PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 171 (1966)

RAZLIČITI OBLICI ELEMENTARNOG POMERANJA KRUTOG TELA

Borislav Lilić

1. Pristupanje problemu

Raspravljanju problema o različitim oblicima elementarnog pomeranja krutog tela može se pristupiti na dvojak način:

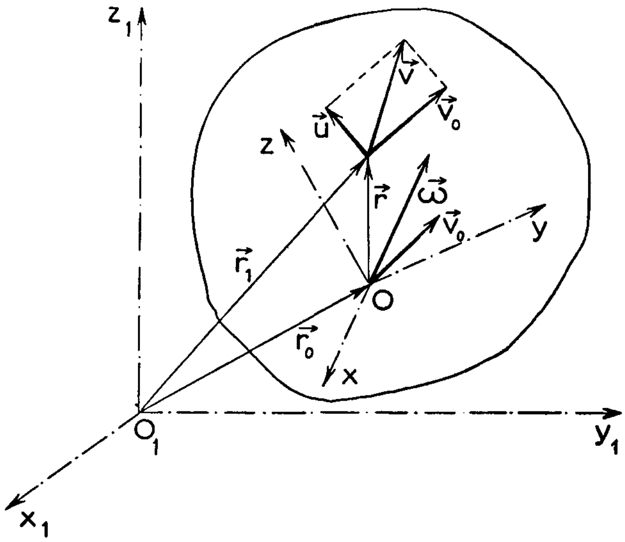
a. preko teorije vektora vezanih za prave, i

b. preko principa virtuelnih radova.

Upoznaćemo se ponaosob sa takva dva pristupa.

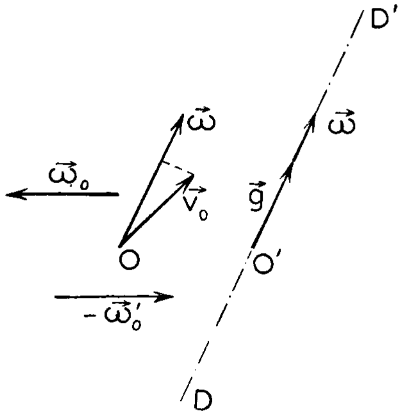
A. Pristup preko teorije vezanih vektora. — Pri proučavanju raspodele brzina u tačkama slobodno pokretnog krutog tela dolazi se do sledećih zaključaka.

Brzina $\vec{v}$ ma koje tačke M tela jeste rezultanta iz brzine $\vec{v}_0$ od trenutne translacije jednake brzini proizvoljno izabranog pola O u telu i iz brzine $\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



Sl. 1

od trenutne rotacije $\vec{\omega}$ oko izvesne ose koja prolazi kroz pol O (sl. 1). No, translaciona brzina $\vec{v}_0$ može se zameniti spregom rotacija $\vec{\omega}_0$, $-\vec{\omega}_0'$, čiji je momenat jednak $\vec{v}_0$, tako da će stanje brzina raznih tačaka tela biti isto kao kada bi telo vršilo tri istovremene rotacije $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}_0$, $-\vec{\omega}_0'$ (sl. 2). Time je proučavanje raspodele brzina u pokretnom telu prevedeno na teoriju o slaganju rotacija. Za ovu teoriju, pak, utvrđeno je da u njoj vladaju pravila sadržana u opštoj teoriji vektora vezanih za prave. Odatle se onda neposredno zaključuje da, kada se položaj pola O u telu menja, rotacija $\vec{\omega}$ kao glavni vektor sistema od tri rotacije $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}_0$, $-\vec{\omega}_0'$ ostaje invarijantna, dočim se translaciona brzina $\vec{v}_0$ kao glavni momenat toga rotacionog sistema preinačuje, no tako da njegova projekcija g na pravac rotacionog vektora $\vec{\omega}$ ostaje takođe invarijantna. U važnom posebnom slučaju, kada se novi pol O' uzme na centralnoj osi DD' sistema vezanih vektora $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}_0$, $-\vec{\omega}_0'$, translaciona brzina $\vec{v}_0$ postaje kolinearna sa rotacionim vektorom $\vec{\omega}$ i jednaka $\vec{g}$ (sl. 2): dakle, stanje brzina u telu biće isto kao kada bi ono vršilo trenutno helikoidalno kretanje oko ose DD', sa ugaonom brzinom $\vec{\omega}$ i brzinom klizanja $\vec{g}$.



Sl. 2

Prelaženje od vektorskih formulacija na skalarne zasniva se takođe na teoriji o slaganju translacija i rotacija. Naime, prema toj teoriji translaciona brzina $\vec{v}_0$ i rotaciona brzina $\vec{\omega}$ daju se razložiti u po tri konkurentne i nekomplanarne komponente, — recimo, u pravcima osa pravouglog Dekartovog koordinatnog sistema $Oxyz$, vezanog za telo i sa koordinatnim početkom u izabranom polu O. Budući da svakoj od tih komponentnih brzina odgovara određeno elementarno pomeranje krutog tela, u takvom smislu se onda shvata da slobodno kruto telo može da vrši tri trenutne translacije i tri trenutne rotacije, koje su sve među sobom nezavisne. Tih šest nezavisnih elementarnih pomeranja, pomoću kojih se može ostvariti proizvoljno elementarno pomeranje krutog tela, određuju ujedno i njegovih šest stepena slobode kretanja.

— Kada se uporede rasuđivanja i stavovi u kinematici o slaganju translacija i rotacija, kojima je potčinjeno jedno kruto telo, sa rasuđivanjima i stavovima u statici o slaganju sila i spregova sila na krutom telu, uviđa se njihova vrlo bliska analogija. Razlozi za mogućnost takve analogije leže u tome što teorija o slaganju translacija i rotacija na krutom telu, sa jedne strane, i teorija o slaganju sila i spregova sila na njemu, sa druge strane, predstavljaju jednu istu svojevrsnu geometriju obuhvaćenu u teoriji vektora vezanih za prave. U analogiji tih dveju teorija o slaganju raznorodnih vektorskih veličina na krutom telu, silama po određenim napadnim linijama odgovaraju rotacije oko takođe određenih osa, a spregovima sila odnosno, tačnije, momentima spregova sila u određenim pravcima odgovaraju translacije u određenim pravcima. Sledstveno tome onda, ako se u nastavnom kursu iz mehanike podrobnije izložila prvo jedna teorija o slaganju, izlaganje druge teorije potom može se skratiti do te mere da se stavovi pretohodne teorije naprosto prepišu uz zamenu jedino odgovarajućih veličina; ili, metodički još bolje, ako se prethodno izložila zajednička teorija vezanih vektora, obe teorije o slaganju bi posle toga postale samo njena primena u jednom sasvim kratkom obimu.

Kao i uopšte kod drugih prirodno-naučnih analogija, međutim, ne radi se ni ovde o prostom konstatovanju analogije između dveju mehaničkih oblasti i mogućem skraćivanju u njihovom izlaganju; time bi se značaj jedne analogije ograničio na njenu takoreći pasivnu ulogu. Pravi značaj svake prirodno-naučne analogije treba da se sastoji u njenoj aktivnoj ulozi: da se saznanja do kojih se dođe u jednoj prirodno-naučnoj oblasti pokušaju preneti na drugu analognu oblast. U takvom aktivnom smislu, zapravo, i namerava se da se u ovoj raspravi iskoristi postojeća statičko-kinematička analogija za razmatranje problema istaknutog u njenom naslovu.

Na prvi pogled uočava se sledeća statičko-kinematička analogija, koja bi se ujedno mogla smatrati i kao fundamentalna, naporedo sa onom između statičkog slaganja sila i spregova sila i kinematičkog slaganja rotacija i translacija. Naime, u geometrijskoj statici ustanovljava se da se ma kakav sistem sila na krutom telu redukuje uopšte na jednu silu, koja napada proizvoljno izabranu tačku tela, i na jedan spreg, čiji momenat uopšte zaklapa bilo kakav ugao sa silom; takav redukcioni oblik jeste takozvani torzer za izabranu tačku kao redukcioni pol. U posebnom slučaju, za redukcioni pol uzet na centralnoj osi posmatranog sistema sila torzer prelazi u dinamu, kod koje su redukciona sila i momenat redukcionog sprega kolinearni. Kada se, pak, sila i momenat sprega kod redukcionog torzera razlože u po tri komponente u pravcima osa jednog koordinatnog sistema sa početkom u redukcionom polu, dobijaju se tri sile u određenim pravcima koordinatnih osa i tri sprega sila sa momentima u istim pravcima. Saobrazno takvoj komponentnoj formi redukcionog torzera uspostavljaju se onda i šest uslova za ravnotežu sistema sila na krutom telu, kojima se tih šest mogućih nezavisnih komponenata treba da anuliraju: tri o projekcijama sila na koordinatne ose i tri o momentima sila u pogledu na iste ose. To su fundamentalne činjenice u geometrijskoj statici krutog tela. Upoređujući ih sa fundamentalnim činjenicama u kinematici krutog tela, na koje se maločas podsetilo, ustanovljava se opet njihova potpuna analogija: statičkom redukcionom torzeru od sile i sprega sila, sa izvesnim uglom između sile i momenta sprega uopšte različitim od nule za proizvoljan redukcioni pol, analogan je kinematički torzer od trenutne rotacije i trenutne translacije, takođe pod izvesnim uglom uopšte različitim od nule za proizvoljan pol; statičkoj redukcionoj dinami kao posebnom statičkom torzeru za redukcioni pol na centralnoj osi sistema sila, sa kolinearnom silom i momentom sprega, analogna je kinematička dinama u vidu trenutnog helikoidalnog kretanja kao posebni kinematički torzer za pol na centralnoj osi sistema od tri redukcione rotacije, sa kolinearnom trenutnom rotacijom i trenutnom translacijom; i još, trima silama i trima spregovima sila u određenim pravcima koordinatnih osa analogne su tri rotacije i tri translacije takođe u određenim pravcima koordinatnih osa.

Zajedno sa statičko-kinematičkom analogijom o slaganju, ovakva fundamentalna analogija između statičkog i kinematičkog torzera, diname i šest torzerskih komponenata bila je već i do sada poznata i korišćena u mehanici. Međutim, na utanačavanju različitih redukcionih oblika u geometrijskoj statici moglo se otići znatno dalje, takoreći do krajnjih mogućih granica, nego što je to slučaj u kinematici. Zbog toga se sasvim prirodno postavlja pitanje: da li se, nastavljajući već uspostavljenu fundamentalnu analogiju između geometrijske statike i kinematike krutog tela, rezultati o različitim redukcionim oblicima sistema sila na krutom telu u geometrijskoj statici daju preneti u kinematiku?

Naime, u geometrijskoj statici se uspostavilo da se uslovi za ravnotežu jednog slobodnog krutog tela mogu formulisati na više načina, zahvaljujući dvojakom njihovom karakteru: o projekcijama sila na ose i o momentima sila u pogledu na ose. U zavisnosti od mogućih kombinacija jedne i druge vrste uslova, za ravnotežu opšteg sistema sila na krutom telu postoje četiri različite formulacije, svagda u ukupnom invarijantnom broju od šest ravnotežnih uslova: [1]

1° tri o projekcijama sila i tri o momentima sila,

2° dva o projekcijama sila i četiri o momentima sila,

3° jedan o projekcijama sila i pet o momentima sila, i

4° šest o momentima sila.

