PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 145 (1965)

INÉGALITÉS IMPLIQUÉES PAR LE SYSTÈME DES ÉGALITÉS

$$a+b+c=p, \quad bc+ca+ab=q$$

Dragoslav S. Mitrinović

1. Si a, b, c sont des nombres réels différents donnés et si

$$a+b+c=p, \quad bc+ca+ab=q,$$

on a alors:

1° $p^2-3q>0$;

$$2^\circ \begin{cases} \frac{1}{3}p+\frac{1}{3}D<\max(a,b,c)<\frac{1}{3}p+\frac{2}{3}D, \\ \frac{1}{3}p-\frac{1}{3}D<\operatorname{med}(a,b,c)<\frac{1}{3}p+\frac{1}{3}D, \\ \frac{1}{3}p-\frac{2}{3}D<\min(a,b,c)<\frac{1}{3}p-\frac{1}{3}D, \end{cases}$$

avec $D=\sqrt{p^2-3q}$ et $\min(a,b,c)<\operatorname{med}(a,b,c)<\max(a,b,c)$.

Démonstration. À partir des égalités

$$a+b+c=p, \quad bc+cb+ab=q, \tag{1}$$

on obtient

$$a+b=p-c, \quad ab=q-cp+c^2. \tag{2}$$

Des égalités (2) on tire

$$\min(a,b)=\frac{1}{2}(p-c-\sqrt{-3c^2+2pc+p^2-4q}),$$

$$\max(a,b)=\frac{1}{2}(p-c+\sqrt{-3c^2+2pc+p^2-4q}).$$

Puisque a, b, c sont réels, le discriminant du trinome du second degré

$$-3c^2+2pc+p^2-4q$$

doit être non négatif, à savoir

$$p^2-3q\geqslant 0.$$

Dans le cas où $p^2-3q=0$, on parvient à $a=b=c=p/3$. Ce cas peut être inclus dans les formules 1° et 2° en remplaçant $>$ et $<$ respectivement par $\geqslant$ et $\leqslant$.

Le nombre c appartient au segment

$$\left[\frac{1}{3}(p-2D),\ \frac{1}{3}(p+2D)\right]\equiv I.$$

Étant donné que les a, b, c figurent symétriquement dans (2), on conclut que

(3) $$a,\ b,\ c\in I.$$

L'équation du troisième degré ayant les racines a, b, c possède la forme suivante

$$t^3-pt^2+qt-abc=0.$$

Les racines de l'équation

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t^3-pt^2+qt-abc)=0 \quad \text{ou bien} \quad 3t^2-2pt+q=0$$

sont

$$t_1=\frac{1}{3}(p-D),\quad t_2=\frac{1}{3}(p+D).$$

Vu le théorème de Rolle et la relation (3), on parvient aux inégalités 2°.

Considérons à présent le cas où $a\neq b=c$. Le système (1) devient alors

$$a+2b=p,\quad 2ab+b^2=q,$$

ce qui conduit a

$$3b^2-2pb+q=0.$$

Puisque a et b sont réels différents, à partir de la dernière équation, on voit que $p^2-3q>0$.

Par suite, on a

$$b=\frac{1}{3}(p\pm D),\quad a=\frac{1}{3}(p\mp 2D).$$

Exemple. Dans le cas où $p=2$ et $q=1$, on a

(4) $$a\in\left(0,\frac{1}{3}\right),\qquad b\in\left(\frac{1}{3},1\right),\qquad c\in\left(1,\frac{4}{3}\right).$$

Soit $a=1/4$; on a alors

$$b+c=\frac{7}{4},\qquad bc=\frac{9}{16},$$

ce qui donne

$$b=\frac{1}{8}(7-\sqrt{13})=0{,}42\ \ldots\in\left(\frac{1}{3},1\right),$$

$$c=\frac{1}{8}(7+\sqrt{13})=1{,}32\ \ldots\in\left(1,\frac{4}{3}\right).$$

R. L. Goodstein, dans son livre *The uniform calculus and its applications* (Oxford, 1948), à la page 356, a indiqué le système (1) avec $p=2$ et $q=1$. Par un raisonnement, un peu plus compliqué que celui donné ici, Goodstein a trouvé le résultat (4).

2. Considérons maintenant le problème inverse à celui résolu plus haut.

Pour que le système d'équations (1) ait des solutions réelles (a, b, c) avec $a \neq b \neq c \neq a$, il faut et il suffit que les nombres réels p et q satisfassent à la condition $p^2 - 3q > 0$. Les formules 2° donnent alors les limites entre lesquelles se trouvent a, b, c.

On parvient aussi à l'implication suivante:

$$\left(p > 0 \text{ et } \frac{p^2}{4} \leqslant q < \frac{p^2}{3}\right) \Rightarrow (a > 0,\ b > 0,\ c > 0).$$

Dans le cas où $q = p^2/3$, on a $D = 0$ et $a = b = c$.

Les faits précédents donnent la solution du problème suivant:

Comment faut-il choisir p et q pour que $p(>0)$ soit la somme des arêtes a, b, c d'un parallélépipède rectangle et $2q\,(q>0)$ son aire?

La réponse à cette question est donnée par

$$\frac{p^2}{4} \leqslant q < \frac{p^2}{3}.$$

3. D'une manière analogue, on traite le problème correspondant en prenant comme point de départ les égalités suivantes:

$$\sum a = p, \quad \sum ab = q, \quad \sum abc = r,$$

où $\sum a$, $\sum ab$, $\sum abc$ sont des fonctions symétriques élémentaires des nombres réels a, b, c, d. Cependant, dans ce cas, on s'impose une discussion plus compliquée que celle indiquée plus haut.