PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 177 (1967)

COMPLÉMENTS AU TRAITÉ DE KAMKE. XII.

DES CRITÈRES D'INTETRABILITÉ DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE RICCATI*

D. S. Mitrinović et *P. M. Vasić*

L'équation différentielle de Riccati a été l'objet de nombreuses recherches à différents points de vue. En particulier, ont été donnés de nombreux critères d'intégrabilité par quadratures. Dans ces derniers temps, on a également publié des articles ayant comme sujet l'obtention des critères d'integrabilité de ladite équation. Cependant, ces articles apportent en substance des contributions qui sont devancées depuis longtemps.

Notre but est d'analyser, dans plusieurs articles, certains des critères en question, ainsi que de donner quelques contributions.

1. Transformation générale de l'équation de Riccati

Considérons l'équation de Riccati sous sa forme canonique

(1.1) $$\frac{dy}{dx}+y^2=g(x),$$

à laquelle peut être réduite l'équation de Riccati générale

$$\frac{dy}{dx}=F(x)\,y^2+G(x)\,y+H(x),$$

(voit, par exemple, [1]).

Déterminons la forme la plus générale du changement de la fonction

(1.2) $$y=h(x,z) \qquad (z, \text{ une nouvelle fonction})$$

tiansformant l'équation (1.1) de nouveau en une équation de Riccati.

Supposons que l'équation (1.1), par le changement (1.2), prenne la forme suivante

(1.3) $$\frac{dz}{dx}=f_1(x)\,z^2+f_2(x)\,z+f_3(x),$$

les fonctions f_1, f_2, f_3 étant pour le moment indéterminées.

* Reçu par la Rédaction le 25 novembre 1966.

En partant de (1.2), on obtient

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial h(x, z)}{\partial x}+\frac{\partial h(x, z)}{\partial z}\frac{dz}{dx}.$$

Avec la dernière égalité, l'équation (1.1) prend la forme que voici

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-h(x, z)^2+g(x)-\dfrac{\partial h(x, z)}{\partial x}}{\dfrac{\partial h(x, z)}{\partial z}}.$$

Pour que cette équation soit de la forme (1.3), il faut et il suffit que

$$\frac{\partial h(x, z)}{\partial x}+\frac{\partial h(x, z)}{\partial z}\big(f_1(x)z^2+f_2(x)z+f_3(x)\big)=g(x)-h(x, z)^2. \tag{1.4}$$

À cette équation aux dérivées partielles correspond le système d'équations différentielles ordinaires:

$$\frac{dx}{1}=\frac{dz}{f_1(x)z^2+f_2(x)z+f_3(x)}=\frac{dh(x, z)}{g(x)-h(x, z)^2}.$$

On en tire

$$\frac{dz}{dx}=f_1(x)z^2+f_2(x)z+f_3(x), \tag{1.5}$$

$$\frac{dh(x, z)}{dx}=g(x)-h(x, z)^2. \tag{1.6}$$

Supposons dans ce qui suit que l'équation (1.1), c'est-à-dire (1.6), soit intégrable par quadratures. Alors, il en est de même avec sa transformée (1.5).

Soient

$$h(x, z)=\frac{C_1F_1(x)+G_1(x)}{C_1H_1(x)+K_1(x)} \quad (F_1K_1-H_1G_1\neq 0;\ C_1, \text{ constante d'intégration}) \tag{1.7}$$

la solution générale de l'équation (1.6), et

$$z=\frac{C_2F_2(x)+G_2(x)}{C_2H_2(x)+K_2(x)} \quad (F_2K_2-H_2K_2\neq 0;\ C_2, \text{ constante d'intégration}) \tag{1.8}$$

la solution générale de l'équation (1.5).

Par suite, la solution générale de l'équation (1.4) est

$$C_1=\Phi(C_2) \qquad (\Phi, \text{ fonction „arbitraire“}),$$

c'est-à-dire, d'après (1.7) et (1.8),

$$\frac{G_1(x)-K_1(x)h(x, z)}{H_1(x)h(x, z)-F_1(x)}=\Phi\left(\frac{G_2(x)-K_2(x)z}{H_2(x)z-F_2(x)}\right).$$

On en tire

$$h(x, z)=\frac{F_1(x)\Phi(u)+G_1(x)}{H_1(x)\Phi(u)+K_1(x)} \quad \text{avec} \quad u=\frac{G_2(x)-K_2(x)z}{H_2(x)z-F_2(x)}. \tag{1.9}$$

Le changement (1.2), avec (1.9), transforme l'équation (1.1) en une autre équation de Riccati. Les fonctions F_1, G_1, H_1, K_1 qui figurent dans (1.9) sont déterminées car on connaît, d'après la supposition l'intégrale de (1.1), tandis que les fonctions F_2, G_2, H_2, K_2 peuvent être choisies à volonté.