U udžbeničkoj literaturi redovno se nalazi jedino formulacija 1°, a tek pogdegde i formulacija 4°. Izbor projekcijskih i momentnih osa za takve četiri formulacije ravnotežnih uslova, mada slobodan u vrlo širokim granicama, podleže izvesnim ograničenjima, koja se utvrđuju saobraznim teoremama. Za posebne sisteme sila na krutom telu brojevi mogućih formulacija ravnotežnih uslova i mogući izbori projekcijskih i momentnih osa redukuju se na odgovarajuće načine.

Zatim, u geometrijskoj statici se pokazuje da između uslova za ravnotežu jednog sistema sila na krutom telu i uslova za ekvivalenciju dvaju sistema sila, koji ponaosob dejstvuju na jedno isto kruto telo pri istom mehaničkom stanju, postoji biunivoka korespondencija: iz uslova za ravnotežu izvode se korespondentni uslovi za ekvivalenciju, i obratno. Prema tome, i za uslove ekvivalencije dva sistema sila postoje takođe četiri različite formulacije, korespondentne prednjim formulacijama ravnotežnih uslova. Da bi se dobile formulacije za ekvivalenciju, potrebno je samo da se ravnotežne jednakosti sa nulom zbirova projekcija svih sila i zbirova svih njihovih momenata za jedan sistem sila prevedu na jednakosti između zbirova projekcija svih sila i zbirova svih njihovih momenata uzetih ponaosob za dva sistema sila. Tako bi, na primer, formulacija uslova za ekvivalenciju, korespondentna formulaciji 4° uslova za ravnotežu, glasila: Da bi dva sistema sila bila ekvivalentna, potrebno je i dovoljno da zbirovi njihovih momenata, odnosno njihovi glavni momenti, u pogledu na šest osa, za koje su oni nezavisni, budu jednaki među sobom.

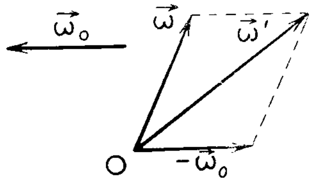
Najzad, u geometrijskoj statici na osnovu uslova za ekvivalenciju izvode se različiti oblici redukcije sistema sila na krutom telu. Jer, uslovi za ekvivalenciju pružaju ujedno pogodne kriterijume da se jedan sistem sila na krutom telu zameni drugim njemu ekvivalentnim po mehaničkom dejstvu; postavljajući zahtev da ovaj drugi sistem bude što je moguće prostiji, prelazi se neposredno na problem o redukciji sistema sila na krutom telu, koji se rešava upravo pomoću uslova za ekvivalenciju. Na taj način, u korespondenciji sa prednje četiri formulacije ravnotežnih uslova dobila bi se i četiri različita moguća oblika redukcije sistema sila na krutom telu. Na primer, formulaciji 1° ravnotežnih uslova odgovarala bi ovakva redukcija, imajući na umu uz to da se tri glavna momenta u pogledu na tri nekomplanarne ose mogu predstaviti kao tri sprega sila sa momentima u pravcima istih osa i jednakim respektivnim glavnim momentima: Sistem sila na krutom telu može se redukovati na tri sile u pravcima osa jednog proizvoljno izabranog trijedra i na tri sprega sila sa momentima u pravcima istih osa; pri tome se, radi uprošćenja, zadržalo na izboru najprostijeg prostornog rasporeda projekcijskih i momentnih osa. — Ali da bi se posvedočilo, kako je neophodno da se bude oprezan u ustanovljavanju mogućih redukcionih oblika, korespondentnih prednjim formulacijama ravnotežnih uslova, navešćemo i ovaj drugi primer. Prema prvom primeru, reklo bi se u prvi mah da bi formulaciji 4° ravnotežnih uslova odgovarao ovakav redukcioni oblik: Sistem sila na krutom telu može se redukovati na šest spregova sa momentima u pravcima osa za koje su glavni momenti toga sistema sila nezavisni i jednaki ovim glavnim momentima. Dakako, ovakav redukcioni oblik nije tačan. Jer, ako se za šest glavnih momenata mogu naći mnogobrojni rasporedi osa u prostoru, za koje su oni nezavisni, to nikako nije moguće za šest nezavisnih spregova: šest spregova uvek se daju složiti u jedan jedini sa momentom u proizvoljnom pravcu, koji se onda razlaže u svega tri sprega sa momentima u pravcima triju nekomplanarnih osa. Zbog toga, ovakav redukcioni oblik 4° treba interpretirati na drugačiji, pravilan način. Recimo, uzimajući momentne ose u pravcima ivica proizvoljnog tetraedra, za svaki glavni momenat bi se mogla odrediti po jedna sila na naspramnoj ivici, tako da bi se dobilo šest tetraedarskih sila kao jedan posebniji redukcioni oblik pod 4° sistema sila na krutom telu.

Pokušajmo sada da takva stečena znanja u geometrijskoj statici prenesemo u kinematiku krutog tela, u smislu analogije koja postoji između njih.

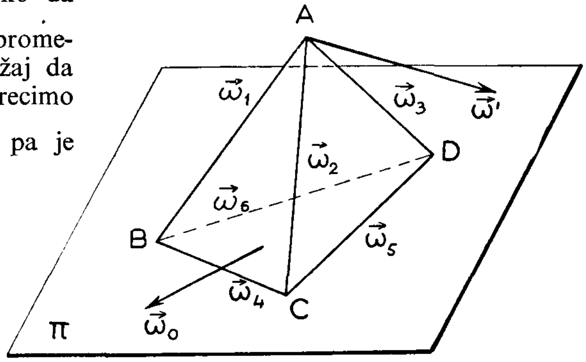
Već je naglašeno da postoji analogija između tri rotacije i tri translacije u pravcima osa određenog, inače proizvoljno izabranog, koordinatnog sistema u kinematici i tri sile i tri sprega sila takođe u pravcima koordinatnih osa u geometrijskoj statici. No, ovakav redukcioni oblik u geometrijskoj statici bio bi samo poseban slučaj onog što odgovara formulaciji ravnotežnih uslova pod 1°. Izbor projekcijskih i momentnih osa po toj formulaciji daleko je opštiji: njihov raspored je u svemu ostalom proizvoljan, sem što ni tri projekcijske ose ni tri momentne ose ne smeju da budu ponaosob paralelne sa po kakvom ravni. Kada tako stoje stvari sa veoma širokim izborom projekcijskih i momentnih osa u geometrijskoj statici, da li će i u kinematici biti dopušten analogan izbor rotacionih i translacionih osa? Za translacione ose neposredno se uviđa da je odgovor potvrdan: budući da je brzina kod translatornog kretanja krutog tela slobodan vektor, svaka od triju translacionih osa može se iz svog prvobitnog položaja u koordinatnom sistemu premestiti u prozvoljan paralelan položaj; pri tome, saobrazno ograničenju za momentne ose, ni translacione ose neće moći biti paralelne kakvoj ravni. Što se tiče rotacionih osa, sloboda u njihovom paralelnom pomeranju ne daje se više uvideti neposredno; ali, nema razloga ne očekivati da bi, u smislu fundamentalne statičko-kinematičke analogije, dalja rasuđivanja u kinematici analogna onima u geometrijskoj statici dovela do takvog zaključka.

Ili, pogledajmo kinematički redukcioni oblik, koji bi odgovarao onom statičkom pod 4° sa šest glavnih momenata u pogledu na ose. U prvi mah bez dovoljno opreznosti pomislilo bi se da sa momentima sila treba da stoje u analogiji spregovi rotacija, koji se pak svode na translacije, pa bi se pogrešno zaključilo da bi kinematički torzer, odnosno tri translacije i tri rotacije bile ekvivalentne sa šest translacija u pravcima osa za koje glavni momenti sila uopšte mogu biti nezavisni. Jedan poseban raspored takvih momentnih osa bio bi, na primer, onaj malopre pomenuti njihov tetraedarski raspored. Međutim, u punoj analogiji sa konstatovanom nemogućnošću da postoji statički redukcioni oblik sa šest spregova sila, ni u kinematici nikako nije moguć redukcioni oblik sa šest translacija. Jer, kao i kod spregova sila, samo tri nekomplanarne translacije mogu biti međusobno nezavisne, dočim se ostale tri daju uključiti u njih. Operišući, pak, pravilno sa glavnim momentima rotacija, umesto pogrešno sa njihovim spregovima, došlo bi se do zaključka da će se kinematički redukcioni oblik 4° sastojati od šest rotacija raspoređenih na odgovarajućim statičkim momentnim osama, koje bi u posebnom slučaju mogle sačinjavati i tetraedarski raspored.

Evo, kako se, primerice, takav redukcioni oblik sa šest rotacija u tetraedarskom rasporedu može izvesti na jedan brz način, opet po analogiji sa izvođenjem u geometrijskoj statici. Radi toga, pođimo od kinematičkog torzera, koji sačinjava jedna rotacija $\vec{\omega}$ i jedan spreg rotacija $\vec{\omega}_0$, $-\vec{\omega}_0'$ (sl. 2). Budući da se rotacije sprega smeju pomeriti u prostoru tako da njihov momenat $\vec{v}_0$ ostane nepromenjen, dovedimo ih u takav položaj da napadna tačka jedne rotacije, recimo rotacije $-\vec{\omega}_0'$, bude u polu O, pa je



Sl. 3



Sl. 4

složimo sa rotacijom $\vec{\omega}$ u rezultantnu rotaciju $\vec{\omega}'$ (sl. 3). Time je kinematički torzer preveden na krst rotacija $\vec{\omega}'$, $\vec{\omega}_0$. Zatim, po poznatom postupku iz geometrijske statike krst rotacija daje se uopšte razložiti u šest rotacija u pravcima ivica jednog tetraedra. Naime, na osi jedne rotacije krsta, recimo rotacije $\vec{\omega}'$, uoči se jedna tačka A, a kroz osu druge rotacije $\vec{\omega}_0$ krsta postavi se jedna ravan π mimo tačke A (sl. 4). Uočivši još u ravni π jedan trougao BCD, spoje se njegova temena sa tačkom A, pa se tako formira tetraedar $ABCD$. Potom se rotacija $\vec{\omega}'$ krsta razloži u tri konkurentne rotacije $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, $\vec{\omega}_3$ po tetraedrovim ivicama AB, AC, AD, a rotacija $\vec{\omega}_0$ krsta u tri rotacije $\vec{\omega}_4$, $\vec{\omega}_5$, $\vec{\omega}_6$ po ivicama BC, CD, DB, koje sa rotacijom $\vec{\omega}_0$ leže u ravni π (pomoću elementarnih operacija, recimo po Kulmanovoj metodi). Na taj način, polazni kinematički torzer $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}_0, -\vec{\omega}_0'$ u krajnjoj konzekvenciji našao se transformisan na ekvivalentan sistem od šest rotacija $\vec{\omega}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, 6$), koje su među sobom nezavisne po samom načinu kako su određene. A to se zapravo i htelo izvesti.

