PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 148 (1965)

ПОРЯДКОВЫЕ СХЕМЫ И НЕОТРЫЦАТЕЛЬНОСТЬ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ*

Драīомир Ж. Ђоковић

В этой работе решается вопрос поставленный Ю. И. Мерзляковым в его статье [1]. Некоторые из приведенных определений взяты целиком из [1].

1. Пусть данна действительная матрица $A=(a_{ij})$ размера $m \times n$; запишем элементы ее j-ого столбца в виде убывающей цепочки

$$a_{i_{1j}\,j} \geqslant a_{i_{2j}\,j} \geqslant \cdots \geqslant a_{i_{mj}\,j}$$

и положим

$$s_{i_{1j}\,j}=1, \quad s_{i_{2j}\,j}=2, \quad \ldots, \quad s_{i_{mj}\,j}=m.$$

Целочисленную матрицу $S=(s_{ij})$ назовем порядковой схемой матрицы A, а также порядковой схемой ее определителя, если он существует. Отметим что одна и та-же матрица может допускать и больше чем одну порядковую схему S. Мы будем иметь дело только с квадратными матрицами.

Определитель с элементами 0,1 будем называть элементарным.

Квадратную матрицу, допускающую порядковую схему

$$Z_n^+ = Z^+ = \begin{bmatrix} 1 & n & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & & 3 \\ \vdots & & & \\ -1 & n-2 & & n \\ n & n-1 & & 1 \end{bmatrix}$$

будем называть циклической, а ее определитель циклическим.

Приведем две леммы Мерзлякова.

Лемма М1. *Всякий определитель с неотрыцательными элементами, допускающий порядковую схему S, является неотрыцательной линейной комбинацией элементарных определителей с той-же порядковой схемой S.*

Лемма М2. *Всякий циклический определитель с неотрыцательными элементами неотрыцателен.*

Вопрос на который мы будем ответить формулируется так:

Определить найболее широкий класс K^+ порядковых схем S, для которого имеет место следующее предложение, аналогичное Лемме М2: всякий определитель с неотрыцательными элементами, допускающий порядковую схему $S \in K^+$, неотрыцателен.

* Представлено проф. Д. С. Митриновичем.

2. Прежде чем сформулируем ответ на этот вопрос, дадим некоторые определения.

Под транспозицией матрицы A будем понимать замену каких-либо двух строк или двух столбцов этой матрицы.

Пусть порядковая схема $S_2 = \sigma(S_1)$ получается из схемы S_1 совершая над последней цепочку транспозиций (σ). Будем писать $S_1 \approx S_2$ или $S_1 \sim S_2$ в зависимости от того содержит ли (σ) четное или нечетное число транспозиций. Легко видеть что $\approx$ есть отношение эквивалентности, т.е.

1° $S \approx S$ для каждой схемы S;

2° если $S_1 \approx S_2$ и $S_2 \approx S_3$ то $S_1 \approx S_3$;

3° если $S_1 \approx S_2$ то $S_2 \approx S_1$.

Отношение $\sim$ симетрично, т.е.

4° если $S_1 \sim S_2$ то $S_2 \sim S_1$.

Существуют такие схемы S_1 и S_2 что $S_1 \approx S_2$ и $S_1 \sim S_2$.

Наш результат содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Класс K^+ состоит из тех и только тех схем S для которых $S \approx Z^+$.*

С начала докажем три леммы.

Лемма 1. *Для каждой порядковой схемы S существует элементарный определитель допускающий схему S, который не равен нулю.*

Доказательство. Для схем второго порядка утверждение леммы легко проверяется. Пусть утверждение леммы верно для схем порядка $n-1 \geqslant 2$. Пусть $S = (s_{ij})$ схема порядка n. Без уменьшения общности можно предположить что $s_{11} = 1$. Обозначим через S_{11} подматрицу матрицы S которая получается отбросыванием первой строки и первого столбца схемы S. Определим элементарный определитель $A = |a_{ij}|$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ следующим образом:

(а) $a_{11} = 1, \quad a_{i1} = 0\, (i > 1)$;

(б) $A_{11} = |a_{ij}|$ $(i, j = 2, \ldots, n)$ есть элементарный определитель допускающий ту-же порядковую схему что и $-S_{11}$ и $A_{11} \neq 0$;

(в) элементы a_{1j} $(j = 2, \ldots, n)$ определяются так чтобы $a_{1j} = 0$ или 1 и чтобы определитель A допускал порядковую схему S.

Условию (б) можно удовлетворить по предположению индукции.

