PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 175 (1967)

AUTOTOPIES D'UN QUASIGROUPE ISOTOPE À UN QUASIGROUPE DEMI-SYMÉTRIQUE*

Albert Sade

Introduction

1. Les vocables les plus usuels étant pris souvent, dans la littérature, avec des significations différentes, on précise les définitions suivantes.

Un *quasigroupe* $Q = E(\cdot)$ sur un ensemble E est un système multiplicatif à division bilatère: pour toutes valeurs de a, b dans E les équations $x \cdot a = b$ & $a \cdot y = b$ ont une solution unique en x & y.

Le *transposé* d'un quasigroupe $X = E(\cdot)$ est le quasigroupe $R = E(\times)$ défini par

$$\forall x, y, z \in E, \qquad x \cdot y = z \rightleftarrows z \times x = y .$$

Q est alors dit le *transposé G—D* de R; on note $R = QP^{123}$, $Q = RP^{132}$.

Un quasigroupe est *demi-symétrique* s'il coïncide avec ses deux transposés. On le notera $\mathfrak{D}$.

Deux quasigroupes $Q = E(\ )$ et $H = E(\cdot)$, sur le même ensemble, sont *isotopes* si

$$\forall \xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{S}_E, \qquad xy = z \rightleftarrows x\xi \cdot y\eta = z\zeta .$$

L'isotopie transposée d'une isotopie $I = (\xi, \eta, \zeta)$ est l'isotopie $I[P^{123}] = (\zeta, \xi, \eta)$, ([1], p. 89, № 2), que l'on notera I_*. De même $I[P^{132}] = (\eta, \zeta, \xi)$.

Une isotopie qui applique un quasigroupe Q sur lui-même est une *autotopie* de Q; $Q(X, Y, Z) = Q$. L'ensemble $\mathfrak{A}_Q$, ou $\mathfrak{A}$, des autotopies de Q est le *groupe d'autotopie* de Q. Par $\mathfrak{A}_*$ nous entendons l'ensemble des $(Z, X, Y) = (X, Y, Z)_*$ quand (X, Y, Z) décrit $\mathfrak{A}$.

Une isotopie est *homogène* quand ses trois composantes sont semblables.

---

* Presenté le 20 novembre 1966 par D. S. Mitrinović.

Deux isotopies sur un même ensemble E, $T=(p, q, r)$ et $T'=(p', q', r')$ sont *semblables* s'il existe une isotopie $I=(\xi, \eta, \zeta)\in\mathfrak{S}_E$ transformant T en T', c'est-à-dire satisfaisant à

$$\xi^{-1}p\xi=p'; \quad \eta^{-1}q\eta=q'; \quad \zeta^{-1}r\zeta=r',$$

ou, plus brièvement $I^{-1}TI=T'$. *La similitude définit une partition.*

Le *centre* Z_G d'un groupe G est l'ensemble des éléments de G permutables avec tous les autres. Le *normatisateur* N d'un complexe de G est l'ensemble des éléments de G qui transforment ce comlexe en lui même. Si $Q=\mathfrak{D}H$, une T-isotopie de Q est une isotopie de la forme $T=H^{-1}H_*$ où H applique $\mathfrak{D}$ sur Q.

2. Notations. Autotopie (X, Y, Z). Groupe d'autotopie $\mathfrak{A}$. Groupe d'automorphisme $\mathcal{A}$. Quasigroupe demi-symétrique $\mathfrak{D}$. Complexe des autotopies homogènes $\mathcal{H}$. Centre Z. Normalisateur N. Cardinal de l'ensemble E, $|E|$. Si $Q=\mathfrak{D}H$, on note T_Q, ou $T=H^{-1}H_*$ et $\pi_T=\{I\to(T^{-1}IT)\,[P^{132}]\}$, $I\in\mathfrak{A}_Q$; $\mathcal{B}_Q=H^{-1}\mathcal{A}_{\mathfrak{D}}H$.

3. *Si $\mathfrak{A}$ est le groupe d'autotopie de Q, celui de son transposé sera $\mathfrak{A}_*$ et, si Q est demi-symétrique, $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}_*$ seront confondus.*

Preuve. Soit (X, Y, Z) une autotopie de $Q=E(\ )$ et soit $R=E(\cdot)=QP^{123}$; alors

$$ab=c \rightleftarrows b=c\cdot a \rightleftarrows (aX)(bY)=cZ \rightleftarrows (cZ)\cdot(aX)=bY,$$

donc (Z, X, Y) est une autotopie de R.