Iz ovog primera se vidi kako se fundamentalna statičko-kinematička analogija daje nastaviti i dalje. Transformacijama nad kinematičkim torzerom analognim onim u geometrijskoj statici tako bi se uspelo doći do tipskih kinematičkih redukcionih oblika, sastavljenih od rotacija i translacija, koji bi bili analogni onim tipskim statičkim redukcionim oblicima pod 1°, 2°, 3°, 4°, sastavljenim od sila i spregova sila. Pri tome, kao što je slučaj u geometrijskoj statici sa spregovima sila, ni u kinematici redukcioni oblici ne mogu sadržavati više od tri nezavisne translacije. Na taj način, već sama statičko-kinematička analogija dopustila bi da se u kinematici krutog tela, izostavljajući podrobnija posebna izvođenja, ustanove sledeća četiri tipska redukciona oblika:

1° tri translacije i tri rotacije,

2° dve translacije i četiri rotacije,

3° jedna translacija i pet rotacija,

4° šest rotacija,

pri čemu rasporedi translacionih i rotacionih osa, za koje će translacije i rotacije biti nezavisne među sobom, treba da budu istovetni sa analognim rasporedima projekcijskih i momentnih osa u statici. Precizne formulacije takva četiri kinematička redukciona oblika mogla bi se onda dobiti jednostavnim prepisivanjem analognih statičkih formulacija, zamenjujući jedino statičke veličine analognim kinematičkim veličinama.

Ustanovljeni kinematički redukcioni oblici istovremeno će predstavljati tražene različite oblike elementarnog pomeranja krutog tela, koji zapravo i jesu predmet ove rasprave. Doista, elementarno pomeranje krutog tela sačinjava skup elementarnih pomeranja svih njegovih tačaka; da bi se, pak, poznavala ova pomeranja, dovoljno je poznavati raspodelu brzina u svim tačkama; a to se upravo postiže ustanovljavanjem kinematičkih redukcionih oblika.

B. Pristup preko principa virtuelnih radova. — U prethodnom pristupu preko teorije vezanih vektora, razvijajući dalje fundamentalnu analogiju između geometrijske statike i kinematike krutog tela, bili smo prinuđeni da konstatujemo izvesnu neočekivanu nedoslednost, koja je iziskivala naročitu opreznost i naknadna rasuđivanja da bi se otklonila. Naime, upoređivanje teorije o slaganju translacija i rotacija sa teorijom o slaganju sila i spregova na krutom telu navelo je da se u fundamentalnu analogiju dovedu rotacije sa silama, a translacije kao spregovi rotacija sa spregovima sila. Potom, kada se prešlo na ustanovljavanje statičkih redukcionih oblika, koji bi bili korespondentni različitim formulacijama ravnotežnih uslova, uvidelo se da uslovima o projekcijama sila treba da odgovaraju redukcioni spregovi sila, a uslovima o momentima sila treba da odgovaraju redukcione sile. To se onda odrazilo takoreći neočekivano i na kinematičke redukcione oblike: ravnotežni uslovi o projekcijama sila postali su analogni translacijama, a ravnotežni uslovi o momentima rotacijama. — No, treba napomenuti, da je takva nedoslednost ipak samo prividna. Razlog zašto se ona pojavila nalazi se u tome što se u prvi mah zadržalo samo na formalnom tretiranju korespondencija i analogija; čim se, pak, povelo računa o suštinsko-fizičkoj strani njihovoj, nedoslednost je odmah nestala.

Međutim, statičko-kinematička analogija daje se ustanoviti takođe i na jedan drugi način: preko principa virtuelnih radova. Pokazaće se da je takva nova analogija, za razliku od one prethodne uspostavljene na osnovu teorije vezanih vektora, daleko intimnija, te da štaviše prerasta u prirodnu povezanost između statičkih i kinematičkih fenomena na krutom telu. Neće onda biti nerazumljivo što će se preko tako uspostavljene statičko-kinematičke povezanosti i elegantnije doći do rezultata o različitim oblicima elmentarnog pomeranja krutog tela.

— U analitičkoj statici se na osnovu principa virtuelnih radova izvodi opšta jednačina statike, koja vredi za sve materijalne sisteme sa vezama bez trenja. Budući da između materijalnih tačaka krutog tela, koje ostaju na nepromenljivim uzajamnim rastojanjima, vladaju takođe veze bez trenja, opšta jednačina statike će vredeti posebno i za kruto telo. Potom, iz opšte jednačine statike za ma kakav materijalan sistem sa vezama bez trenja izvode se sledeće dve opšte teoreme: [2]

T e o r e m a I. *Kada veze bez trenja dopuštaju izvesnu translaciju celokupnog materijalnog sistema paralelno nekoj osi, onda je za ravnotežu sistema potrebno da zbir projekcija direktno napadnih sila bude jednak nuli.*

T e o r e m a II. *Kada veze bez trenja dopuštaju izvesnu rotaciju celokupnog materijalnog sistema oko neke ose, onda je za ravnotežu sistema potrebno da glavni momenat direktno napadnih sila u pogledu na tu osu bude jednak nuli.*

Lako se otkriva jednostavni fizički smisao ovih dveju teorema. Naime, kada veze dopuštaju translaciju sistema paralelno nekoj osi odnosno njegovu rotaciju oko neke ose, onda bi translaciono odnosno rotaciono pomeranje sistema iz stanja mirovanja mogle da proizvedu jedino: komponente direktno napadnih sila paralelne translacionoj osi odnosno direktno napadne sile koje daju momente u pogledu na rotacionu osu. Da bi se, pak, radi obezbeđenja ravnotežnog stanja sistema otklonila mogućnost takvih pomeranja, potrebno je postaviti uslov da bude jednak nuli algebarski zbir algebarskih vrednosti takvih komponenata odnosno algebarski zbir takvih momenata. A to zapravo i ustanovljavaju prednje dve teoreme.

One nalaze naročito podesnu primenu pri proučavanju ravnoteže krutog tela, kako slobodnog tako i neslobodnog. Ostanimo i dalje na slučaju slobodnog krutog tela, koji čini predmet rasprave.

Odmah se može reći da kod slobodnog krutog tela veze dopuštaju translaciju paralelno proizvoljnoj osi i rotaciju oko takođe proizvoljne ose. Tako se za slobodno kruto telo, primenom prednjih dveju teorema, daju sastaviti nebrojeno mnogo potrebnih ravnotežnih uslova o projekcijama sila na razne ose i o momentima sila u pogledu na takođe razne ose. Ali, svi ti potrebni ravnotežni uslovi nisu nezavisni među sobom. U stvari, nezavisni će biti samo oni ravnotežni uslovi koji se odnose na kinematički nezavisne translacije i rotacije. Na primer, kako je ranije već bilo rečeno, nezavisne među sobom će biti tri translacije u pravcima osa jednog koordinatnog sistema i tri rotacije oko istih osa; ili, nezavisne će biti takođe šest rotacija oko osa u pravcima ivica jednog tetraedra. Da bi se, dakle, u primeni analitičke statike mogle sastavljati nezavisne ravnotežne jednačine o projekcijama sila na ose i o momentima sila u pogledu na ose, potrebno je prethodno u kinematici raspraviti problem o korespondentnim translacionim i rotacionim osama, za koje će translacije i rotacije biti među sobom nezavisne. U rešavanju takvog problema u kinematici kao polazna osnova najpre se daju neposredno utvrditi dve činjenice.

Prvo, na osnovu teorije o slaganju translacija i rotacija može se jedan njihov sistem transformisati u drugi njemu ekvivalentan u kinematičkom smislu. Za takvu ekvivalentnu transformaciju potrebno je i dovoljno da dva sistema translacija i rotacija, prvobitni i transformisani, kada se uz prethodno predstavljanje svake translacije kao sprega po dve rotacije, oni shvate kao dva sistema vektora vezanih za prave, zadovoljavaju uslove ekvivalencije za ove sisteme: da njihovi glavni vektori i glavni momenti u pogledu na proizvoljnu tačku prostora budu podjednaki. Na taj način, jedan sistem nezavisnih translacija i rotacija može se ekvivalentno zameniti sasvim drugojačijim sistemom takođe nezavisnih translacija i rotacija. Saobrazno tome onda, javlja se mogućnost i da se jedan sistem nezavisnih ravnotežnih jednačina ekvivalentno zameni drugim.

Drugo, ukupan broj nezavisnih translacija u pravcima određenih osa i rotacija oko određenih osa može biti najviše šest. Ta činjenica uslovljena je postojanjem kinematičkog torzera kao predstavnika opšte raspodele brzina tačaka na krutom telu, sa jedne strane, i trodimenzionalnošću prostora, sa druge strane. Tako, ilustrujući opet sa dva prednja primera, kinematički torzer se prevodi u ekvivalentni sistem od tri translacije po osama i tri rotacije oko osa jednog koordinatnog sistema; ili, pak, kinematički torzer prevodi se u ekvivalentni sistem od šest rotacija oko osa u tetraedarskom rasporedu. Taj maksimalni broj od šest nezavisnih translacija i rotacija ujedno definiše broj od šest stepena slobode kretanja krutog tela. A u korespondenciji sa tim brojem onda stoji i maksimalni broj od šest nezavisnih ravnotežnih jednačina, tako da nezavisne potrebne ravnotežne jednačine u tome maksimalnom broju šest postaju istovremeno i dovoljne.

Na osnovu takvih dveju činjenica trebalo bi potom odrediti sve moguće kombinacije i prostorne rasporede translacionih i rotacionih osa sa nezavisnim translacijama i rotacijama. Nije teško predvideti da bi to određivanje zahtevalo dosta duga i složena rasuđivanja, tako da se može reći da se u njemu zapravo i sastoji čitav postavljeni problem. A ovaj ujedno čini osnovni predmet rasprave.

U rešavanju toga problema mogao bi se, očevidno, upotrebiti geometrijski postupak na osnovu teorije vezanih vektora. Tada bi predstojala sva ona obimna geometrijska razmatranja, koja su se morala sprovesti u geometrijskoj statici pri ustanovljavanju kombinacija i prostornih rasporeda projekcijskih i momentnih osa sa nezavisnim ravnotežnim jednačinama [1]. A kada bi se u kinematici takvim geometrijskim postupkom jednom odredile sve moguće kombinacije i rasporedi nezavisnih translacionih i rotacionih osa, time bi ujedno bila učinjena usluga i statici: na osnovu prednjih dveju teorema I i II analitičke statike imale bi se takođe i sve kombinacije i rasporedi nezavisnih projekcijskih i momentnih osa.

Kako se vidi, prednja rasuđivanja na osnovu principa virtuelnih radova vodila su neprestano od kinematike ka statici. To je sasvim razumljivo kada se ima na umu pravi mehanički smisao toga principa. Ipak, u pogledu intuitivnosti mora se priznati da geometrijska statika dolazi ispred kinematike. Već sama istorija mehanike pruža potvrdu za takvo mišljenje; odista, dok statika vodi poreklo još iz antičke Grčke, dotle se kinematika krutog tela razvila tek u prošlom stoleću. U istom smislu treba razumeti i razloge što je autor ove rasprave pristupio razmatranju u prvom redu različitih formulacija ravnotežnih jednačina i uslova za njihovu nezavisnost u geometrijskoj statici.

