PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 146 (1965)

ÜBER EINIGE SYSTEME PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN*

Stanimir Fempl

In seiner ausführlichen Arbeit über Integration eines Systems partieller Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=a(x, y)\,u+b(x, y)\,v+f(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=c(x, y)\,u+d(x, y)\,v+g(x, y)$$

welches in Problemen der Mechanik erscheint, zeigte Vekua [1] dass sich diesses System in der komplexen Form

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=Aw+B\bar{w}+F$$

darstellen lässt. Dabei ist

$$z=x+yi, \quad \bar{z}=x-yi, \quad w=u+vi, \quad \bar{w}=u-vi,$$

$$A=(a+d+ic-ib)/4, \quad B=(a-d+ic+ib)/4, \quad F=f+gi.$$

Vekua gab auch die reguläre Lösungen dieses Systems.

Der Ausdruck $\partial w/\partial \bar{z}$ wurde schon von Pompeiu [2] erforscht. Er nannte diesen Ausdruck „areoläre Ableitung“ und zeigte dass das Operationssymbol $\partial/\partial z$ mit dem Symbol $(\partial/\partial x+i\partial/\partial y)/2$ identisch ist.

Ebenso erforschte und erklärte Vekua den Sinn der Operation $\partial/\partial \bar{z}$, sowie ihre Existenz [1].

In einer meiner früheren Abhandlung benutzte ich die Idee des Zurückführens eines Systems partieller Gleichungen auf die komplexe Form [3] und fand dabei auch Lösungen von Systemen welche sich vom System (1) unterscheiden. Zu diesem zwecke gebrauchte ich das — etwass modifizierte — Pompeiusche Operationssymbol [4]

$$B=\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}; \tag{2}$$

ausserdem führte ich einen Operator ein [5], wonach $w=\tilde{\int} f(x, y)$ bedeutet dass $B(w)=f(x, y)$. Ich fand auch einige Eigenschaften dieses Operators.

---

* Vorgelegt von D. S. Mitrinović

In dieser Arbeit benutze ich den erwähnten Operator, um Lösungen von Partialgleichungssystemen zu erhalten die sich — in komplexer Form — auf eine homogene Differentialgleichung I Ordnung reduizieren, sowie auch auf Gleichungen die analog den Differentialgleichungen sind, bei denen die Trennung der Variablen durchführbar ist.

Ich erwähne noch zwei Formeln die mir in dieser Abhandlung notwendig sind, und die ich in der Arbeit [5] abgeleitet habe:

$$\tilde{\mathfrak{f}}\, f(w)\, B(w) = \int f(w)\, dw + P(z), \tag{3}$$

$$\tilde{\mathfrak{f}}\, \varphi(z)\psi(\bar{z}) = \frac{1}{2}\varphi(z) \int \psi(\bar{z})\, d\bar{z} + P(z). \tag{4}$$

Dabei sind $\varphi(z)$ und $P(z)$ analytische Funktionen und $P(z)$ ist noch willkührlich (diese letztere Funktion spielt eine Rolle der Integrationskonstante).

1. Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} &= \operatorname{Re} f\left(\frac{w}{\bar{z}}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \operatorname{Im} f\left(\frac{w}{\bar{z}}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

kann man auf eine komplexe Form bringen, indem man die zweite Gleichung mit i multipliziert und mit der ersten addiert. Da die linke Seite

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)(u + vi) = B(w)$$

wird, so erhält man

$$B(w) = f\left(\frac{w}{\bar{z}}\right). \tag{6}$$

Diese Gleichung kann man lösen indem man $w = t\bar{z}$ setzt. Sodann, wegen

$$B(t\bar{z}) = tB(\bar{z}) + \bar{z}B(t), \quad B(\bar{z}) = 2,$$

wie man sicht überzeugen kann, folgt aus (6)

$$\frac{B(t)}{f(t) - 2t} = \frac{1}{\bar{z}},$$

und da nach (3)

$$\tilde{\mathfrak{f}}\, \frac{B(t)}{f(t) - 2t} = \int \frac{1}{f(t) - 2t} + P_1(z)$$

ist, und nach (4) $(\varphi(z) = 1)$

$$\tilde{\mathfrak{f}}\, \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{2} \ln \bar{z} + P_2(z)$$

folgt so ist

$$\Phi(t) = \int \frac{dt}{f(t) - 2t} = \ln \sqrt{\bar{z}} + P(z).$$

Da auch $\exp[2P(z)]$ eine analytische Funktion ist, so bekommt man

$$\bar{z} = P(z)\, \Psi\left(\frac{w}{\bar{z}}\right) \qquad (\Psi = \exp 2\Phi)$$

d. h., die Lösungen des Systems (5) sind mit

$$x = \mathrm{Re}\left[P(z)\Psi\left(\frac{w}{z}\right)\right], \quad y = -\mathrm{Im}\left[P(z)\Psi\left(\frac{w}{z}\right)\right] \tag{7}$$

gegeben. Dabei ist $P(z)$ eine willkührliche analytiche Funktion.

