PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 162 (1966)

PROPRIÉTÉS FONCTIONNELLES DES CÔNIQUES*

Pavel Drăgilă

1. Les coniques se définissent ordinairement comme des lieux géométriques, c'est-à-dire comme des ensembles de points $M(x, y)$ qui satisfont au même relation de condition

$$F[M, A, B, \ldots] = 0,$$

où $A, B, \ldots$ représentent des points fixes. Mais, en dehors de cette voie, les coniques, comme d'ailleurs aussi d'autres courbes simples, peuvent être caractérisées moyennant leurs propriétés fonctionnelles. Cela veut dire qu'on peut trouver une équation fonctionnelle

$$\Phi[M, M_1, M_2, \ldots A, B, \ldots] = 0,$$

dans laquelle interviennent les coordonnées de deux, où éventuellement de plusieurs points variables sur la courbe M, M_1, M_2, ainsi que les coordonnées de quelques points fixes $A, B, \ldots$

Les recherches sur ce sujet, ainsi que les travaux publiés sont peu nombreux. Les résultats les plus importants sont ceux dûs à Angelesco [1], Pompeiu [2], Ghermănesco [4], [6] et Radu [7].

Angelesco s'est proposé le problème de déterminer les curbes planes définies par les équations

$$x = f(u), \quad y = \varphi(u),$$

de telle manière que trois points de la courbe, qui correspondent aux valeurs u, $u+h$, $u+2h$ du paramètre, soient les sommets d'un triangle, dont l'aire soit indépendante de h. Il trouve ainsi l'équation

$$(1) \qquad [f(u+2h) - f(u+h)]\,[\varphi(u+3h) - \varphi(u)] = [f(u+3h) - f(u)]\,[\varphi(u+2h) - \varphi(u+h)],$$

de laquelle il déduit ensuite un système d'équations différentielles.

Intégrant ce système il obtient trois types de solutions, qui représentent les paraboles, les hyperboles et les ellipses.

L'équation fonctionelle (1) a été intégrée plus tard par Ghermănesco [5], sans imposer la condition de dérivabilité.

---

* Présenté le 1 decembre 1965 par D. S. Mitrinović et P. M. Vasić.

Pompeiu et Lalesco d'autre côté, ont donné une méthode de construction des coniques moyennant un ensemble discret de points. I s considèrent à cette fin un trapez $M_1 M_2 M_3 M_4$, dans lequel $M_1 M_4$ et $M_2 M_3$ sont les deux côtés parallèles. On construit ensuite le segment $M_1 M_5$ parallèle à $M_3 M_4$, de telle maniere que

$$\frac{M_1 M_4}{M_2 M_3} = \frac{M_2 M_5}{M_3 M_4} = k.$$

Construisant les trapez succesif à $M_1 M_2 M_3 M_4$, $M_2 M_3 M_4 M_5, \ldots$ on trouve que les sommets M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, sont situés sur la même conique.

Ghermănesco a établi plus tard l'équation fonctionnelle qui résout complètement le problème [6]. Par l'intégration de cette équation fonctionnelle il a montré que la solution générale contient les paraboles pour $k=3$, les hyperboles pour $k>3$ et les ellipses pour $k<3$.

Partant d'un problème étudié par Abramesco, au point de vue géométrique [3], Radu a montré dans un travail récent [7] que les paraboles sont les courbes planes caractérisées par la propriété que, si on prend sur la courbe les couples de points $(M_1 M_2)$, $(M_3 M_4)$, dont les abscises soient équidistantes, les droites $M_1 M_4$ et $M_2 M_3$ sont parallèles.

2. Il est évident que n'est pas dépourvu de l'intéret de trouver des equations fonctionnelles, moyennant lesquelles on peut caractériser les propriétés intrrinsèques de tous les types de coniques. Nous allons donner, dans ce qui suit, quelques exemples. Dans les calculs qui suivent nous considérerons deux ou trois points M, M_1, M_2, variables sur la courbe. On peut supposer, dans le cas le plus simple, que les abscises respectives x, x_1; x_2 sont en progression arithmétique. Mais nous allons considérer encore le cas plus général, où les abscises de deux points succesif M_i, M_{i+1} sont liés par l'opération linéaire

$$x_{i+1} = \theta(x_i) = ax_i + b. \tag{2}$$

Désignant par O l'origine des axes, par OM_i les rayons vecteurs des points M_i dela courbe et par OP_i les abscises des points respectifs, nous nous proposons de déterminer les courbes planes, définies par l'équation $y=f(x)$, pour lesquelles soit satisfaite la relation

$$\frac{OM_1 - OM}{OP_1 - OP} = \frac{OM_2 - OM_1}{OP_2 - OP_1}.$$

Nous sommes ainsi conduits à l'équation fonctionelle

$$\frac{\sqrt{x_1^2 + f^2(x_1)} - \sqrt{x^2 + f^2(x)}}{x_1 - x} = \frac{\sqrt{x_2^2 + f^2(x_2)} - \sqrt{x_1^2 + f^2(x_1)}}{x_2 - x_1}. \tag{3}$$