Međutim, ako je problem o nezavisnim projekcijskim i momentnim osama unapred rešen u geometrijskoj statici, sasvim je na mestu postaviti pitanje: Da li je moguće dobijene rezultate u geometrijskoj statici iskoristiti za rešavanje analognog problema o nezavisnim translacionim i rotacionim osama u kinematici?

Da bismo dali odgovor na ovo pitanje, obratimo se ponovo teoremama I i II. U saglasnosti sa napred objašnjenim njihovim fizičkim smislom, te dve teoreme navode da se projekcijske i momentne ose u statici krutog tela na jedan sasvim prirodan način identifikuju sa translacionim i rotacionim osama u kinematici krutog tela. Zaista, teoreme neposredno utvrđuju da se translacione i rotacione ose pri elementarnom pomeranju krutog tela iz stanja mirovanja imaju uzeti respektivno za projekcijske i momentne ose direktno napadnih sila na krutom telu, koje su kod slobodnog krutog tela, zbog odsustva spoljašnjih sila veza, i jedine napadne sile. Ali, taj se zaključak daje takođe i obrnuti; jer, svaka osa za koju bi zbir projekcija odnosno zbir momenata napadnih sila bio različiti od nule mogla bi se uzeti za osu po kojoj će sile izvršiti jednu translaciju odnosno oko koje će izvršiti jednu rotaciju, tako da se sad obratno projekcijske i momentne ose javljaju respektivno kao translacione i rotacione ose.

Istovremeno, iz takve identifikacije projekcijskih i momentnih osa sa translacionim i rotacionim osama neposredno se uviđa da će takođe i uslovi za nezavisnost prvih statičkih osa biti identični sa uslovima za nezavisnost drugih kinematičkih osa. Na taj način, izvedena je ovakva

T e o r e m a III. *Svaka kombinacija i prostorni raspored osa, za koje se u statici krutog tela daju sastaviti nezavisne ravnotežne jednačine o projekcijama i mo-*

mentima sila, jeste ujedno kombinacija i prostorni raspored osa, za koje se u kinematici krutog tela dobijaju respektivno nezavisne translacije i rotacije.

Ova teorema III, očevidno, dopušta da se svi rezultati do kojih se došlo u geometrijskoj statici o različitim formulacijama ravnotežnih uslova sa opštim rasporedima projekcijskih i momentnih osa, za koje su ti uslovi nezavisni, prevedu na respektivan način u kinematiku krutog tela. U saglasnosti sa zaključkom u prethodnom pristupu A preko teorije vezanih vektora, za to će biti dovoljno da se statički stavovi naprosto prepišu, uz zamenu samo statičkih veličina respektivnim kinematičkim veličinama. A tako dobijeni kinematički stavovi o različitim sistemima nezavisnih translacija i rotacija pružiće istovremeno različite oblike elementarnog pomeranja krutog tela, koji se i hoće ustanoviti ovom raspravom.

— Kao što je bilo najavljeno na početku ovog drugog pristupa B, stvarno se konstatuje da princip virtuelnih radova preko prednje tri teoreme I, II, III ne samo dovodi u analogiju sile sa translacijama i momente sila sa rotacijama, nego ih na prirodan i direktan način do te mere povezuje da naprosto identifikuje projekcijske ose sa translacionim i momentne ose sa rotacionim. U tom smislu sadržajna povezanost statike i kinematike krutog tela na osnovu principa virtuelnih radova dobija metodološku prednost prema formalnoj analogiji između njih na osnovu teorije vezanih vektora.

2. Postavljanje problema

U prethodnom članu, pristupajući raspravljanju problema o različitim oblicima elementarnog pomeranja krutog tela, već se mogao određenije sagledati njegov sadržaj i obim.

Na prvom mestu, pod oblikom elementarnog pomeranja krutog tela treba podrazumevati izvestan sistem translacija i rotacija koji u jednom trenutku potpuno definiše proizvoljnu raspodelu elementarnih ili infinitezimalnih pomeranja svih tačaka krutog tela, — odnosno, što je ekvivalentno, raspodelu njihovih brzina. Pri tome jasno je da se jedna raspodela brzina može ostvariti sa nebrojeno mnogo sistema translacija i rotacija uzetih u ma kome broju; da bi se, međutim, postigla krajnje moguća određenost povezana sa krajnje mogućom uprošćenošću, pod oblikom elementarnog pomeranja krutog tela treba razumeti zapravo sistem translacija i rotacija u najmanjem broju, kada one nužno postaju i međusobno nezavisne, — dakle, takav sistem koji je u prethodnom članu bio nazivan redukcioni oblik nezavisnih translacija i rotacija. Prema tome, kada se uzmu zajedno obe karakteristike, imaće se ovakva opšta definicija: *Oblik elementarnog pomeranja krutog tela znači sistem nezavisnih translacija i rotacija, pomoću kojih se daje ostvariti proizvoljna raspodela brzina u tačkama slobodno pokretnog krutog tela.*

Primer za oblik elementarnog pomeranja krutog tela u prvom redu bio bi kinematički torzer, obrazovan od jedne translacije i jedne rotacije sa pravcima pod ma kakvim uglom u pogledu na proizvoljan pol, — oblik koji u kinematici krutog tela treba smatrati za osnovni, u tome smislu što se pri proučavanju raspodele brzina krutog tela do njega dolazi na najprirodniji način i što se iz njega takođe na prirodan način izvode i drugi oblici. Tako se iz kinematičkog torzera kao drugi oblik elementarnog pomeranja krutog tela dobija kinematička dinama, obrazovana od kolinearne translacije i rotacije u pogledu na jedan pol uzet na kinematičkoj centralnoj osi, — oblik kojim se definiše trenutno helikoidalno kretanje krutog tela. Ili, kao treći oblik iz kinematičkog torzera se izvodi kinematički krst rotacija. kod koga jedna rotacija ostaje da prolazi kroz proizvoljno izabranu tačku prostora, Sva ova tri kinematička oblika stoje u punoj analogiji sa statičkim torzerom, dinamom i krstom sila. Kao i u statici oni imaju tu zajedničku karakteristiku što su pravci njihovih translacija i rotacija proizvoljni u opštem slučaju kretanja slobodnog krutog tela.

Za mnoga teorijska razmatranja u kinematici krutog tela, a posebno za njenu praktičnu primenu potrebno je pravce translacija i rotacija učiniti određenim, te time sa vektorskih rasuđivanja preći na skalarna. U tom slučaju, broj translacija i rotacija, zadržavajući osnovni uslov da one budu nezavisne, povećava se do maksimalnog broja šest, kako je to obrazloženo u pristupnom članu. U tome maksimalnom zajedničkom broju od šest translacija i rotacija sa određenim pravcima njihovih osa može biti više kombinacija njihovih pojedinačnih brojeva. Takve različite kombinacije brojeva translacija i brojeva rotacija sa određenim pravcima njihovih osa i u ukupnom broju od šest, pri čemu one treba da ostanu nezavisne, predstavljaće upravo tražene različite oblike elementarnog pomeranja krutog tela. To je prvi deo čitavog problema.

Na drugom mestu, time što su ustanovljene sve kombinacije od po šest translacija i rotacija, pri kojima ove treba da budu međusobno nezavisne, još nije sve rešeno. Translacije i rotacije postaju određene tek kada se naznače ose u prostoru na koje se one odnose, tako da svaku kombinaciju translacija i rotacija mora da prati izvestan određen izbor njihovih osa u prostoru. Novo pitanje pojavljuje se sada u tome što ni za jednu od mogućih kombinacija nezavisnih translacija i rotacija njihove ose se ne mogu birati sasvim proizvoljno, pa da translacije i rotacije sigurno i budu nezavisne. U stvari, izbor osa u prostoru, za koje će translacije i rotacije sigurno biti nezavisne, podleže izvesnim potrebnim i dovoljnim uslovima. Ovi uslovi, iako postavljaju neizbežna ograničenja, ipak ostavljaju slobodu izbora translacionih i rotacionih osa u vrlo širokim granicama. Tako će se za svaku moguću kombinaciju nezavisnih translacija i rotacija moći odrediti nebrojeno mnogo odgovarajućih pojedinačnih rasporeda translacionih i rotacionih osa u prostoru. Skup svih tih pojedinačnih rasporeda osa za jednu od kombinacija nezavisnih translacija i rotacija sačinjavaće ono što će se zvati *opšti raspored* osa za tu kombinaciju. Drugi deo problema zapravo odnosi se na određivanje takvih opštih rasporeda osa za sve moguće kombinacije nezavisnih translacija i rotacija.

Posle prednjih utanačenja može se zaključiti da se problem o raznim oblicima elementarnog pomeranja krutog tela postavlja u ova dva dela:

prvo, *ustanoviti sve kombinacije translacija i rotacija u maksimalnom broju od šest njih, za koje će one moći biti nezavisne;* i

drugo, *za sve takve kombinacije translacija i rotacija odrediti opšte rasporede translacionih i rotacionih osa, za koje će translacije i rotacije biti sigurno nezavisne.*

Pri tome valja naglasiti, da je ovakvo razčlanjivanje problema na dva dela samo metodološkog karaktera, a ne i suštinskog. Stvarno, kako se to uviđa iz prednjih objašnjenja, jedan deo problema odvojen od drugog ne bi imao samostalnog kinematičkog smisla; tek uzeti zajedno oni dobijaju puni kinematički smisao. No, u rešavanju čitavog problema metodološki se pokazuje podesnijim da se raspravi najpre prvi njegov deo, pa potom drugi, ne gubeći, svakako, iz vida njihovu uzajamnu povezanost.

3. Rešenje problema

Kinematički problem o različitim oblicima elementarnog pomeranja krutog tela, koji je u prethodnom članu postavljen na precizan način, mogao bi se rešavati u okvirima same kinematike, koristeći dakle u prvom redu kinematička sredstva.

No, kako se videlo u pristupnom članu 1, umesto da se ide takvim samostalnijim kinematičkim putem, do rešenja se može doći na jedan elegantan posredan način. Naime, u statici krutog tela postoji potpuno analogni problem, čije rešenje je već dovedeno do zadovoljavajućeg kraja. Ta analogija između statike i kinematike krutog tela pokazala se ne samo formalna na osnovu teorije vezanih vektora već i mehanički uslovljena na osnovu principa virtuelnih radova. Bilo po jednoj osnovi bilo po drugoj, uspostavljena analogija dopušta da se rezultati dobijeni u statici doslovno prevedu u kinematiku, zamenjujući jedino statičke veličine sa analognim kinematičkim veličinama. U rešavanju sadašnjeg kinematičkog problema upravo će se postupiti na takav način.

Prvi deo problema. — Prvi deo problema, koji se odnosi na ustanovljavanje svih mogućih kombinacija od po šest nezavisnih translacija i rotacija, rešava se relativno lako.

U pristupnom članu 1 već je bilo nagovešteno da će po analogiji sa statikom u kinematici krutog tela postojati kao tipski oblici njegovog elementarnog pomeranja četiri moguće kombinacije nezavisnih translacija i rotacija, koje su bile označene sa 1°, 2°, 3°, 4°. Neophodno je sada da se takvom nagoveštavanju pruži punosnažna potvrda.

