PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA—SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 144 (1965)

LIMITATIONS EN MODULE D'UNE FONCTION HOMOGRAPHIQUE SUR UN CERCLE

Dragoslav S. Mitrinović

Si le point z décrit un cercle ($\gamma \neq 0$) ou une droite ($\gamma = 0$), déterminés par

$$\gamma z \bar{z} + \bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} - \beta = 0 \quad (\beta, \gamma \text{ réels et } \alpha\bar{\alpha} + \beta\gamma > 0), \tag{1}$$

le point

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc \neq 0)$$

décrit un cercle ou une droite dont l'équation est

$$\begin{aligned} &[(\alpha c - \gamma d)\bar{d} + (\beta c + \bar{\alpha} d)\bar{c}]\, w\bar{w} - [(\alpha c - \gamma d)\bar{b} + (\beta c + \bar{\alpha} d)\bar{a}]\, w \\ &\quad - [(\bar{\alpha}\bar{c} - \gamma \bar{d})\, b + (\beta \bar{c} + \alpha \bar{d})\, a]\, \bar{w} + [(\alpha a - \gamma b)\bar{b} + (\beta a + \bar{\alpha} b)\bar{a}] = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Cette équation représente un cercle, si

$$D = (\alpha c - \gamma d)\bar{d} + (\beta c + \bar{\alpha} d)\bar{c} \neq 0.$$

En comparant $|w-p| = R$ à (2), on obtient

$$R^2 = p\bar{p} - \frac{(\alpha a - \gamma b)\bar{b} + (\beta a + \bar{\alpha} b)\bar{a}}{D}, \tag{3}$$

$$p = \frac{1}{D}[(\bar{\alpha}\bar{c} - \gamma\bar{d})b + (\beta\bar{c} + \alpha\bar{d})a]. \tag{4}$$

On en tire

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{1}{D^2}\{[(\bar{\alpha}\bar{c} - \gamma\bar{d})\, b + (\beta\bar{c} + \alpha\bar{d})\, a]\,[(\alpha c - \gamma d)\bar{b} + (\beta c + \bar{\alpha} d)\bar{a}] \\ &\quad - [(\alpha a - \gamma b)\bar{b} + (\beta a + \bar{\alpha} b)\bar{a}]\,[(\alpha c - \gamma d)\bar{d} + (\beta c + \bar{\alpha} d)\bar{c}]\} \\ &= \frac{1}{D^2}(ad - bc)(\bar{a}\bar{d} - \bar{b}\bar{c})(\alpha\bar{\alpha} + \beta\gamma). \end{aligned}$$

On en déduit

$$R = \frac{1}{|D|}\,|ad - bc|\,\sqrt{\alpha\bar{\alpha} + \beta\gamma}. \tag{5}$$

À partir de (2), on a immédiatement

$$R^2-|p|^2=-\frac{1}{D}[(\alpha a-\gamma b)\bar{b}+(\beta a+\bar{\alpha}b)\bar{a}].$$

On en tire

$$(6)\qquad \big|R-|p|\big|=\frac{|R^2-|p|^2|}{R+|p|}=\frac{|(\alpha a-\gamma b)\bar{b}+(\beta a+\bar{\alpha}b)\bar{a}|}{|ad-bc|\sqrt{\alpha\bar{\alpha}+\beta\gamma}+|(\bar{\alpha}\bar{c}-\gamma\bar{d})b+(\beta\bar{c}+\alpha\bar{d})a|}.$$

Par suite, si le point z décrit (1), avec $D\neq 0$ et $ad-bc\neq 0$, on a les inégalités suivantes:

$$(7)\qquad \big|R-|p|\big|\leqslant\left|\frac{az+b}{cz+d}\right|\leqslant R+|p|,$$

où $\big|R-|p|\big|$, R et p sont donnés respectivement par (6), (5), (4).

Si l'on a $D=0$ et $ad-bc\neq 0$, alors, à partir de

$$|A\bar{w}+\bar{A}w|\leqslant|A\bar{w}|+|\bar{A}w|=2|A||w|,$$

on obtient, selon (2),

$$(8)\qquad \frac{1}{2}\left|\frac{B}{A}\right|\leqslant\left|\frac{az+b}{cz+d}\right|\qquad (A\neq 0).$$

avec

$$A=(\bar{\alpha}\bar{c}-\gamma\bar{d})b+(\beta\bar{c}+\alpha\bar{d})a,$$

$$B=-[(\alpha a-\gamma b)\bar{b}+(\beta a+\bar{\alpha}b)\bar{a}].$$

Les inégalités (7) et (8) sont précisément celles démontrées par F. Simonart [1], suivant une voie géométrique, beaucoup plus longue et moins directe que celle employée dans cette petite note. Dans le Traité de Carathéodory ([2], p. 44—46) est considéré un cas particulier du problème envisagé.

RÉFÉRENCES

[1] F. Simonart, *Limitations en module d'une fonction linéaire sur un cercle*, Bulletin de l'Académie royale de Belgique, Classe des sciences, 5e série, t. 39, 1953, p. 458—462.

[2] C. Carathéodory, *Funktionentheorie*, I, Basel 1950.