A titre d'exemple, considérons le cas particulier de la fonction $h(x, z)$ pour $\Phi(x)=x$. On a alors

$$h(x, z)=\frac{(G_1(x) H_2(x)-F_1(x) K_2(x)) z+(F_1(x) G_2(x)-F_2(x) G_1(x))}{(H_2(x) K_1(x)-K_2(x) H_1(x)) z+(G_2(x) H_1(x)-F_2(x) K_1(x))}.$$

Posons:

$$G_1(x) H_2(x)-F_1(x) K_2(x)=Q(x),$$
$$F_1(x) G_2(x)-F_2(x) G_1(x)=R(x),$$
$$H_2(x) K_1(x)-K_2(x) H_1(x)=S(x),$$
$$G_2(x) H_1(x)-F_2(x) K_1(x)=T(x).$$

Les fonctions F_2, G_1, H_2, K_2 peuvent être exprimées par Q, R, S, T sous la condition que $F_1(x) K_1(x)-H_1(x) G_1(x) \neq 0$. Etant donné que F_2, G_2, H_2, K_2 sont des fonctions arbitraires, il en est de même avec des fonctions Q, R, S, T.

Par conséquent, tout changement de la fonction

$$y=\frac{Q(x) z+R(x)}{S(x) z+T(x)} \tag{1.10}$$

transforme l'équation de Riccati (1.1) en une nouvelle équation de Riccati, ce qui est bien connu.

Jusqu'à présent nous avons opéré seulement le changement de la fonction, tandis que le changement de la variable indépendante reste inaltéré. Cependant, comme il est bien connu, le changement de la variable indépendante $x=P(t)$ transforme l'équation de Riccati de nouveau en une équation de Riccati.

Nous avons fixé notre attention sur la transformation (1.10), parce qu'elle a été d'une part bien étudiée dans l'article [1] et que d'autre part presque tous les résultats obtenus sur l'équation de Riccati sont, dès lors, contenus comme cas particuliers dans les propositions énoncées dans [1].

2. Transformation homographique

On donne dans ce chapitre un résumé de certains des résultats parus dans l'article [1] qui seront employes dans les notes suivantes sur le meme sujet. Le resultat principal est énoncé comme Proposition 8. On indique toutefois quelques conséquences de cette Poposition car elles il seront utiles pour notre projet.

Introduisons dans l'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx}+y^2=g(x) \tag{2.1}$$

une nouvelle variable indépendante, t, et une nouvelle fonction inconnue z, liées à x et y par les relations

$$x=P(t), \tag{2.2}$$

$$y=\frac{Q(t) z+R(t)}{S(t) z+T(t)}, \tag{2.3}$$

où P, Q, R, S, T sont des fonctions arbitraires telles que

$$P \not\equiv \text{const}, \qquad QT - RS \not\equiv 0.$$

De (2.3) on voit que l'on peut poser

$$S(x) = 1, \quad \text{si} \quad S(x) \not\equiv 0$$

et

$$T(x) = 1 \quad \text{si} \quad S(x) \equiv 0,$$

sans nuire à la généralité.

C'est pourquoi nous allons envisager séparement les deux transformations suivantes:

(2.4)
$$x = P(t), \qquad y = \frac{Q(t)\, z + R(t)}{z + T(t)};$$

(2.5)
$$x = P(t), \qquad y = Q(t)\, z + R(t).$$

Proposition 1. La substitution (2.4) transforme l'équation (2.1) en l'équation suivante

(2.6)
$$\frac{dz}{dt} = A(t)\, z^2 + B(t)\, z + C(t),$$

où l'on admet

(2.7)
$$A(t) = \frac{P'(t)\, g(P(t)) - P'(t)\, Q(t)^2 - Q'(t)}{Q(t)\, T(t) - R(t)},$$

(2.8)
$$B(t) = \frac{2P'(t)\, T(t)\, g(P(t)) - 2P'(t)\, Q(t)\, R(t) + Q(t)\, T'(t) - Q'(t)\, T(t) - R'(t)}{Q(t)\, T(t) - R(t)},$$

(2.9)
$$C(t) = \frac{P'(t)\, T(t)^2\, g(P(t)) - P'(t)\, R(t)^2 + R(t)\, T'(t) - R'(t)\, T(t)}{Q(t)\, T(t) - R(t)}.$$

Proposition 2. La substitution (2.5) transforme l'équation (2.1) en l'équation (2.6) avec

