.

Из векторного дифференциального уравнения (8) можно дойти и до следующего результата. Векторным умножением этого уравнения вектором $\mathfrak{B}$ мы находим:

$$\left[\mathfrak{B}\,\frac{d^2\mathfrak{B}}{dt^2}\right]=0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dt}\left[\mathfrak{B}\,\frac{d\mathfrak{B}}{di}\right]=0\,,$$

из чего следует

(9) $$\left[\mathfrak{B}\,\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right]=\mathfrak{K}_0$$

при чем $\mathfrak{K}_0$ постоянный вектор.

Исходя из уравнения (9) можно показать, что вектор $\mathfrak{K}_0$ имеет направление вектора $\mathfrak{C}$ т.е. стоит перпендикулярно на непеременчивой плоскости орбиты возмущенной массы. Так как:

$$\mathfrak{B}=\frac{d\mathfrak{D}}{dt}=k\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{r}]\,,$$

то с помощью дифференцирования по времени мы находим:

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt}=k\,[\mathfrak{C}\,\dot{\mathfrak{r}}]$$

и заменением $\mathfrak{B}$ и $\dfrac{d\mathfrak{B}}{dt}$ из последних двух уравнений в (9) получается:

$$[k\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{r}],\ k\,[\mathfrak{C}\,\dot{\mathfrak{r}}]]=\mathfrak{K}_0$$

т.е.:

$$k^2\,[[\mathfrak{C}\,\mathfrak{r}],\ [\mathfrak{C}\,\dot{\mathfrak{r}}]]=\mathfrak{K}_0\,,$$

$$k^2\,\{\mathfrak{C}\,(\dot{\mathfrak{r}}\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{r}])-\dot{\mathfrak{r}}\,(\mathfrak{C}\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{r}])\}=\mathfrak{K}_0\,,$$

или:

$$k^2\,\mathfrak{C}\,(\dot{\mathfrak{r}}\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{r}])=\mathfrak{K}_0\,,$$

или:

$$k^2\,\mathfrak{C}\,(\mathfrak{C}\,[\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{r}}])=\mathfrak{K}_0\,.$$

Так как $[\mathfrak{r}\,\dot{\mathfrak{r}}]=\mathfrak{C}$ то является

$$k^2\,\mathfrak{C}\,(\mathfrak{C}\mathfrak{C})=\mathfrak{K}_0\,,$$

т.е.

(10) $$\mathfrak{K}_0=k^2C^2\,\mathfrak{C}\,.$$

Это значит, что вектор $\mathfrak{K}_0$ является постоянным, колинеарным с вектором секториальной скорости, и имеет модул

(11) $$|\mathfrak{K}_0|=k^2C^3.$$

На основе результата (10) можно векторный интеграл (9) представить в форме:

$$\left[\mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right]=k^2C^2\mathfrak{C}, \tag{12}$$

что значит, что векторный результат умножения временного изменения перигельного вектора $\mathfrak{D}$ с вектором скорости этого изменения является постоянным вектором, при чем его модул по отношению к (11) имеет значение:

$$\left|\left[\mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}\right]\right|=k^2C^3.$$

Наконец, если векторный идентитет $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}$ умножить по векторскому способу с

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt}=k\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{r}]$$

получается

$$\left[\mathfrak{C}\,\frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right]=k\,[\mathfrak{C}\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{r}]],$$

или

$$\left[\mathfrak{C}\,\frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right]=k\,\{\mathfrak{C}(\mathfrak{C}\,\mathfrak{r})-\mathfrak{r}\cdot C^2\},$$

или, если $\mathfrak{C}\,\mathfrak{r}=0$, то является:

$$-k\,C^2\,\mathfrak{r}=\left[\mathfrak{C}\,\frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right], \tag{13}$$

из чего следует:

$$\mathfrak{r}=-\frac{1}{kC^2}\left[\mathfrak{C}\,\frac{d\mathfrak{D}}{dt}\right] \tag{14}$$

т.е.