Compte tenu que le second membre de l'égalité s'obtient en appliquant l'opérateur (2) à son premier membre, il en résulte que

$$\frac{\sqrt{x_1^2 + f^2(x_1)} - \sqrt{x^2 + f^2(x)}}{x_1 - x} = c$$

et ensuite

$$\sqrt{x_1^2+f^2(x_1)}-cx_1=\sqrt{x^2+f^2(x)}-cx,$$

c étant une constante arbitraire. On voit aisément que la solution générale de l'equation (3) est

$$\sqrt{x^2+f^2(x)}=cx+d \tag{4}$$

ou b:en

$$(1-c^2)\,x^2+f^2(x)-2\,cdx-d^2=0,$$

d étant une autre constante arbitraire.

On voit sans peine que la solution générale comprend

pour $c=1$, $d\neq 0$ les paraboles;
pour $-1<c<1$, les ellipses;
pour $c=0$, $d\neq 0$ les cercles;
pour $c<-1$, ou $c>1$, $d\neq 0$ les hyperboles;
pour $c<-1$, ou $c>1$, $d=0$ deux droites.

De la relation (4) on déduit encore la propriété suivante: Si l'on construit le rayon vecteur OM du centre O à un point courant M de la conique, on peut prendre sur la perpendiculaire ON un segment

$$ON=cx+d$$

de telle façon que l'angle NMO soit de grandeur constante.

3. Considérons dans le plan deux points fixes qu'on peut prendre $A(-1,0)$ et $B(1,0)$, et ensuite portons par A la droite AE et par B la droite BF, dont les coéfficients angulaires α et β soient constantes. Nous nous proposons de déterminer les courbes planes, définies par l'équation

$$y=f(x),$$

de telle manière que, prenant sur la courbe les deux points variables $M[x, f(x)]$, $M_1[x_1, f(x_1)]$, et notant les coéfficients angulaires des droites AM, AM_1, BM, BM_1 par m, m_1, m', m_1', ces coéfficients satisfassent l'égalité

$$\frac{m-\alpha}{m_1-\alpha}=\frac{m_1'-\beta}{m'-\beta}.$$

Nous obtenons ainsi l'équation fonctionnelle

$$\frac{\dfrac{f(x)}{x+1}-\alpha}{\dfrac{f(x_1)}{x_1+1}-\alpha}=\frac{\dfrac{f(x_1)}{x_1-1}-\beta}{\dfrac{f(x)}{x-1}-\beta},$$

qu'on peut écrire encore sous la forme

$$\frac{f^2(x)}{x^2-1}-\frac{(a+b)\,x+(a-b)}{x^2-1}f(x)=\frac{f^2(x_1)}{x_1^2-1}-\frac{(a+b)\,x_1+(a-b)}{x_1^2-1}f(x_1). \tag{5}$$

Compte tenu que le terme droit de l'égalité (5) s'obtient en appliquant l'opérateur (1) au terme gauche, il en résulte

$$\frac{f^2(x)}{x^2-1}-\frac{(a+b)\,x+(a-b)}{x^2-1}\,f(x)=c$$

c étant une constante arbitraire. Nous trouvons ainsi la solution générale

$$f^2(x)-(a+b)\,xf(x)-cx^2-(a-b)\,f(x)+c=0,$$

qui contient tous les types de coniques.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Angelesco, *Sur une propriété fonctionnelle des coniques*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Paris, **175** (1928), 666—668.

[2] D. Pompeiu, *Les fonctions élémentaires et les groupes continus*, L'Enseignement Mathématique, **27** (1925), 101—105.

[3] N. Abramesco, *O proprietate a parabolei în legătură cu teoria grupurilor*, Gazeta Mathematică şi Fizică, **29** (1923), 321—324.

[4] T. Lalesco, *Asupra unei colinea ţiuni a conicelor*, Ibidem, **27** (1922), 272—275.

[5] M. Ghermănesco, *Ecuaţii funcţionale*, Buletin Ştinţific Secţiune de Ştiinţe Matematice. Academia Republicii Populare Romîne, **3** (1951), 245—259.

[6] M. Ghermănesco, *Ecuaţii funcţionale*, Bucureşti, 1960.

[7] M. Ghermănesco, *Proprietătii funcţionale ale conicelo*, Buletin Ştinţific Secţiune de Ştiinţe Matematice. Academia Republicii Populare Romîne, **8** (1956), 695—702.