Radi toga, obratimo se ponovo i sa više pažnje na izvođenje i rezultate u geometrijskoj statici [1]. Tamo je posle dovoljno podrobnih i strogih rasuđivanja izvedeno pet opštih teorema, označenih sa 1, 2, 3, 4, 5, pomoću kojih se ustanovljavaju četiri moguće kombinacije od po šest nezavisnih ravnotežnih jednačina o projekcijama i o momentima sila. Naime, prve četiri teoreme odnose se respektivno na ovakve četiri njihove kombinacije:

1) šest o momentima sila,

2) pet o momentima sila i jedna o projekcijama sila,

3) četiri o momentima sila i dve o projekcijama sila, i

4) tri o momentima sila i tri o projekcijama sila;

dočim peta teorema utvrđuje da nezavisnih ravnotežnih jednačina o projekcijama sila može biti najviše tri, čime se u isti mah isključuje mogućnost daljih kombinacija. No, u pristupnom članu je pokazano da, kako na osnovu teorije vezanih vektora tako i na osnovu principa virtuelnih radova, postoji punovažna analogija između ravnotežnih jednačina o projekcijama sila i o momentima sila u statici krutog tela i respektivno translacija i rotacija u kinematici krutog tela. Prema tome, sa sigurnošću se može zaključiti, da će na krutom telu postojati četiri kombinacije od po šest nezavisnih translacija i rotacija, označene ranije sa 1°, 2°, 3°, 4°, i nijedna više.

Time je iscrpljeno rešenje prvog dela problema.

Drugi deo problema. — Ovaj drugi deo problema zahteva da se odrede opšti rasporedi translacionih i rotacionih osa, za koje će translacije i rotacije, u svakoj od četiri moguće kombinacije njihove, ispasti sigurno nezavisne. On je složeniji i obimniji od prvog dela problema.

Za njegovo rešavanje takođe će pružiti punu pomoć geometrijska statika. Navedene prve četiri statičke teoreme 1, 2, 3, 4 ne samo da ustanovljavaju moguće kombinacije nezavisnih ravnotežnih jednačina o projekcijama i o momentima sila, nego istovremeno određuju i opšte rasporede projekcijskih i momentnih osa za njih. No, prema zaključcima u pristupnom članu postoji takođe punovažna analogija između projekcijskih i momentnih osa u statici krutog tela i respektivno translacionih i rotacionih osa u kinematici krutog tela, tako da se opšti rasporedi statičkih osa sa nezavisnim ravnotežnim projekcijskim i momentnim jednačinama poklapaju sa respektivnim opštim rasporedima kinematičkih osa sa nezavisnim translacijama i rotacijama. Prema tome, rešenje drugog dela problema će se dobiti, kada se rečene četiri statičke teoreme doslovno prevedu na kinematički jezik.

Kao i u statici, biće preglednije da se četiri analogne kinematičke teoreme razmatraju ponaosob. Mada su statičke teoreme 1, 2, 3, 4 išle obrnutim redom zbog metodološke podesnosti u njihovom izvođenju, ovde će se zadržati poredak naznačen oblicima 1°, 2°, 3°, 4°, budući da je oblik 1° do sada jedino i bio poznat u kinematici krutog tela.

1° U usvojenom poretku kao prvi tipski oblik elementarnog pomeranja krutog tela javlja se kombinacija od tri translacije i tri rotacije, koje pri pravilnom izboru odnosnih translacionih i rotacionih osa u prostoru treba da budu nezavisne među sobom. U ovom drugom delu problema radi se o tome da se odredi opšti raspored tih nezavisnih translacionih i rotacionih osa kao skup svih mogućih pojedinačnih rasporeda njihovih. To će se postići oslanjajući se na uspostavljenu analogiju između statike i kinematike krutog tela.

Naime, u geometrijskoj statici opšti raspored od po tri projekcijske i momentne ose, za koje će odnosne ravnotežne jednačine biti nezavisne, uslovljen je ovakvom teoremom:

Za sastavljanje najviše šest nezavisnih jednačina ravnoteže sila na krutom telu, po tri o momentima i o projekcijama sila, potrebno je i dovoljno da ni tri momentne ose ni tri projekcijske ose ne budu ponaosob paralelne sa po kakvom ravni.

Prevedimo sada tu statičku teoremu u analognu kinematičku teoremu. Radi toga, ravnotežne jednačine o projekcijama i o momentima sila treba zameniti respektivno sa translacijama i rotacijama, a projekcijske i momentne ose respektivno sa translacionim i rotacionim osama. Na taj način, za traženi opšti raspored od po tri translacione i rotacione ose sa nezavisnim translacijama i rotacijama izvodi se ova

T e o r e m a 1. *Da bi najviše šest translacija i rotacija, koje vrši jedno kruto telo, i to po tri translacije i rotacije, bile međusobno nezavisne, potrebno je i dovoljno da ni tri translacione ose ni tri rotacione ose ne budu ponaosob paralelne sa po kakvom ravni.*

Pogledajmo podrobnije opšti raspored kinematičkih osa određen tom teoremom. Kao što je ranije pomenuto, takav njihov raspored predstavlja znatno proširenje uobičajenog rasporeda u vidu jednog proizvoljno izabranog troosnog koordinatnog sistema: umesto zajedničkih i konkurentnih translacionih i rotacionih osa, izvedena teorema dopušta da se one biraju odvojeno jedne od drugih u pravcima osa dvaju različitih koordinatnih sistema i da se štaviše ove ose pomeraju paralelno samima sebi. Takvo proširenje opšteg rasporeda kinematičkih osa postaje razumljivo kada se proprate rasuđivanja u geometrijskoj statici, koja su dovela do krajnje opšteg rasporeda analognih statičkih osa. Međutim, neće biti potrebno mnogo truda da se do opšteg rasporeda kinematičkih osa dođe neposrednim kinematičkim rasuđivanjima.

Zaista, što se tiče odvojenosti translacionih od rotacionih osa i paralelnog pomeranja translacionih osa, to se, kako je i ranije naznačeno, odmah uviđa: vektor translacije i vektor rotacije sa zajedničkim početkom i uopšte proizvoljnim pravcima u prostoru, koji sačinjavaju redukcioni kinematički torzer, mogu se ponaosob razložiti u po tri nezavisne komponente u pravcima osa dva različita koordinatna sistema; potom, ose triju komponentnih translacija, budući da translacije predstavljaju slobodne vektore, mogu se bez daljeg razmišljanja pomeriti paralelno samima sebi. Dakle, preostaje još da se pokaže mogućnost paralelnog pomeranja takođe i rotacionih osa. Evo, kako se to postiže na jednostavan način. Sve tri rotacije, prvobitno u pravcima osa jednog koordinatnog sistema, daju se pomeriti paralelno samima sebi, uz dodavanje po jedne translacije sa odgovarajućim pravcem nužno normalnim na odnosnu rotaciju. Svaka od tih triju novih translacija daje se zatim razložiti u po tri komponente u pravcima triju nekomplanarnih osnovnih translacionih osa, čime će se onda brzine triju prvobitnih komponentnih translacija uopšte promeniti. Prema tome, u konačnom rezultatu takođe će i rotacione ose biti paralelno proizvoljno pomerene, uz konzekventnu promenu brzina uopšte svih triju prvobitnih komponentnih translacija.

2° Drugi tipski oblik elementarnog pomeranja krutog tela predstavlja kombinacija od dve translacije i četiri rotacije, te sada u drugom delu postavljenog problema treba odrediti odnosni opšti raspored translacionih i rotacionih osa, za koje će one biti međusobno nezavisne.

Za analogni opšti raspored projekcijskih i momentnih osa sa odnosnim nezavisnim ravnotežnim jednačinama geometrijska statika pruža ovakvu teoremu:

Za sastavljanje najviše šest nezavisnih jednačina ravnoteže sistema sila na krutom telu, i to četiri o momentima sila i dve o projekcijama sila, potrebno je i dovoljno da šest osa — četiri momentne i dve projekcijske — budu izabrane ovako:

od četiri momentne ose, tri su konkurentne i nekomplanarne, a četvrta ne prolazi kroz njihovu konkursnu tačku;

dve projekcijske ose nisu obe paralelne ni sa jednom ravni normalnom na ravan povučenu kroz konkursnu tačku triju prvih momentnih osa i kroz četvrtu momentnu osu.

Prevođenjem te statičke teoreme na analogni kinematički jezik, za opšti raspored od dve translacione ose i četiri rotacione ose sa nezavisnim translacijama i rotacijama imaće se ova kinematička

Teorema 2. *Da bi najviše šest translacija i rotacija, koje vrši jedno kruto telo, i to dve translacije i četiri rotacije, bile međusobno nezavisne, potrebno je i dovoljno da šest osa — dve translacione i četiri rotacione — budu izabrane ovako:*

od četiri rotacione ose, tri su konkurentne i nekomplanarne, a četvrta ne prolazi kroz njihovu konkursnu tačku;

dve translacione ose nisu obe paralelne ni sa jednom ravni normalnom na ravan povučenu kroz konkursnu tačku triju prvih rotacionih osa i kroz četvrtu rotacionu osu.

Izvođenje ove teoreme 2 neposrednim kinematičkim rasuđivanjima ne bi bilo tako jednostavno kao što je bilo izvođenje prethodne teoreme 1. Ono što se daje brzo videti jeste jedino prelazak sa kombinacije 1° od po tri translacije i rotacije na kombinaciju 2° od dve translacije i četiri rotacije.

Zaista, pođimo od kombinacije 1° sa prvobitnim posebnim rasporedom translacionih i rotacionih osa upravljenih po osama jednog koordinatnog sistema. Zamislimo, potom, da se jedna ma koja od triju translacija zameni sa jednim ma kojim od mnogih ekvivalentnih rotacionih spregova, tako da jedna od dveju rotacija sprega prolazi kroz koordinatni početak. Razlažući onda tu rotaciju sprega u tri komponentne rotacije u pravcima koordinatnih osa, ove tri komponentne rotacije se mogu pridodati trima prvobitnim rotacijama upravljenim takođe po istim koordinatnim osama. Ona druga rotacija sprega zauzela bi pri tome svoj položaj u prostoru saobrazno izabranom spregu, no svakako bi prolazila mimo koordinatnog početka. Prema tome, u konačnom rezultatu jedna od triju translacija bila bi transformisana u jednu četvrtu rotaciju mimo koordinatnog početka, uz odgovarajuću promenu triju prvobitnih rotacija u pravcima koordinatnih osa.

Očevidno, prevođenje kinematičke kombinacije 1° na kinematičku kombinaciju 2° moglo bi se izvesti na nebrojeno mnogo načina, zahvaljujući dvema naznačenim proizvoljnostima: slobodi izbora jedne od triju translacija, koja se transformiše u četvrtu rotaciju, i naročito slobodnom izboru ekvivalentnog rotacionog sprega za tu izabranu translaciju. Takvi različiti načini prevođenja prve kombinacije u drugu daće i različite pojedinačne rasporede odnosnih translacionih i rotacionih osa u prostoru, koji će, uzeti skupa, sačinjavati opšti njihov raspored za ovu drugu kombinaciju. Sagledati neposredno iz samog opisanog transformacionog postupka taj opšti raspored osa u onakvoj sažetoj formulaciji kako je daje teorema 2 nesumnjivo je nemoguće. U svakom slučaju, da bi se do takve formulacije opšteg rasporeda kinematičkih osa došlo kinematičkim putem, bila bi neophodna dalja podrobnija rasuđivanja na osnovu teorije vezanih vektora, analogna onima koja su bila sprovedena u geometrijskoj statici pri određivanju korespondentnog opšteg rasporeda statičkih osa. A to je zapravo ono što se i htelo izbeći uspostavljanjem kinematičko-statičke analogije.