Si $Q=R$, $(X, Y, Z)\in\mathfrak{A} \rightleftarrows (Z, X, Y)\in\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_*$; ce qui est aussi une conséquence de [2], № 2, (i). La réciproque n'est pas vraie.

La propriété $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_*$ des quasigroupes demi-symétriques est remplacée, dans le cas des quasigroupes quelconques, par la suivante.

4. *Si l'isotopie K applique $Q=E(\ )$ sur son transposé*

(i) *K transforme $\mathfrak{A}$, groupe d'autotopie de Q, en $\mathfrak{A}_*$,*

(ij) *Si N est le normalisateur de $\mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{S}^3_E$, le normalisateur de $\mathfrak{A}_*$* sera N_*.

(ijj) $K^{-1}NK=N_*$.

(iv) *On obtient toutes les isotopies K_1 jouissant de la même propriété, en multipliant K par N_*, ou N par K.*

Preuve. (i) Soit $Q'=QP^{123}$; $QK=Q' \rightleftarrows Q'K^{-1}IK=Q'$ $(I\in\mathfrak{A})$ donc $K^{-1}IK$ est une autotopie de Q'; ainsi

$$K^{-1}IK\in\mathfrak{A}_*; \qquad K^{-1}\mathfrak{A}K\subseteq\mathfrak{A}_*,$$

et comme les deux groupes sont isomorphes, $K^{-1}\mathfrak{A}K=\mathfrak{A}_*$.

(ij) Si $n\in N$, $n^{-1}In=I'\in\mathfrak{A}$, donc $n_*^{-1}I_*n_*=I'_*$ ([1], p. 90,2). Ainsi N_* est l'ensemble des isotopies qui laissent $\mathfrak{A}_*$ invariant.

(ijj) Si $n \in N$, on a $n^{-1} \mathfrak{A} n = \mathfrak{A}$, ou

$$(K^{-1} n^{-1} K)(K^{-1} \mathfrak{A} K)(K^{-1} nK) = K^{-1} \mathfrak{A} K$$

donc

$$(K^{-1} n^{-1} K) \mathfrak{A}_* (K^{-1} nK) = \mathfrak{A}_*; \text{ ainsi } K^{-1} nK \in N_*.$$

(iv) Si K et K_1 transforment $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}_*$ on a

$$\forall I \in \mathfrak{A}, \qquad K^{-1} IK = I'_* \wedge K_1^{-1} IK_1 = I''_*,$$

d'où

$$I = KI'_* K^{-1} \wedge K_1^{-1} KI'_* K^{-1} K_1 = I''_*.$$

Cela signifie que $(K^{-1} K_1)$ transforme $\mathfrak{A}_*$ en lui-même, d'où $\{K_1\} = KN_*$. Réciproquement, si $K_1 \in KN_*$ et $K^{-1} \mathfrak{A} K = \mathfrak{A}_*$, on aura

$$\forall I \ni \mathfrak{A}, \qquad (K^{-1} K_1)^{-1} I_* (K^{-1} K_1) = I'_*.$$

En posant $J = KI_* K^{-1}$, ou $K^{-1} JK = I_*$, on voit que J est une autotopie de Q puisque K transforme, par hypothèse, $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}_*$. L'égalité $K_1^{-1} JK_1 = I'_*$ exprime que K_1 jouit de la même propriété que K. En particulier, comme $\mathfrak{A}_* \subseteq N_*$, les $K \mathfrak{A}_*$ jouissent de la même propriété que K. La fin résulte de $K^{-1} NK = N_*$, (ijj).

Dans ce travail, parmi les isotopies K qui transforment $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}_*$, on considèrera celles qui sont définies comme le produit $T = H^{-1} H_*$, où H^{-1} est une isotopie projetant Q sur un quasigroupe demi-symétrique, et que l'on nommera des *T-isotopies*,

$$Q = \mathfrak{D} H, \Rightarrow T = H^{-1} H_*.$$

L'application π

5. *Si Q est un quasigroupe isotope d'un quasigroupe demi-sumétrique, $\mathfrak{D}$, $Q = \mathfrak{D} H$, et $\mathcal{H}$ le complexe des autotopies homogènes de Q,*

(i) *Toute T-isotopie $H^{-1} H_*$ transforme chaque autotopie de Q en la transposée d'une autre: $T^{-1} \mathfrak{A} T = \mathfrak{A}_*$.*

(ij) *Si $T'_* = T^{-1}$, alors T' transforme $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}[P^{132}]$.*

(ijj) *L'application $\pi = \{I \to (T^{-1} IT)[P^{132}]\}$ est un automorphisme de $\mathfrak{A}$.*

(iv) *π est identique ou du $3^{ième}$ ordre.*

(v) $|\mathfrak{A}| \equiv |\mathcal{H}|$ (mod 3) (*dans le cas fini*).