(2.10)
$$A(t) = -P'(t)\, Q(t),$$

(2.11)
$$B(t) = -\frac{Q'(t)}{Q(t)} - 2P'(t)\, R(t),$$

(2.12)
$$C(t) = \frac{P'(t)}{Q(t)}\, g(P(t)) - \frac{R'(t)}{Q(t)} - \frac{P'(t)}{Q(t)}\, R(t)^2.$$

Proposition 3. 1° En prenant comme point de départ une équation de Riccati de forme canonique

(2.13)
$$\frac{dy}{dx} + y^2 = g(x),$$

il est possible d'en déduire une suite illimitée d'équations de même forme,

(2.14)
$$\frac{dy_k}{dx} + y_k^2 = g_k(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

les fonctions $g_k(x)$ étant déterminées par la loi de récurrence

$$g_k(x) = g_{k-1} + \frac{Q_k'' - g_{k-1}'}{Q_k} + \frac{3}{4}(\log(g_{k-1} - Q_k' - Q_k^2))'^2 + \frac{g_{k-1} - Q_k'}{Q_k}(\log(g_{k-1} - Q_k' - Q_k^2))' - \frac{1}{2}\frac{(g_{k-1} - Q_k' - Q_k^2)''}{g_{k-1} - Q_k' - Q_k^2} \tag{2.15}$$

avec

$$g_0 = g(x)$$

et $Q_k = Q_k(x)$, $g_{k-1} = g_{k-1}(x)$.

2° Les intégrales des équations formées se calculent de proche en pıoche par l'emploi de la loi de récurrence

$$y_k = \frac{(g_{k-1} - Q_k' - Q_k^2)\, y_{k-1}}{Q_k(y_{k-1} - Q_k)} + \frac{Q_k Q_k'' - Q_k g_{k-1}' + 2Q_k^2 g_{k-1} - 2Q_k'^2 + 4Q_k' g_{k-1} - 2g_{k-1}^2}{2Q_k(g_{k-1} - Q_k' - Q_k^2)} \tag{2.16}$$

avec $y_0 = y$.

3° Dans l'expression définissant $g_1(x)$ figure une fonction arbitraire $Q_1(x)$, indépendante de la fonction $g(x)$. Chaque passage d'une équation à la suivante introduira une nouvelle fonction arbitraire, de sorte que, dans la fonction $g_k(x)$, interviendront k fonctions arbitraires

$$Q_1(x),\ Q_2(x),\ \ldots,\ Q_k(x).$$

4° Toutes les équations ainsi formées seront intégrables, s'il en est ainsi de l'équation initiale pour une forme envisagée de g, par exemple $g = g_0$. De plus, si l'on sait déterminer les solutions de la première équation, on pourra connaître aussi, sans aucune intégration, les solutions de toutes les autres. Pour trouver l'íntégrale générale y_k, sur l'íntégrale de l'équation initiale ainsi que sur les intégrales

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{k-1}$$

des équations précédentes, on a à effectuer des opérations purement algébriques.

On peut obtenir la proposition 3 si l'on fait la transformation (2.4) avec $R(t) = 0$, $T(t) = 1$, $Q(t) \neq 0$, $P(t) = t$, et en mettant l'équation (2.6) sous forme canonique par la transfomation

$$z = -\frac{1}{A}y_1 - \frac{1}{2}\left(\frac{A'}{A^2} + \frac{B}{A}\right). \tag{2.17}$$

Pour $Q_1(x) = h$ ($h = \text{const} \neq 0$), de la proposition 3 on déduit.

Proposition 4. Si l'équation (2.1) est intégrable, il en est de même de l'équation

$$\frac{dy_1}{dx} + y_1^2 = g(x) + \frac{3}{4}\left(\frac{g'}{g - h^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{g''}{g - h^2} + h\frac{g'}{g - h^2}, \tag{2.18}$$

dont l'intégrale générale est fournie par

$$y_1 = \frac{g-h^2}{h}\frac{y'}{y-h} - \frac{g}{h} - \frac{1}{2}\frac{g'}{g-h^2} \qquad (h \neq 0), \tag{2.19}$$

y étant l'intégrale générale de (2.1).

En posant $Q(x) = \int g(x)\,dx$, la proppsition 1 devient

Proposition 5. L'équation

$$\frac{dy_1}{dx} + y_1^2 = g(x) + 2\left(\frac{g}{\int g dx}\right)^2 - \frac{g'}{\int g dx} \tag{2.20}$$

peut être intégrée toutes les fois qu'il en est ainsi de l'équation (2.1).