3° Na redu je da se za kombinaciju od jedne translacije i pet rotacija, koja sačinjava treći tipski oblik elementarnog pomeranja krutog tela, u smislu drugog dela problema odredi opšti raspored translacione i rotacionih osa, za koje će translacija i rotacije biti nezavisne.

U geometrijskoj statici se za analogni opšti raspored od jedne projekcijske ose i pet momentnih osa sa nezavisnim odnosnim ravnotežnim jednačinama nalazi ovakva teorema:

Za sastavljanje najviše šest nezavisnih jednačina ravnoteže sistema sila na krutom telu, i to pet o momentima sila i jedne o projekcijama sila, potrebno je i dovoljno da šest osa — pet momentnih i jedna projekcijska — budu izabrane ovako:

od pet momentnih osa, tri su konkurentne i nekomplanarne, a ostale dve ne prolaze kroz njihovu konkursnu tačku i ne leže u jednoj ravni sa njom;

dočim projekcijska osa nije normalna na presečnu pravu dveju ravni povučenih kroz konkursnu tačku prvih triju momentnih osa i kroz ostale dve momentne ose.

Saobrazno toj statičkoj teoremi, za određivanje opšteg rasporeda od jedne translacione ose i pet rotacionih osa sa odnosnom translacijom i rotacijama nezavisnim među sobom dobija se ova kinematička

T e o r e m a 3. *Da bi najviše šest translacija i rotacija, koje vrši jedno kruto telo, i to jedna translacija i pet rotacija, bile međusobno nezavisne, potrebno je i dovoljno da šest osa — jedna translaciona i pet rotacionih — budu izabrane ovako:*

od pet rotacionih osa, tri su konkurentne i nekomplanarne, a ostale dve ne prolaze kroz njihovu konkursnu tačku i ne leže u jednoj ravni sa njom;

dočim translaciona osa nije normalna na presečnu pravu dveju ravni povučenih kroz konkursnu tačku prvih triju rotacionih osa i kroz ostale dve rotacione ose.

U pogledu teškoća da se ova teorema 3 izvede neposrednim kinematičkim rasuđivanjima vredeće utoliko pre one napomene koje su bile učinjene u vezi sa teoremom 2. Jer, tamo se radilo o prevođenju jedne translacije u jednu rotaciju, a ovde pak o prevođenju dveju translacija u dve rotacije. Što se tiče samog prevođenja kinematičke kombinacije 1° preko kinematičke kombinacije 2° na kinematičku kombinaciju 3°, ne bi se imalo reći ništa principijelno novo: istim kinematičkim postupkom, kojim je bila transformisana jedna od triju translacija u četvrtu rotaciju, mogla bi se transformisati i druga translacija u petu rotaciju. Ali, određivanje opšteg rasporeda odnosnih osa za ovu kombinaciju 3° od jedne translacije i pet rotacija, nezavisnih među sobom, na osnovu samo takvog transformacionog kinematičkog postupka, bez daljih podrobnih izvođenja analognih onima u geometrijskoj statici, bilo bi nesumnjivo nemoguće.

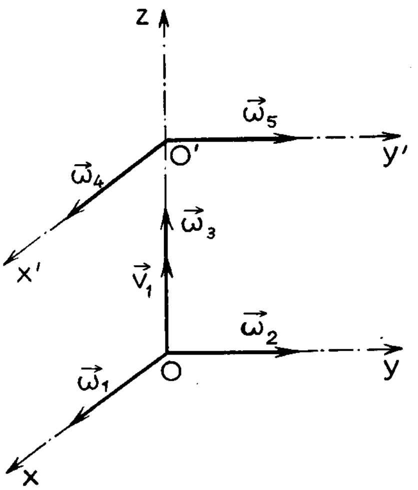
— Analogno izvođenju u geometrijskoj statici, iz opšteg rasporeda kinematičkih osa određenog teoremom 3° može se izdvojiti kao karakteristična njegova posebnija tetraedarska varijanta. Naime, u geometrijskoj statici je kao posledica napred navedene opšte teoreme izvedena ovakva teorema:

Šest ravnotežnih jednačina za kruto telo, i to pet o momentima sila u pogledu na pet ivica jednog tetraedra i jedna o projekcijama sila na pravac njegove ivice naspramne onoj koja nije uzeta za momentnu osu, biće nezavisne.

Toj statičkoj teoremi odgovarala bi onda, kao posledica opšte kinematičke teoreme 3, sledeća kinematička teorema o posebnijem tetraedarskom rasporedu nezavisnih kinematičkih osa:

T e o r e m a 3'. *Šest komponentnih elementarnih pomeranja krutog tela, i to šest rotacija u pravcima pet ivica jednog tetraedra i jedna translacija u pravcu njegove ivice naspramne onoj koja nije uzeta za rotacionu osu, biće nezavisna.*

— Primer za drugi karakterističan raspored nezavisnih osa kod sadanje kinematičke kombinacije 3° može se takođe pozajmiti iz geometrijske statike. To je raspored osa koji obrazuju dva pravougla koordinantna sistema $Oxyz$ i $O'x'y'z$, sa zajedničkom osom Oz i paralelnim osam au ostala dva njihova para (sl. 5): jedna translacija $\vec{v}_1$ upravljena je po osi Oz, a pet rotacija $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, $\vec{\omega}_3$, $\vec{\omega}_4$, $\vec{\omega}_5$ upravljene su respektivno po osama Ox, Oy, Oz, $O'x'$, $O'y'$. Vidi se i ovde neposredno da takav posebni raspored osa pripada njihovom opštem rasporedu, koji određuje teorema 3; no, on se može smatrati i kao granični slučaj tetraedarskog rasporeda osa po teoremi 3', kada se jedna tetraedrova ivica udaljava beskonačno, kako se to objašnjava u geometrijskoj statici.



Sl. 5

4° Najzad, ostaje da se odredi opšti raspored za šest rotacionih osa u kombinaciji 4° od šest nezavisnih rotacija, koja predstavlja četvrti i ujedno poslednji tipski oblik elementarnog pomeranja krutog tela.

Statička teorema o opštem rasporedu analognih statičkih nezavisnih osa glasi:

Da bi najviše šest momentnih jednačina ravnoteže sistema sila na krutom telu bile međusobno nezavisne, potrebno je i dovoljno da one budu sastavljene u pogledu na šest momentnih osa, takvih da su tri konkurentne i nekomplanarne, a da od ostalih triju nijedna ne susreće ni u konačnosti ni u beskonačnosti presečnu pravu dveju ravni povučenih kroz konkursnu tačku i one druge dve ose.

Dakle, za opšti raspored šest nezavisnih rotacionih osa imaće se ova kinematička

T e o r e m a 4. *Da bi najviše šest rotacija, koje vrši jedno kruto telo, bile međusobno nezavisne, potrebno je i dovoljno da tri rotacione ose budu konkurentne i nekomplanarne, a da od ostalih triju roiacionih osa nijedna ne susreće ni u konačnosti ni u beskonačnosti presečnu pravu dveju ravni povučenih kroz konkursnu tačku i one druge dve ose.*

Napomenimo i ovde da se kombinacija 4° od šest rotacija takođe daje izvesti neposrednim kinematičkim rasuđivanjima iz kombinacije 1° od tri translacije i tri rotacije, kao što je to bilo pokazano za prethodne dve kinematičke kombinacije 2° i 3°. Radi toga, treba opisani transformacioni postupak primeniti dalje, tako da se, posle prevođenja dveju translacija u četvrtu i petu rotaciju, i treća translacija prevede u šestu rotaciju. Ali, određivanje opšteg rasporeda šest nezavisnih rotacionih osa neposrednim kinematičkim putem zahtevalo bi daleko podrobnija izvođenja, analogna onima u geometrijskoj statici; a to je ovde izbegnuto korišćenjem kinematičko-statičke analogije.

— U geometrijskoj statici je pokazano da se karakteristični tetraedarski raspored šest nezavisnih rotacionih osa javlja kao posledica njihovog opšteg rasporeda po prednjoj statičkoj teoremi. Analogno tome, kao posledica opšte kinematičke teoreme 4° za posebniji tetraedarski raspored šest rotacionih osa rezultuje ova kinematička

Teorema 4'. *Šest rotacija u pravcima šest ivica jednog tetraedra biće nezavisne.*

Ova teorema je u pristupnom članu 1 već bila izvedena i neposrednim kinematičkim rasuđivanjima, no analognim opet onim u geometrijskoj statici.

— Isto tako, u geometrijskoj statici se iz navedene opšte statičke teoreme izvode nekoliko posledica o izboru osa pri sastavljanju nezavisnih momentnih jednačina ravnoteže. Evo analognih posledica iz opšte kinematičke teoreme 4 o izboru osa sa nezavisnim rotacijama:

1) Za tri ose u jednoj ravni, koje nisu ni konkurentne ni paralelne (drukčije rečeno, koje se ne seku u jednoj tački ni u konačnosti ni u beskonačnosti), tri rotacije biće nezavisne.

2) Naprotiv, od tri rotacije oko tri konkurentne ili paralelne ose u jednoj ravni jedna mora biti zavisna.

3) Isto tako, od četiri rotacije oko četiri ose u jednoj ravni bar jedna će biti zavisna.

4) Ako ne za tri paralelne ose u ravni po posledici 2), onda:

Za tri paralelne ose što ne leže u jednoj ravni tri rotacije će biti nezavisne.

5) Naprotiv, od četiri rotacije oko četiri paralelne ose bar jedna će biti zavisna.

Valja napomenuti da bi se ove posledice mogle sasvim brzo izvesti na osnovu činjenice da rotacija predstavlja vektor vezan za pravu, pa da se one onda u smislu postojeće kinematičko-statičke analogije obratno prenesu u statiku radi ustanovljavanja uslova za nezavisnost korespondentnih momentnih jednačina ravnoteže.