$$\mathfrak{r}=-\frac{1}{kC^2}\,[\mathfrak{C}\,\mathfrak{B}]. \tag{14'}$$

Сопоставляя реляцию (6′) и (14′) можно прийти к выводу, что законность функциональной зависимости вектора $\mathfrak{B}$ от вектора $\mathfrak{r}$ является по форме идентичной с той, с помощью которой выражена зависимость вектора позиции, как функции вектора $\mathfrak{B}$ временной перемены перигельного вектора. С точки зрения механики вектор временной перемены перигельного вектора представляет собой вращающийся момент вектора позиции точки с угловой скоростью $k\,\mathfrak{C}$ пока вектор позиции является вращающимся моментом временной перемены перигельного вектора с угловой скоростью

$$-\frac{1}{kC^2}\,\mathfrak{C}.$$

Если введем векторный элемент Билимовича [6]

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{D} + \frac{n\tau}{C} \tag{15}$$

и если учтем результат автора [2] выраженный реляцией

$$\frac{d\mathfrak{D}}{dt} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} - \frac{1}{C^2}\left(\mathfrak{C}\,\frac{d\mathfrak{G}}{dt}\right)\mathfrak{C},$$

выходит, что

$$\mathfrak{B} = \frac{d\mathfrak{G}}{dt} - \frac{1}{C^2}\left(\mathfrak{C}\,\frac{d\mathfrak{G}}{dt}\right)\mathfrak{C}. \tag{16}$$

Из этого следует

$$[\mathfrak{C}\,\mathfrak{B}] = \left[\mathfrak{C}\,\frac{d\mathfrak{G}}{dt}\right] = [\mathfrak{C}\,\mathfrak{B}^*],$$

при чем $\mathfrak{B}^* = \dfrac{d\mathfrak{G}}{dt}$. Поэтому реляция (14′) дает

$$\mathfrak{r} = -\frac{1}{kC^2}[\mathfrak{C}\,\mathfrak{B}^*] \tag{17}$$

с помощью которой выражен вектор позиции возмущенной массы как функции вектора $\mathfrak{B}^*$ — временной перемены векторного элемента $\mathfrak{G}$.

Сопоставляя реляции

$$\mathfrak{r} = -\frac{1}{kC^2}[\mathfrak{C}\,\mathfrak{B}] \quad \text{и} \quad \mathfrak{r} = -\frac{1}{kC^2}[\mathfrak{C}\,\mathfrak{B}^*]$$

получаем

$$[\mathfrak{C}\,\mathfrak{B}^*] = [\mathfrak{C}\,\mathfrak{B}] \tag{17′}$$

т.е.

$$\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B} + \lambda\,\mathfrak{C} \tag{18′}$$

что наглядно и на основании реляции

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{D} + \frac{n\tau}{C}\,\mathfrak{C},$$

из чего происходит:

$$\frac{d\mathfrak{G}}{dt} = \frac{d\mathfrak{D}}{dt} + \frac{n}{C}\,\frac{d\tau}{dt}\,\mathfrak{C},$$

т.е.

$$\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B} + n\frac{d\tau}{dt}\,\mathfrak{C}_0 \qquad (\mathfrak{C}_0 = \operatorname{ort}\mathfrak{C})$$

которое является идентичным с (18), при чем $\lambda = \dfrac{n}{C}\,\dfrac{d\tau}{dt}$ (τ-время прохода сквозь перигелий).

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Радзиевский, *Общее решение одного случая задачи трех тел.* Док. АН СССР, 91, № 6, (1953), 1309—1311.

[2] D. Mihailović, *Jedna primena jednačina teorije poremećaja na problem triju tela Radzievskog*, Vesnik Društva matematičara i fizičara NR Srbije, VII, 3—4, (1955), 223—228.

[3] M. Milanković, *O upotrebi vektorskih elemenata u računu planetskih poremećaja*, Glas CLXXXI SAN, prvi razred 90, A. Matematičke nauke, (1939), 1—72.

[4] M. Milanković, *Osnovi Nebeske mehanike*, Univerzitet u Beogradu, Beograd 1947. i 1955, str. 62—74.

[5] B. Popović, *Novi oblici jednačina poremećaja u kretanju planeta*, Glas CXCVIII SAN, Odeljenje Prirodno-matematičkih nauka, Nova serija, 3, (1950), 129—139.

[6] A. Bilimović, *Pfafov izraz i vektorske diferencijalne jednačine planetskih poremećaja*, Glas CXCI SAN, Odeljenje Prirodno-matematičkih nauka, 96, (1948), 83—115.