Man nehme als Beispiel das System

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{4(ux - vy)}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{(4vx + uy)}{x^2 + y^2},$$

das sich auf

$$B(w) = 4\frac{u + vi}{x - yi} = 4\frac{w}{z}$$

reduziert. Hier ist

$$f\left(\frac{w}{z}\right) = \frac{4w}{z}, \quad \Phi(t) = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\ln|t|, \quad \Psi = t = \frac{w}{z},$$

und wenn man noch

$$P(z) = \alpha(x, y) + i\beta(x, y)$$

setzt, wobei α und β, selbstverständlich, die Cauchy—Riemannschen Bedingungen befriedigen müssen, so folgt auf Grund (7)

$$x = \frac{x(\alpha u - \beta v) - y(\beta u + \alpha v)}{x^2 + y^2}, \quad y = -\frac{x(\beta u + \alpha v) + y(\alpha u - \beta v)}{x^2 + y^2},$$

also

$$u = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}(x^2 - y^2) - 2xy\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad v = -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}(x^2 - y^2) - 2xy\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Da auch die Koeffizienten neben $x^2 - y^2$ bzw. $2xy$ willkürliche Funktionnen sind, so kann mann die Lösungen in der Form

$$\begin{cases} u = \alpha(x^2 - y^2) + 2\beta xy \\ v = \beta(x^2 - y^2) - 2\alpha xy \end{cases}$$

schreiben. Man überzeugt sich leicht, dass auch diese neue Funktionen α und β die Cauchy—Riemannschen Bedingungen befriedigen.

2. Das Gleichungssystem

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \mathrm{Re}\,[f(w)\psi(\bar{z})], \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{Im}\,[f(w)\psi(\bar{z})] \tag{8}$$

kann man durch ein ähnliches Verfahren wie in 1. auf die komplexe Form

$$B(w) = f(w)\psi(\bar{z})$$

bringen, und diese Gleichung entspricht einer Differentialgleichung in der die Trennung der Variablen durchführbar ist. Denn, aus der letzten Gleichung erhält man

$$\frac{B(w)}{f(w)} = \psi(\bar{z})$$

und da nach (3) und (4) $(\varphi(z)=1)$

$$F(w)=\int\frac{d(w)}{f(w)}=\frac{1}{2}\int\psi(\bar{z})\,d\bar{z}+P(z)=\Phi(\bar{z})+P(z)$$

ist, so kann man in konkreten Fällen die unbekannten Funktionen u und v durch die Grössen x und y ausdrücken, und durch zwei willkürliche Funktionen $\alpha(x, y)$ und $\beta(x, y)$, die den reellen und imaginären Teil der willkürlichen analytischen Funktion $P(z)$ darstellen.

Als Beispiel nehme man das System

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{x(u^2-v^2)-2yuv}{x^2+y^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xuv+y(u^2-v^2)}{x^2+y^2}.$$

Dieses System reduziert sich auf

$$B(w)=\frac{w^2}{\bar{z}},$$

und daraus folgt

$$\int\frac{B(w)}{w^2}=\int\frac{1}{\bar{z}}$$

d. h.

$$-\frac{1}{w}=\frac{1}{2}\ln\bar{z}+P_1(z).$$

Nach einer kürzeren Rechnung erhält man

$$u=2\,\frac{\alpha(x, y)-\ln\sqrt{x^2+y^2}}{(\alpha-\ln\sqrt{x^2+y^2})^2+\left(\beta+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)^2},$$

$$v=-2\,\frac{\beta(x, y)+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}{(\alpha-\ln\sqrt{x^2+y^2})^2+\left(\beta+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right)^2},$$

wo α und β den reellen und imaginären Teil einer willkürlichen analytischen Funktion darstellen.

LITERATUR

[1] И. Н. Векуа: *Обобщенные аналитические функции.* Москва, Физматгиз. 1959.

[2] D. Pompeiu: *Sur une classe de fonctions d'une variable complexe.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. 33, 1912, pp. 108—113 et t. 35, 1913, pp. 277—281.

[3] S. Fempl: *Reguläre Lösungen eines Systems partieller Diferentialgleichungen.* Publications de l'Institut Mathematique. t. 4 (18), Beograd. pp. 115—120.

[4] А. Билимовић: *Диференцијални елементи геометријске теорије неаналитичких функција.* „Глас" српске Академије наука. CCX. књ. 19 (1960). Београд. Стр. 1—82.

[5] S. Fempl: *Areolarni polinomi kao klasa neanalitičkih funkcija čiji su realni i imaginarni delovi poliharmonijske funkcije.* Matematički vesnik 1 (16) 1964. Beograd. Str. 29—38.