5° Četiri različita oblika elementarnog pomeranja krutog tela, koja su tretirana u četiri pretohodne tačke 1°, 2°, 3° i 4°, dobijena su na taj način što se, polazeći od početnog oblika 1° sa tri translacije i tri rotacije, postupno po jedna translacija preobraćala u po jednu rotaciju, tako da oblik 2° obrazuju dve translacije i četiri rotacije, zatim oblik 3° — jedna translacija i pet rotacija, i najzad oblik 4° — svih šest rotacija. Sa formalnog gledišta, polazeći opet od početnog oblika 1°, translacije i rotacije u ukupnom broju od šest njih mogle bi se kombinovati i u obratnom smeru, tako da se broj translacija povećava a broj rotacija smanjuje. Međutim, takve dalje kombinacije nisu i stvarno moguće. Kako je već objašnjeno u pristupnom članu 1, razlog je sasvim jednostavan: budući da je brzina translacije krutog tela slobodan vektor, translacije koje bi došle preko tri nezavisne translacije nužno bi bile zavisne od njih. Prema tome, u analogiji sa statičkom teoremom za najviše tri nezavisne jednačine o projekcijama sila, ustanovljena je ova kinematička

T e o r e m a 5. *Nezavisnih translacija krutog tela u raznim pravcima u prostoru može biti najviše tri.*

4. Posebna kretanja krutog tela

U geometrijskoj statici je metodički podesno da se posebni sistemi sila na krutom telu razvrstavaju u ovakve tri klase: 1) sistem konkurentnih sila; 2) ravan sistem sila; 3) sistem paralelnih sila. Za takve pojedine klase posebnih sistema sila se onda ustanovljavaju različite formulacije ravnotežnih uslova i saobrazno njima uslovi za nezavisnost ravnotežnih jednačina sa opštim rasporedima projekcijskih i momentnih osa. Analogno tome, u kinematici krutog tela bi se takođe mogli razmatrati isti takvi posebni sistemi rotacija. Međutim, oni nemaju kakvog značajnijeg interesa, ni teorijskog ni praktičnog.

U kinematici se, opet iz metodičkih razloga, posebna kretanja krutog tela razlikuju na ovakav način:

1) translatorno kretanje;
2) obrtanje oko nepomične ose;
3) helikoidalno kretanje;
4) obrtanje oko nepomične tačke; i
5) ravno kretanje.

Svakako da bi bilo od koristi da se saobrazno postavljenom problemu u ovoj raspravi ispitaju mogućnosti različitih oblika elementarnog pomeranja i u takvim posebnim slučajevima kretanja krutog tela.

Kako se videlo u prošlom članu, različiti oblici elementarnog pomeranja slobodnog krutog tela zasnivali su se na preobraćanju pojedinih komponentnih translacija u rotacije. Sledstveno tome, odmah se daje zaključiti da kod tri posebna kretanja krutog tela ne mogu postojati različiti oblici elementarnog pomeranja: kod obrtanja oko nepomične ose i kod obrtanja oko nepomične tačke i ne postoji nikakva translacija, a kod helikoidalnog kretanja postoji jedna translacija po određenoj osi i u konstantnom odnosu sa rotacijom. Tako, za razmatranje ostaju samo dva posebna kretanja: translatorno kretanje sa tri mogućne komponentne translacije i ravno kretanje sa dve mogućne komponentne translacije. Razmotrimo najpre ovo drugo posebno kretanje.

Ravno kretanje krutog tela. — Između ravnog kretanja krutog tela i ravnog sistema sila na krutom telu postoji potpuna analogija u onom smislu kako je uspostavljena u pristupnom članu 1. Naime, kada se u ravni kretanja uzme jedan dvoosni koordinatni sistem, onda osnovni oblik ravnog kretanja krutog tela sačinjavaju dve translacije upravljene po tim koordinatnim osama i jedna rotacija oko ose upravne na ravan kretanja kroz koordinatni početak; a ravan sistem sila, u pogledu na isti takav dvoosni koordinatni sistem u ravni dejstva sila, redukuje se u svom osnovnom obliku na dve komponentne sile u pravcima koordinatnih osa i na spreg sila u koordinatnoj ravni, tako da se kao potrebni i dovoljni uslovi ravnoteže postavijaju dve jednačine o projekcijama sila na ose i jedna jednačina o momentima sila u pogledu na koordinatni početak, — dakle, u potpunoj analogiji sa komponentalnom predstavom ravnog kretanja.

No, u geometrijskoj statici se za uslove ravnoteže ravnog sistema sila daju postaviti tri različite formulacije kao posledice opštih formulacija, koje stoje u analogiji sa ustanovljenim kinematičkim opštim teoremama 1, 2, 3 u prošlom članu; četvrta formulacija ravnotežnih uslova, koja bi bila analogna kinematičkoj teoremi

4, ne dolazi u obzir zbog ograničenosti pravca u prostoru glavnog vektora ravnog sistema sila, koji nužno ostaje paralelan sa ravni dejstva sila. Na osnovu postojeće statičko-kinematičke analogije, takve tri formulacije ravnotežnih uslova i odnosne tri teoreme o nezavisnosti ravnotežnih jednačina moći će se bez daljih rasuđivanja prevesti u tri analogne kinematičke teoreme o tri različita oblika elementarnog pomeranja ravno pokretnog krutog tela, koje će ujedno biti posledice pomenutih kinematičkih opštih teorema. Ne navodeći i statičke teoreme, ovde će se te tri kinematičke teoreme za ravno kretanje odmah iskazati kako sledi:

T e o r e m a 1. *Kod ravnog kretanja krutog tela za nezavisnost najviše triju komponentnih kretanja — dveju translacija i jedne rotacije — potrebno je i dovoljno da rotaciona osa prodire ravan kretanja u konačnosti, a da dve translacione ose ne budu obe paralelne ni sa jednom ravni normalnom na ravan kretanja.*

T e o r e m a 2. *Kod ravnog kretanja krutog tela za nezavisnost najviše triju komponentnih kretanja — jedne translacije i dveju rotacija — potrebno je i dovoljno da od dveju rotacionih osa bar jedna prodire ravan kretanja u konačnosti, a da translaciona osa ne bude normalna na presečnu pravu ravni kretanja sa ravni povučenom kroz prodornu tačku prve rotacione ose i kroz onu drugu rotacionu osu.*

T e o r e m a 3. *Kod ravnog kretanja krutog tela za nezavisnost najviše triju rotacija potrebno je i dovoljno da jedna rotaciona osa prodire ravan kretanja u konačnosti, a da od ostalih dveju rotacionih osa nijedna ne susreće ni u konačnosti ni u beskonačnosti presečnu pravu ravni kretanja sa ravni povučenom kroz prodornu tačku i onu drugu osu.*

— Opšti rasporedi translacionih i rotacionih osa prednjim trima teoremama određeni su na najopštiji mogući način. Međutim, analogno onome u geometrijskoj statici, budući da se radi o ravnom kretanju krutog tela, celishodno je rasporede osa prilagoditi ravni kretanja. U tome smislu treba smatrati da je ravno kretanje krutog tela redukovano na kretanje u sopstvenoj ravni jedne ravne figure, kao preseka krutog tela sa ravni kretanja, pa ose onda uzimati ovako: translacione ose u samoj ravni kretanja figure; a rotacione ose upravno na tu ravan, tako da se mogu zameniti rotacionim polovima u njoj. Evo tada iskaza triju odgovarajućih teorema sa takvim posebnim rasporedima osa:

T e o r e m a 1'. *Kod kretanja ravne figure u sopstvenoj ravni za nezavisnost najviše triju komponentnih kretanja — dveju translacija po osama u ravni kretanja i jedne rotacije oko pola u istoj ravni — potrebno je i dovoljno da dve translacione ose ne budu paralelne.*

T e o r e m a 2'. *Kod kretanja ravne figure u sopstvenoj ravni za nezavisnost najviše triju komponentnih kretanja — jedne translacije po osi u ravni kretanja i dveju rotacija oko dvaju polova u istoj ravni — potrebno je i dovoljno da translaciona osa ne bude normalna na spojnu pravu dvaju rotacionih polova.*

T e o r e m a 3'. *Kod kretanja ravne figure u sopstvenoj ravni za nezavisnost najviše triju rotacija oko triju polova u ravni kretanja potrebno je i dovoljno da tri rotaciona pola ne leže na jednoj pravoj.*

Translatorno kretanje krutog tela. — Za razliku od ravnog kretanja, za translatorno kretanje krutog tela se ne može naći podesan statički analogon, koji bi se iskoristio u ustanovljavanju različitih oblika njegovog elementarnog pomeranja.

Na prvi pogled, pomislilo bi se da je translatorno kretanje analogno sistemu konkurentnih sila, koji se uopšte redukuje na jednu rezultantnu silu, budući da su komponentne translacije analogne ravnotežnim jednačinama o projekcijama sila. Ali, dok je rezultanta konkurentnih sila vezani vektor, koji nužno prolazi kroz konkursnu tačku sila, dotle je translaciona brzina slobodan vektor. Stoga, geometrijska rasuđivanja o sistemu konkurentnih sila gube važnost za translatorno kretanje.

Pošto se translacija može predstaviti kao spreg rotacija, svakako bi joj onda bolji analogon bio spreg sila, koje su na krutom telu kao i rotacije vektori vezani za prave. Međutim, u geometrijskoj statici se nije pokazivala neka potreba i korist da se spreg sila predstavlja drugačijim ekvivalentnim sistemom sila, što bi sad u kinematici eventualno poslužilo da se translatorno kretanje preko sprega rotacija predstavlja različitim ekvivalentnim sistemima rotacija.

Prema tome, u proučavanju različitih oblika elementarnog pomeranja pri translatornom kretanju krutog tela treba se osloniti na samostalna kinematička rasuđivanja.

Na prvom mestu, treba konstatovati da translatorno kretanje krutog tela u jednom trenutku može imati ma kakav pravac u prostoru. Zbog toga, u smislu četiri prve opšte teoreme iz prošlog člana za translatorno kretanje dolaze u obzir sva četiri oblika elementarnog pomeranja.

— Najpre, saobrazno opštoj teoremi 1, kada se zadrže u pažnji samo komponentne translacije, za prvi oblik elementarnog pomeranja pri translatornom kretanju krutog tela može se odmah iskazati ova, i neposredno očevidana,

T e o r e m a 1. *Translatorno kretanje krutog tela u jednom trenutku može se ostvariti sa tri komponentne translacije, za čiju nevavisnost je potrebno i dovoljno da tri translacione ose ne budu sve paralelne sa kakvom ravni.*

— Zatim, da bi se dobio drugi oblik elementarnog pomeranja pri translatornom kretanju krutog tela, saobrazan opštoj teoremi 2, trebalo bi u prvom obliku jednu od triju komponentnih translacija transformisati u jednu rotaciju. Međutim, to ovde nije moguće. Sve što se može jeste da se jedna komponentna translacija zameni sa jednim ekvivalentnim spregom rotacija, sa kojim se dalje ništa više ne može učiniti, tako da on ostaje da egzistira kao treće samostalno komponentno kretanje translatornog kretanja. Prema tome, za drugi oblik će se imati ova

T e o r e m a 2. *Translatorno kretanje krutog tela u jednom trenutku može se ostvariti sa dve komponentne translacije i sa jednim komponentnim spregom rotacija, za čiju nezavisnost je potrebno i dovoljno da dve translacione ose i normala na ravan rotacionog sprega ne budu sve tri paralelne sa kakvom ravni.*

— Dalje, treći oblik elementarnog pomeranja pri translatornom kretanju krutog tela dobiće se, kada se u drugom obliku i druga komponentna translacija zameni sa ekvivalentnim spregom rotacija. Posle toga bi se, bez povrede nezavisnosti oba komponentna sprega rotacija, dve rotacije, uzete po jedna iz svakog sprega, mogle složiti u jednu rotaciju, tako da bi se ukupan broj od četiri rotacije redukovao na tri, između kojih će još nužno postojati jedna određena zavisnost. Međutim, time se ništa naročito ne postiže na uprošćavanju kinematičkog oblika, te je ipak celishodnije ostaviti da oba rotaciona sprega egzistiraju kao samostalna komponentna kretanja. Prema tome, za drugi oblik se dobija ova

T e o r e m a 3. *Translatorno kretanje krutog tela u jednom trenutku može se ostvariti sa jednom komponentnom translacijom i sa dva komponentna sprega rotacija, za čiju nezavisnost je potrebno i dovoljno da translaciona osa i dve normale na ravni dvaju rotacionih spregova ne budu sve tri paralelne sa kakvom ravni.*

— Najzad, za četvrti oblik elementarnog pomeranja pri translatornom kretanju krutog tela treba još i treću komponentnu translaciju zameniti sa ekvivalentnim spregom rotacija. Kada bi se posle toga ovde, takođe bez povrede nezavisnosti triju komponentnih spregova rotacija, složile tri rotacije, uzete po jedna iz svakog njihovog sprega, u jednu rotaciju, dobile bi se svega četiri rotacije, između kojih će još nužno postojati jedna određena zavisnost.