Пусть $i_1(j), i_2(j), \ldots, i_n(j)$ j-тый столбец схемы S. Если $i_1(j) = 1$ то положим $a_{1j} = 1$. Пусть $i_1(j) > 1$ и пусть число $i_1(j) - 1$ находится в строке $r(j)$ j-ого столбца. Тогда положим $a_{1j} = a_{r(j),\, j}$. Таким образом мы удовлетворим условию (в).

Разлагая определитель A по элементам первого столбца получим $A = A_{11} \neq 0$. Лемма доказана.

Аналогично классу K^+ определим класс K^- как найболее широкый класс порядковых схем S, для которого имеет место следующее предложение: всякий определитель с неотрыцательными элементами допускающий порядковую схему $S \in K^-$, неположителен. Через Z^- обозначим схему которая получается из схемы Z^+ транспозицией двух первых столбцов.

Из леммы 1 следует что K^+ и K^- дизюнктны. Из определений классов K^+ и K^- и отношений $\approx$ и $\sim$ получаем

5° если $S_1 \in K^+$ и $S_1 \approx S_2$ то $S_2 \in K^+$;
6° если $S_1 \in K^-$ и $S_1 \approx S_2$ то $S_2 \in K^-$;
7° если $S_1 \in K^+$ и $S_1 \sim S_2$ то $S_2 \in K^-$;
8° если $S_1 \in K^-$ и $S_1 \sim S_2$ то $S_2 \in K^+$.

Из этого следует что Теорема 1 эквивалентна утверждению что $S \in K^-$ тогда и только тогда если $S \approx Z^-$. Этот факт будем использовать в последствии без оговорки.

Лемма 2. *На существуют схемы S_1 и S_2 которые имеют одинаковые все столбцы кроме (может быть) одного, такие что $S_1 \approx Z^+$ и $S_2 \approx Z^-$.*

Доказательство. На основании Леммы М2, $Z^+ \in K^+$ и $Z^- \in K^-$. Из 5° и 6° и предположения леммы следует что тоже $S_1 \in K^+$ и $S_2 \in K^-$. Но K^+ и K^- дизюнктны, поэтому $S_1 \neq S_2$. Пусть (σ) цепочка четного числа транпозиций такая что $\sigma(S_1) = Z^+$. Схемы $\sigma(S_1) = Z^+$ и $\sigma(S_2)$ различаются тоже только в одном из столбцов так как это свойство инвариантно при транспозициях. Схема $\sigma(S_2)$ имеет по крайней мере в одной из строк одно и то-же число ибо из противного следует что $\sigma(S_2) = Z^+$. Эти два числа останут в одной и той же строке какую бы ни было цепочку транспозиций над $\sigma(S_2)$ совершили. Это противоречит предпосылке $S_2 \approx Z^-$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $S = (s_{ij})$ порядковая схема порядка n, $S \approx Z^+$ и*

$$s_{i1} = i, \qquad s_{ii} = 1 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

тогда $S = Z^+$.

Доказательство. Обозначим через (σ) цепочку четного числа транспозиций которая приводит S к форме Z^+. Пусть при том первый столбец схемы S попал в k-тый столбец схемы Z^+. Если последний столбец схемы Z^+ поставим перед первым, а затим последнюю строку полученной схемы поставим перед ее первой строкой, то получится снова схема Z^+. Номер каждого столбца кроме последнего увеличился за единицу а последний столбец стал первым. Эта трансформация эквивалентна некоторой цепочке четного числа транспозиций. Применяя эту трансформацию $n - k + 1$ раз, k-тый столбец перейдет в первый. Обозначим через (τ) соответствующую цепочку транспозиций. Сложная цепочка ($\sigma\tau$) приводит схему S к форме Z^+ и оставляет элементы первого столбца на месте. Из этого следует что цепочка транспозиций ($\sigma\tau$) сводится к цепочке транспозиций столбцов с номерами $2, \ldots, n$. Из-за тога что диагональные элементы схем S и Z^+ совпадают следует что цепочка ($\sigma\tau$) эквивалентна пустой цепочке, т.е. $S = Z^+$. Лемма доказана.

Примечание. *Также можно доказать что если S и Z^+ совпадают на главной диагонали и в одном из столбцов и $S \approx Z^+$ тогда $S = Z^+$.*

3. Теперь мы в состоянии доказать Теорему 1.

Доказательство Теоремы 1. В силу Леммы М1 достаточно ограничиться рассмотрением только элементарных определителей.

Достаточность условия $S \approx Z^+$ следует из 5° и Леммы М2.

Необходимость. Для $n=2$ легко проверить теорему. Пусть она верна для $n-1\geqslant 2$. Пусть S схема порядка n и $S\in K^+$.