(vi) *Les autotopies de Q invariantes par π forment un groupe, $\mathcal{B}$, qui est isomorphe au groupe d'automorphisme, $\mathcal{A}_D$, de $\mathfrak{D}$.*

Preuve. (i) Soit $Q = \mathfrak{D} H$ un quasigroupe isotope, par H, d'un quasigroupe demi-symétrique $\mathfrak{D}$. Donc $\mathfrak{A}_{\mathfrak{D}}$ contient, avec toute autotopie J, sa transposée J_* (№ 3). Par suite Q admet les autotopies

$$I = H^{-1} JH, \qquad I' = H^{-1} J_* H \in \mathfrak{A}_Q,$$

d'où

$$J = HIH^{-1}, \qquad J_* = HI' H^{-1}.$$

Mais [1], p. 90 № 2,

$$J_* = H_* I_* H_*^{-1},$$

donc

$$HI'H^{-1} = H_* I_* H_*^{-1}$$

et

$$(H^{-1} H_*)^{-1} I' (H^{-1} H_*) = I_*; \qquad T^{-1} I' T = I_*.$$

(ij) La démonstration est analogue. On peut aussi la déduire de

$$T^{-1} \mathfrak{A} T = \mathfrak{A}_*.$$

(ijj) L'application π est bijective car $\pi^{-1} = (J \to TJ_* T^{-1})$.

D'autre part

$$\forall I, J \in \mathfrak{A}, \quad (I\pi)(J\pi) = [(T^{-1} IT)(T^{-1}JT)]_{**} = (T^{-1} IJT)_{**} = (IJ)\pi.$$

(iv) $\qquad \forall J \in \mathfrak{A}, \quad \pi^{-1} = (J \to TJ_* T^{-1}).$

Supposons que π déplace J, alors

$$\pi^{-2} = [J \to T(TJ_* T^{-1})_* T^{-1}] = (J \to TT_* J_{**} T_*^{-1} T^{-1}),$$

ou, avec la notation de (ij), $(T' = TT_*)$,

$$\pi^{-2} = (J \to T' J_{**} T'^{-1}).$$

Enfin,

$$\pi^{-3} = [J \to T(T' J_{**} T'^{-1})_* T^{-1}] = (J \to TT'_* J T'^{-1}_* T^{-1})$$

et puisque

$$T^{-1} = T'_*, \quad \pi^{-3} = (J \to J) = 1.$$

Si, $\forall J \in \mathfrak{A}$, π ne déplace pas J, alors π sera identique.

Remarque. La proposition n'est vraie que si T est une T-isotopie. Si K transforme seulement $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}_*$, l'application $\{I \to (K^{-1}IK)[P^{132}]\}$ ne sera pas nécessairement du 3ième ordre.

(v) Toute isotopie, I, semblable à sa transposée I_*, est homogène; donc I et $I\pi$ ne peuvent être semblables si I n'est pas homogène. Soit C, (№ 1), la classe des autotopies de Q, semblables à $(X, Y, Z) \notin \mathcal{H}$.

On aura

$$C\pi = C_1; \qquad C_1\pi = C_2; \qquad C_2\pi = C,$$

où C, C_1, C_2 sont disjointes et de même puissance; par conséquent dans le cas fini,

$$|C_1 + C_2 + C| = 3|C| \equiv 0 \pmod 3 \quad \text{ou} \quad |\mathfrak{A} - \mathcal{H}| \equiv 0 \pmod 3.$$

On en conclut qu'*un quasigroupe fini pour lequel* $|\mathfrak{A} - \mathcal{H}|$ *est premier avec 3 ne peut être isotope d'un quasigroupe demi-symétrique.*