Intencija da se ta rezultantna rotacija podesnim izborom njenih triju komponentnih rotacija eventualno anulira, tako da kao ekvivalentna zamena translatornom kretanju ostanu samo tri nezavisne rotacije, nije nikako ostvarljiva. Zaista, da bi tri rotacije dale translaciju, potrebno bi bilo da njihov glavni momenat u pogledu na razne tačke prostora bude isti. Za to bi, pak, bilo potrebno da glavni vektor tih triju rotacija bude jednak nuli. A opet za ovo bilo bi potrebno da tri rotaciona vektora budu paralelna sa kakvom ravni. Međutim, to je ono što je nemoguće; jer, translatorno kretanje slobodnog krutog tela može imati proizvoljan pravac u prostoru, te je onda geometrijski neophodno da tri rotacije budu raspoređene u svima trima dimenzijama prostora, a ne samo u dvema. Na takvu geometrijsku protivrečnost se zapravo svodi ograničavajući uslov da glavni vektor triju rotacija mora biti jednak nuli.

Prema tome, i ovde se pokazuje celishodno da se tri komponentna rotaciona sprega ostave da egzistiraju samostalno. Tako se za četvrti oblik translatornog kretanja ustanovljava ova

Teorema 4. *Translatorno kretanje krutog tela u jednom trenutku može se ostvariti sa tri komponentna sprega rotacija, za čiju nezavisnost je potrebno i dovoljno da tri normale na ravni triju rotacionih spregova ne budu sve paralelne sa kakvom ravni.*

5. Zaključak o opštem kretanju krutog tela

Opšte teoreme o različitim oblicima elementarnog pomeranja slobodnog krutog tela, izvedene u članu 3, dopuštaju da se o njegovom opštem kretanju učini jedan važan zaključak.

Pođimo u rasuđivanju od teorije o slaganju translacija i rotacija. U toj teoriji se pokazuje da se krutom telu mogu saopštiti translacije i rotacije u ma kakvim brojevima. Iz toga se stiče utisak da će kretanje krutog tela dobijati sve opštiji oblik ukoliko mu se bude saopštavalo sve više translacija i rotacija, tako da bi najopštije kretanje njegovo zahtevalo čak i beskonačno mnogo translacija i rotacija. Istina, u toj teoriji se takođe pokazuje da se sistem od ma kakvih brojeva translacija i rotacija može uvek redukovati na kinematički torzer od svega jedne translacije i rotacije, koji na centralnoj osi sistema prelazi u kinematičku dinamu kao vektorskog predstavnika trenutnog helikoidalnog kretanja; pa, kako se i proizvoljno kretanje slobodnog krutog tela svodi na trenutno helikodialno kretanje, moglo bi se možda smatrati da je već u proizvoljnim sistemima translacija i rotacija sadržano i takvo proizvoljno kretanje. Ali, kod proizvoljnog kretanja slobodnog krutog tela osa trenutnog helikoidalnog kretanja može zauzimati proizvoljan položaj u prostoru; a sa druge strane, pak, ne vidi se neposredno da li i proizvoljni sistemi translacija i rotacija obezbeđuju takođe proizvoljan položaj ose trenutnog helikoidalnog kretanja krutog tela. Prema tome, čak i kada se uzme u obzir da sistemi translacija i rotacija mogu da daju trenutno helikoidalno kretanje, ostaje i dalje utisak da se njima ipak ne može proizvoditi proizvoljno kretanje slobodnog krutog tela.

U tome svakako treba videti razloge što se u kursevima iz mehanike proizvoljno kretanje slobodnog krutog tela smatra kao opšte njegovo kretanje, a da proizvoljni sistemi translacija i rotacija predstavljaju posebne slučajeve takvog opšteg kretanja. Tako, na primer, u Apelovom kursu poglavlje o slaganju translacija i rotacija, pošto se pokazalo da se njihovi sistemi uopšte redukuju na trenutno helikoidalno kretanje, završava se ovakvom konstatacijom:

»Činjenica što ma kakav broj translacija i rotacija, koje vrši jedno kruto telo, saopštavaju njegovim raznim tačkama iste brzine kao i jedno helikoidalno kretanje nalazi svoj pravi razlog u ovakvoj teoremi: *U najopštijem kretanju krutog tela, brzine u jednom trenutku jesu iste kao i u helikoidalnom kretanju.* To ćemo zapravo sada dokazati«.

Međutim, rezultati do kojih se došlo u ovoj raspravi govore da stvari stoje upravo obrnuto. Na osnovu opštih teorema iz člana 3, da bi se ostvarilo proizvoljno kretanje slobodnog krutog tela, nije potrebno primenjivati sisteme translacija i rotacija sa vrlo velikim njihovim brojevima: za to je potrebno i dovoljno zadržati se već na maksimalnom broju od šest translacija i rotacija, pod jedinim uslovom da se translacije i rotacije uzimaju u takve četiri njihove kombinacije i sa takvim rasporedima translacionih i rotacionih osa za koje će one biti nezavisne među sobom. Sve translacije i rotacije koje bi se saopštavale krutom telu preko takvih sistema od po šest nezavisnih translacija i rotacija nužno bi morale biti zavisne od njih. Drugim rečima, to znači da svako dodavanje daljih translacija i rotacija na osnovne sisteme od šest nezavisnih translacija i rotacija ne bi niukoliko doprinosilo proširivanju onog opšteg oblika kretanja krutog tela koji se već ne bi mogao ostvariti sa tim osnovnim sistemima; one bi jedino mogle učiniti da se promene translacije i rotacije u tim njihovim osnovnim sistemima; dakle, one bi bile obuhvaćene ovim osnovnim njihovim sistemima. U svetlosti takvih činjenica onda proizvoljno kretanje slobodnog krutog tela postaje ekvivalentno sa sistemima od svega šest nezavisnih translacija i rotacija. Ali, ako je opštost kretanja slobodnog krutog tela već iscrpljena njegovom proizvoljnošću, kod sistema od šest nezavisnih translacija i rotacija može se činiti uopštavanje ipak utoliko što će se povećavati broj translacija i rotacija, pa makar ove nove bile sigurno zavisne od onih šest osnovnih.

U tome smislu zapravo i treba zaključiti da već proizvoljni sistemi translacija i rotacija predstavljaju potpunu generalizaciju kretanja slobodnog krutog tela, te da je prema tome proizvoljno kretanje njegovo nužno sadržano u tim sistemima kao njihova posledica.

LITERATURA

1. B. Lilić: *Uslovi za nezavisnost ravnotežnih jednačina.* Posebna izdanja Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu; Beograd, 1962; № 4.

2. P. Appell: *Traité de Mécanique rationnelle.* Tom I, izdanje šesto; Pariz, 1941; str. 293-294.

РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Резюме

Под формой элементарного перемещения твердого тела подразумевается система независимых трансляций и ротаций, при помощи которых становится возможным осуществить произвольное распределение скоростей по точкам свободно движущегося твердога тела.

Проблему о подобных различных формах мы ставим в двух частя:

во-первых, *следует установить все комбинации трансляций и ротаций при их максимальном числе равном шести, для которых эти комбинации могут быть независимыми*; и

во-вторых, *для всех подобных комбинаций трансляций и ротаций следует установить общие распределения осей трансляции и ротации, при которых трансляции и ротации будут наверняка независимыми.*

Поставленная задача решается косвенным путем: установлением соответствующей аналогии между статикой и кинематикой твердого тела. Как известно, эту аналогию получаем вообще двумя способами: посредством теории скользящих векторов и на основании принципа виртуельных работ. После подробного изучения основных характеристик статическо-кинематической аналогии составлена следующая

Теорема. *Каждая комбинация и пространственное распределение осей, для которых в статике твердого тела можно составить независимые равновесные уравнения о проекциях и о моментах сил, являются одновременно комбинацией и пространственным распределением осей, для которой в кинематике твердого тела получаются соответственные независимые трансляции и ротации.*

Эта теорема позволяет результаты, которые ранее получались в статике [1], буквально перевести в кинематику, замещая единственно статические величины соответствующими кинематическими.

Так, при решении первой части проблемы приходим к выводу, что в кинематике свободного твердого тела будут существовать следующие четыре комбинации по шести независимых трансляций и ротаций:

1° три трансляции и три ротации,

2° две трансляции и четыре ротации,

3° одна трансляция и пять ротций,

4° шесть ротаций.

В качестве решения второй части проблемы составляются, также по аналогии с данными статики, четыре теоремы об общих распределениях трансляционных и ротационных осей для указанных четырех возможных комбинаций независимых трансляций и ротаций. На пример, для комбинации 1° составлена следующая

Теорема 1. *Чтобы максимум шесть трансляций и ротаций, которые производит твердое тело, при чем по три трансляции и ротации были взаимно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы ни три оси трансляции ни три оси ротации не были параллельными с какой бы то ни было плоскостью.*

Не приводя остальных трех теорем с более сложными формулировками, следует прибавить, что на основании их получаются особые распределения осей, благоприятные для использования. Так, для четвертой теоремы характерно тетраэдрическое распределение шести ротационных осей. Кроме того, из четвертой теоремы можно вывести несколько следствий о выборе осей с независимыми ротациями. Укажем три из них:

1) Из трех ротаций вокруг трех пересекающихся или параллельных осей в одной плоскости по крайней мере одна будет зависимой.

2) При трех параллельных осях, не расположенных в одной плоскости, три ротации будут независимыми.

3) Наоборот, из четырех ротаций вокруг четырех параллельных осей по крайней мере одна будет зависимой.

— С той же точки зрения можно рассматривать два частных типа движения твердого тела: плоское движение и трансляторное движение.

У плоско движущегося твердого тела устанавливаются три различных формы элементарного движения: 1° две трансляции и одна ротация, 2° одна трансляция и две ротации, 3° три ротации. При этом общие распределения трансляционных и ротационных осей не ограничиваются условием, чтобы трансляционные оси были параллельными с плоскостью движения, а ротационные оси были перпендикулярными к этой плоскости.

Для трансляторного движения особо интересно доказательство, что оно невозможно в произвольном направлении осуществлятся с тремя ротациями вокруг трех определенных осей, произвольно выбранных в пространстве.