L'intégrale générale de l'équation obtenue est

$$y_1 = \frac{y \int g dx}{\int g dx - y} - \frac{g}{\int g dx}, \tag{2.21}$$

y designant l'intégrale générale de l'équation (2.1).

Pour: $Q^2 = g(x)$ et $Q(x) = (x+a)^{-1}$ (a = const), de la proposition 3 on tire les proposition 6 et 7:

Proposition 6. Si l'équation (2.1) est intégrable, il en sera de même de l'équation

$$\frac{dy_1}{dx} + y_1^2 = g(x) - \frac{3}{2}\frac{g'}{\sqrt{g}} + \frac{3}{4}\left(\frac{g''}{g'}\right)^2 + \sqrt{g}\frac{g''}{g'} - \frac{1}{2}\frac{g'''}{g'}, \tag{2.22}$$

dont l'intégrale est fournie par la relation

$$y_1 = \frac{1}{2}\frac{g' y}{g(\sqrt{g}-y)} - \frac{1}{2}\frac{g''}{g'} + \frac{3}{4}\frac{g'}{g} - \sqrt{g}, \tag{2.23}$$

y étant l'intégrale générale de l'équation (2.1).

Proposition 7. Toutes les fois que l'équation (2.1) est intégrable il en sera de même de l'équation

$$\frac{dy_1}{dx} + y_1^2 = g(x) + \frac{3}{4}\left(\frac{g'}{g}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{g''}{g} + \frac{1}{x+a}\frac{g'}{g} + \frac{2}{(x+a)^2}, \tag{2.24}$$

où a = const.

Son intégrale générale est

$$y_1 = \frac{(x+a)^2 gy}{(x+a)y - 1} - \frac{1}{2}\frac{g'}{g} - (x+a)g - \frac{1}{x+a}, \tag{2.25}$$

où y désigne l'intégrale générale de l'équation initiale (2.1).

Soit $Q(x)$ la fonction définie par la relation

$$g - Q' - Q^2 = D(x), \tag{2.26}$$

où $D(x)$ désigne une fonction de x telle que $D(x) \neq 0$. Ceci étant admis, de la propositiqn 3 on deduit;

Proposition 8. Si l'équation (2.1) peut être intégrée, sa transformée

$$\frac{dy_1}{dx}+y_1^2=g(x)-2Q'+\frac{3}{4}(\log D)'^2+Q\frac{D'}{D}-\frac{1}{2}\frac{D''}{D} \tag{2.27}$$

jouira de la même propriété. La fonction $Q(x)$ représente une solution quelconque de l'équation

$$\frac{dQ}{dx}+Q^2=g(x)-D(x), \tag{2.28}$$

où D est une fonction dont on peut disposer à volonté.

Si l'on fait dans (2.6) la substitution

$$z=-\frac{u}{A}-\frac{1}{2}\left(\frac{A'}{A^2}+\frac{B}{A}\right), \tag{2.29}$$

(u nouvelle fonction), on obtient l'équation

$$\frac{du}{dt}+u^2=F(t), \tag{2.30}$$

où la fonction $F(t)$ est définie par

$$\begin{aligned}(2.31)\quad &(QT-R^2)F(t)\\ &=(P'Tg-P'QR-QT'-R')(P'Tg-P'QR-Q'T)\\ &\quad-(P'g-Q'-P'Q^2)(P'T^2g-P'R^2+RT'-R'T)+(QT-R)\\ &\quad\times(Q''T+Q'T'-P''Tg-P'T'g-P'^2Tg'+P''QR+P'Q'R+P'QR')\\ &\quad+(QT-R)(P'Tg-P'QR-Q'T)\frac{\frac{d}{dt}(P'g-Q'-P'Q^2)}{P'g-Q'-P'Q^2}\\ &\quad+\frac{3}{4}(QT-R)^2\left(\frac{\frac{d}{dt}(P'g-Q'-P'Q^2)}{P'g-Q'-P'Q^2}\right)^2-\frac{1}{2}(QT-R)^2\frac{\frac{d^2}{dt^2}(P'g-Q'-P'Q^2)}{P'g-Q'-P'Q^2}\end{aligned}$$

avec

$$g=g(x)=g(P(t)),\qquad g'=\frac{dg}{dP},\qquad \frac{dg}{dt}=\frac{dg}{dP}\frac{dP}{dt}=g'P'.$$

RÉFÉRENCE

[1] D. S. Mitrinović: *Quelques propositions relatives à l'équation différentielle de Riccati*, Bulletin de l'Academie des sciences mathématiques et naturelles, A. Sciences mathématiques et physiques, Belgrade 1939, pp. 121—156.