(vi) a). Si π_T laisse invariants $I, J \in \mathfrak{A}$, alors

$$I_* = T^{-1} IT, \qquad J_* = T^{-1} JT; \qquad J_*^{-1} = T^{-1} J^{-1} T,$$

donc

$$I_* J_*^{-1} = T^{-1} ITT^{-1} J^{-1} T = T^{-1} (IJ^{-1}) T = (IJ^{-1})_*$$

et π laisse IJ^{-1} invariant. Ainsi l'ensemble des I, J est un groupe.

b). Si $I \in \mathfrak{A}_Q$, à cause de $Q = \mathfrak{D}H$, on voit que $HIH^{-1} = U$ est une autotopie de $\mathfrak{D}$; d'autre part, puisque $T = H^{-1}H_*$, on a

$$I_* = H_*^{-1}HIH^{-1}H_* = H_*^{-1}UH_*;$$

en posant $U = V_*$, l'égalité des deux membres extrêmes entraîne

$$I = H^{-1}VH \quad \text{ou} \quad V = HIH^{-1} = U = V_*.$$

Cela signifie que U est un automorphisme de $\mathfrak{D}$.

Ainsi $\{I\} = H^{-1}\mathcal{A}H = \mathcal{B}$, $\mathcal{A}$ étant le groupe d'automorphisme de $\mathfrak{D}$.

Remarque. L'ensemble des I satisfaisant $I_* = T^{-1}IT$ est toujours un groupe, même si T n'est pas une T-isotopie et satisfait seulement aux conditions du № 3; mais, dans ce cas, la démonstration b) n'est plus valable et le groupe $\{I\}$ n'est plus isomorphe à $\mathcal{A}$.

Etude de l'ensemble des π

6. *Si T est une T-isotopie du quasigroupe $Q = \mathfrak{D}H$,*

(i) *On obtient toutes les autres par la formule $T_1 = J^{-1}TJ_*$ où J décrit $\mathfrak{A}_Q$.*

(ij) *L'ensemble des T_1 est contenu dans le complexe $\mathfrak{A}T = T\mathfrak{A}_*$.*

(ijj) *Si $\mathcal{B}$ est le sous-groupe de $\mathfrak{A}_Q$, transformé par H du groupe d'automorphisme de $\mathfrak{D}$, l'ensemble des autotopies $I \in \mathfrak{A}_Q$ pour lesquelles HI donne naissance à la même T-isotopie est ta classe latérale $\mathcal{B}J$, où J est l'une d'elles.*

(iv) *Les applications π_1, définies par les diverses T_1 sont toutes semblables et $\pi_1 = \lambda\pi\lambda^{-1}$, où $\lambda = (I \to J^{-1}IJ)$.*

Preuve. (i) Soit T une T-isotopie de $Q = \mathfrak{D}H$; on a donc $T = H^{-1}H_*$. Toute isotopie H_1, projetant $\mathfrak{D}$ sur Q est $H_1 = HJ$, $J \in \mathfrak{A}_Q$, et il lui correspond la T-isotopie $T_1 = H_1^{-1}H_{1*} = J^{-1}H^{-1}H_*J_* = J^{-1}TJ_*$.

(ij) Par hypothèse $\forall I \in \mathfrak{A}$, $T^{-1}IT = U_*$, ou $I^{-1}T = TU_*^{-1}$, $U \in \mathfrak{A}$. Soit $H_1 = HJ$ l'une quelconque des isotopies qui projettent $\mathfrak{D}$ sur Q; d'après (i), $T_1 = J^{-1}TJ_*$.

Posons $T_1 = VT$, donc $V = J^{-1}TJ_*T^{-1}$, mais, par hypothèse,

$$J^{-1}T = TW_*^{-1}, \quad (W \in \mathfrak{A})$$

donc

$$V = TW_*^{-1}J_*T^{-1} = T(W^{-1}J)_*T^{-1},$$

$$T^{-1}VT = (W^{-1}J)_*.$$

Or $W^{-1}J \in \mathfrak{A}$, donc, le transformé de V par T étant dans $\mathfrak{A}_*$, V est une autotopie de Q. Comme $T_1 = VT$, l'ensemble des T_1 est contenu dans $\mathfrak{A}T$, ce dernier étant d'ailleurs confondu avec $T\mathfrak{A}_*$.