Докажем что все единицы схемы S находятся в разных строках. Допустим обратно, т.е. предположим что существует схема $S\in K^+$ имеющая в одной строке две или больше единиц. Используя надлежащую цепочку транспозиций получим схему $T=(t_{ij})$ для которой $t_{11}=t_{12}=1$ и $T\approx S$, $T\in K^+$. Пусть $A=|a_{ij}|$ какой-либо элементарный определитель допускающий порядковую схему T и $a_{11}=1$, $a_{i1}=0\,(i>1)$. Обозначим через A_{11} минор элемента a_{11}. Через T_{11} обозначим порядковую схему подматрицы полученной отбросыванием первой строки и первого столбца матрицы — T. Минор A_{11} допускает порядковую схему T_{11}. Из $A_{11}=A\geqslant 0$ следует что $T_{11}\in K^+$. По предположению индукции $T_{11}\approx Z^+_{n-1}$. Аналогично доказывается что $T_{12}\approx Z^-_{n-1}$ где T_{12} порядковая схема подматрицы полученной отбросыванием первой строки и второго столбца матрицы — T. Но схемы T_{11} и T_{12} различаются (может быть) только в первом столбце что невозможно на основании Леммы 2. Итак, мы доказали что все единицы схемы S находятся в разных строках.

Совершая цепочку четного числа транспозиций на S мы в возможности поставить единицы на главных диагональных местах в первых $n-2$ столбцах. Обозначим новую схему через $S'=(s'_{ij})$. Тогда единицы в последних двух столбцах также должны лежать на главной диагонали. В самом деле если это не так, тогда определитель $A=|a_{ij}|$ где

$$a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{n-2,\,n-2}=1,$$

$$a_{n-1,\,n}=a_{n,\,n-1}=1,$$

$$a_{ij}=0 \text{ в остальных случаях},$$

допускает порядковую схему S' и отрыцателен.

Совершая новую цепочку четного числа транспозиций на S' мы можем получить схему $S''=(s''_{ij})$, которая на главной диагонали имеет единицы и в которой первый столбец $1, 2, \ldots, n$. Если, на пример, число 2 из первого столбца находится в k-той строке $(k>2)$, тогда надо совершить транспозиции k-той и второй строки и k-ого и второго столбца схемы S'.

Докажем что $S''=Z^+$ и этим Теорема 1 будет доказана. Для $n=2$ и $n=3$ в этом можно убедиться непосредственно. Из-за того мы предположим что $n\geqslant 4$. Пусть $A=|a_{ij}|$ какой либо элементарный определитель допускающий схему S'' и $a_{kk}=1$, $a_{ik}=0\,(i\neq k>1)$. Обозначим через $A^{(k)}$ минор элемента a_{kk}. Минор $A^{(k)}$ допускает схему $P^{(k)}$ где $P^{(k)}$ порядковая схема подматрицы полученной отбросыванием k-той строки и k-ого столбца матрицы — S''. Если $P^{(k)}=(p^{(k)}_{ij})$ ясно что $p^{(k)}_{ii}=1$, $p^{(k)}_{i1}=i\,(i=1,\ldots,n-1)$. Из $A^{(k)}=A\geqslant 0$ следует что $P^{(k)}\in K^+$ и по предположению индукции $P^{(k)}\approx Z^+_{n-1}$. На основании Леммы 3 $P^{(k)}=Z^+_{n-1}$. Так как это верно для каждого $k=2, 3, \ldots, n$ получаем что $S''=Z^+_n$ для $n\geqslant 5$. Для $n=4$ имеем

$$S''=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & \\ 3 & & 1 & \\ 4 & & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

где на пустых местах в втором и четвертом столбце должны быть 2, 3 и 3, 4 в каком-то порядке. Из $P^{(1)} \in K^{+}$ и

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & & \\ & 1 & & \\ & 2 & 1 & \end{bmatrix}$$

и Леммы 3 (смотри примечание) следует что $S'' = Z_4^{+}$. Теорема доказана.

Примечание. *На основании Леммы* 3 *и алгоритма из доказательства Теоремы* 1 *можно для каждого латинского квадрата установить эквивалентен ли этот квадрат квадрату* Z^{+} *или нет.*

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. И. Мерзляков, *О существовании положительных решений у систем линейних уравнений*, Успехи Математических Наук, **18**, вып. 3 (111), (1963), 179—186.

Résumé

LES SCHÉMAS D'ORDRE ET POSITIVITÉ DU DÉTERMINANT

D. Ž. Djoković

On démontre que la classe K des schémas est identique à celle obtenue par application d'un nombre pair de transpositions des lignes et des colonnes au schéma cyclique.

Pour la terminologie voir l'ouvrage cité.