(ijj) D'après (i), on a

$$T_1 = J^{-1}TJ_*, \quad T_2 = I^{-1}TI_*, \qquad (T \text{ fixe}).$$

Pour que $T_1 = T_2$ il faut et il suffit que

$$J^{-1}TJ_* = I^{-1}TI_*,$$

$$IJ^{-1}TJ_*I_*^{-1} = T,$$

$$T^{-1}(IJ^{-1})T = (IJ^{-1})_*.$$

Cela exprime que (IJ^{-1}) est transformé en sa propre transposée par T; donc [№ 5 (vi)],

$$IJ^{-1} \in H^{-1} \mathcal{A} H = \mathcal{B}.$$

L'ensemble des I est la classe latérale $\mathcal{B} J$.

(iv) On a

$$\pi = \{I \to (T^{-1} I T) [P^{132}]\},$$

ou, en posant

$$\lambda = (I \to J I J^{-1}), \quad (J \text{ fixe} \in \mathfrak{A}_Q),$$

$$I\lambda = JIJ^{-1}, \quad I\lambda\pi = (T^{-1} J I J^{-1} T) [P^{132}]$$

$$(I\lambda\pi)_* = T^{-1} J I J^{-1} T.$$

D'autre part

$$(I\pi_1)_* = T_1^{-1} I T_1, \quad (T_1 = J^{-1} T J_*), \quad \text{(i)}$$

d'où

$$(I\pi_1)_* = J_*^{-1} (T^{-1} J I J^{-1} T) J_* = J_*^{-1} (I\lambda\pi)_* J_*,$$

$$I\pi_1 = J^{-1} (I\lambda\pi) J = I\lambda\pi\lambda^{-1},$$

$$\pi_1 = \lambda\pi\lambda^{-1}.$$

Remarques. I. Q peut être isotope de deux quasigroupes demi-symétriques non isomorphes, $\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}'$. Alors les applications π relatives à $\mathfrak{D}$ ne sont pas nécessairement semblables aux π relatives à $\mathfrak{D}'$.

II. Il découle de (ijj) que l'ensemble des T (distinctes) a pour cardinal $\mathfrak{A}_Q : \mathcal{B}$, c. à d. l'indice de $\mathcal{A}$, groupe d'automorphisme de $\mathfrak{D}$ dans son groupe d'autotopie.

III. Pour avoir la totalité des T-isotopies (distinctes) il suffit de multiplier par l'une d'elles un système de représentants des classes latérales $\mathcal{B} I$: $\{T_1\} = (1, I, I', I'', \ldots) T$.

7. *Si π et π_1 sont deux applications définies comme au* № 5 (ijj)

(i) *Chacune est le produit de l'autre par un automorphisme interne de* $\mathfrak{A}$.

(ij) *Pour que deux T-isotopies, T & T_1, définissent la même application π il faut et il suffit que $T_1 T^{-1}$ appartienne au centre de* $\mathfrak{A}_Q$.

(ijj) *Si $\mathfrak{A}$ est abélien, toutes les π se réduisent à une seule.*

(iv) *L'ensemble des π distinctes a pour cardinal* $(\mathfrak{A} : \mathcal{B}) / |Z \cap M|$, *où* $M = \{T_1 T^{-1}\}$, *T fixe, $T_1 \in \{T\}$.*

Preuve. (i) Soient T et T_1 deux T-isotopies donnant naissance aux deux applications π et π_1 (№ 5, ijj)

$$\pi = \{I \to (T^{-1} I T) [P^{132}]\},$$

$$\pi_1 = \{I - (T_1^{-1} I T_1) [P^{132}]\}.$$

On sait, (№ 6, ij) que $T_1 = JT$, $J \in \mathfrak{A}_Q$.

On a donc

$$\pi_1 = \{I \to (T^{-1} J^{-1} I J T) [P^{132}]\},$$

de sorte qu'en posant $\alpha = (I \to J^{-1} I J)$, on a

$$\pi_1 = \alpha\pi,$$

(ij) Pour que $\pi=\pi_1$ il faut et il suffit que $\alpha=1$ ou,

$$\forall I\in\mathfrak{A},\qquad J^{-1}IJ=I,\qquad J\in Z,\qquad T_1T^{-1}\in Z.$$

(ijj) Si $\mathfrak{A}$ est abélien $Z=\mathfrak{A}$ et α est identique.

(iv) Soit L l'ensemble de toutes le T-isotopies (distinctes). On sait (№ 6, Rem. III), que, si T et T_1 sont deux d'entre-elles, on a toujours

$$T_1T^{-1}=I\in\mathfrak{A}.$$

Soit T fixe, arbitrairement choisi dans L. L'ensemble, M, des autotopies $I=T_1T^{-1}$ quand T_1 décrit L, contient au moins un élément central; soit C l'ensemble des éléments centraux de M.

$$C=Z\cap M,\ M=\{T_1T^{-1}\},\ T\ \text{fixe},\ T_1\in L.$$

Dans ces conditions, (ij), les isotopies $T_1\in CT$ définissent la même application π que T. Inversement, toute T-isotopie, T_2, définissant la même π que T, doit satisfaire à la condition (ij), $T_2T^{-1}\in Z$, donc $T_2T^{-1}\in C$. Ainsi l'ensemble des T_1 qui conduisent à la même π que T est CT.

Soit alors $T'\notin CT$, avec $T'=IT$, donc $I\notin Z$. Considérons l'ensemble des ICT; si T_1' est un de ses éléments et si $z\in C$, $T_1'=IzT\in ICT$. On aura

$$T_1'T'^{-1}=IzTT^{-1}I^{-1}=IzI^{-1},$$

et puisque z est central,

$$T_1'T'^{-1}=zII^{-1}=z.$$

Par suite, (ij), T_1' et T' définissent la même π. Ainsi tous les éléments de $ICT=CIT=CT'$ définissent la même π.

Or si $C'=Z\cap M'$, avec $M'=\{T_1'T'^{-1}\}$, T' fixe, T_1' décrivant L, l'ensemble des T_1' qui conduisent à la même π que T' est $C'T'$, d'après la première partie du raisonnement, donc

$$CT'\subseteq C'T',\qquad C\subseteq C'.$$

La même argument, appliqué à rebours, à partir de T', en allant vers $T=I^{-1}T'$, conduit à $C'\subseteq C$. Finalement $C=C'$.

Le cardinal des applications π distinctes est ainsi

$$|L|/|C|=(\mathfrak{A}:\mathscr{B})/|Z\cap M|.$$

Si $\mathfrak{A}$ est abélien $Z=\mathfrak{A}$; $|Z\cap M|=|M|=\mathfrak{A}:\mathscr{B}$ et il y a une seule π, (ijj). Si $\mathscr{B}=1$, $M=\mathfrak{A}$, $Z\cap M=Z$ et $(\mathfrak{A}:1)/|Z|=\mathfrak{A}:Z$.

8. *Pour que toutes les applications π soient des automorphismes internes de $\mathfrak{A}$ il faut et il suffit qu'il existe une isotopie, $U\subset\mathfrak{A}T$ (où T est une T-isotopie quelconque) transformant chaque élément de $\mathfrak{A}_Q$ en son propre transposé.*

PREUVE. A cause de 7, (i), si une π jouit de cette propriété, il en sera de même de toutes les autres. Soit donc $\pi_T = \{I \to (T^{-1}IT)[P^{132}]\}$ et soit $A = (I \to J^{-1}IJ)$, (J fixe dans $\mathfrak{A}_Q$), un automorphisme interne de $\mathfrak{A}_Q$. Pour que $A = \pi_T$ il faut et il suffit que

$$\forall I \in \mathfrak{A}, \qquad J^{-1}IJ = (T^{-1}IT)[P^{132}],$$

ou

$$J_*^{-1} I_* J_* = T^{-1}IT, \qquad I_* = J_* T^{-1} I T J_*^{-1}.$$

Cela exprime que (TJ_*^{-1}) transforme toute autotopie de Q en sa propre transposée. Si U est une telle isotopie, U appartient, № 4, iv, à l'ensemble NT_1. Comme T_1 est une T-isotopie quelconque, on peut choisir $T_1 = T$, $U = nT$, $n \in N$, et alors $J_* = U^{-1}T = T^{-1}n^{-1}T$.

Mais, par hypothèse, T transforme toute autotopie de Q en la transposée d'une autre. Pour que J soit dans $\mathfrak{A}_Q$ il faut et il suffit que n^{-1} soit aussi une autotopie de Q, $n^{-1} = I^{-1}$, et ainsi $U = IT \in \mathfrak{A}T$.

L'existence de U exige que $\mathfrak{A} = \mathcal{H}$.

RÉFÉRENCES

[1] A. SADE: *Paratopie et autoparatopie des quasigroupes.* Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 76, (1962), 89—96.

[2] A. SADE: *Quasigroupes demi-symétriques. Isotopies préservant la demi-symétrie*, Math. Nachr. 1966.