PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 137 (1965)

SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LINÉAIRES PARACYCLIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE*

P. M. Vasić, R. R. Janić, R. Ž. Đorđević

0. Introduction

Soient: S, un ensemble non vide arbitraire;

M, un groupe additif abélien;

$$X=(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ Y=(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)\quad (x_\mu,\ y_\nu\in S;\ \mu,\ \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

$$X_i=(x_{i1},\ x_{i2},\ \ldots,\ x_{in})\quad (x_{ij}\in S;\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ \ i=1,\ 2,\ \ldots)$$

$$Q_\mu^\nu X=Q_\mu^\nu(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)=(x_\mu,\ x_{\mu+1},\ \ldots,\ x_\nu)\quad (\mu\leqslant\nu)$$

$$=(x_\mu,\ x_{\mu+1},\ \ldots,\ x_n,\ x_1,\ \ldots,\ x_\nu)\quad (\mu>\nu);$$

C_n, un opérateur cyclique défini par

$$C_n Q_\mu^\nu X=Q_{\mu+1}^{\nu+1} X\quad (Q_{\mu+1}^{\nu+1} X=Q_{\mu+1}^{\nu+1-n} X \text{ pour } \nu+1>n).$$

D. S. Mitrinović (*voir:* [1] et [2]) a introduit dans la litérature les équations fonctionnelles linéaires paracycliques de première et de seconde espèce. Les équations paracycliques de première espèce sont les équations de la forme

$$(0.1)\qquad \sum_{i=1}^{n} f(C_n^{i-1} Q_1^{p_1} X_1, C_n^{i-1} Q_1^{p_2} X_2,\ \ldots,\ C_n^{i-1} Q_1^{p_m} X_m)=0.$$

D. S. Mitrinović a également donné une méthode de résolution de ces équations et appliqué cette méthode à quelques cas particuliers.

Dans cette Note nous allons résoudre l'équation

$$(0.2)\qquad \sum_{i=1}^{n} f_i\,(C_n^{i-1} Q_1^{p_1} X_1, C_n^{i-1} Q_1^{p_2} X_2,\ \ldots,\ C_n^{i-1} Q_1^{p_m} X_m)=0$$

et (0.1) dans le cas où $m=2$.

Nous allons résoudre au première lieu l'équation suivante

$$(0.3)\qquad \sum_{i=1}^{k} f_i\,(C_n^{i-1} Q_1^{p} X, C_n^{i-1} Q_1^{q} Y)=0\quad (k\leqslant n).$$

---

* Présenté le 20 décembre 1964 par D. S. Mitrinović.

1. L'équation (0.3)

Il faut distingeur les cas suivants:

1° $q<2q-1\leqslant p=n$, 2° $q<p=n<2q-1$, 3° $q<p<n<2q-1<2p-1$,

4° $q<p<2q-1\leqslant n<p+q-1<2p-1$, 5° $q<p<p+q-1<n<2p-1$,

6° $q<p<2q-1<2p-1\leqslant n$.

Théorème 1. — *Si l'on a* $q<2q-1\leqslant p=n$, *la solution générale de l'équation* (0.3), *est*

$$
\begin{aligned}
(1.1)\qquad & f_r(Q_1^n X, Q_1^q Y)\\
= & \sum_{\nu=1}^{\min(k-r,\, q-1)} (-1)^{\nu-1} F_r^{\nu}(Q_{\nu+1}^{\nu} X, Q_{\nu+1}^{q} Y) + \sum_{\nu=n-r+1}^{q-1} (-1)^{\nu-1} F_r^{\nu}(Q_{\nu+1}^{\nu} X, Q_{\nu+1}^{q} Y)\\
& + \sum_{\nu=q}^{\min(k-r,\, n-q)} (-1)^{\nu-1} F_r^{\nu}(Q_{\nu+1}^{\nu} X) + \sum_{\nu=\max(n-r+1,\, q)}^{n-q} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^n X)\\
& + \sum_{\nu=n-q+1}^{k-r} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^n X, Q_1^{q+\nu} Y)\\
& \qquad + \sum_{\nu=\max(n-r+1,\, n-q+1)}^{n-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^n X, Q_1^{q+\nu} Y)
\end{aligned}
$$

où $r=1, 2, \ldots, k$ *et* $F_j^i : S^{p+q-1} \to M$ *sont des fonctions arbitraires.*

Théorème 2. — *Si l'on a* $q<p=n<2q-1$, *la solution générale de l'équation* (0.3), *est*

$$
\begin{aligned}
(1.2)\qquad & f_r(Q_1^n X, Q_1^q Y)\\
= & \sum_{\nu=1}^{\min(k-r,\, n-q)} (-1)^{\nu-1} F_r^{\nu}(Q_{\nu+1}^{\nu} X, Q_{\nu+1}^{q} Y) + \sum_{\nu=n-r+1}^{n-q} (-1)^{\nu-1} F_r^{\nu}(Q_{\nu+1}^{\nu} X, Q_{\nu+1}^{q} Y)\\
& + \sum_{\nu=n-q+1}^{\min(k-r,\, q-1)} (-1)^{\nu-1} F_r^{\nu}(Q_{\nu+1}^{\nu} X, Q_{\nu+1}^{q} Y, Q_1^{q+\nu} Y)\\
& + \sum_{\nu=\max(n-r+1,\, n-q+1)}^{q-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^n X, Q_1^{q+\nu} Y, Q_{\nu+1}^{q} Y)\\
& + \sum_{\nu=q}^{k-r} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^n X, Q_1^{q+\nu} Y) + \sum_{\nu=\max(n-r+1,\, q)}^{n-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^n X, Q_1^{q+\nu} Y)
\end{aligned}
$$

où $r=1, 2, \ldots, k$ *et* $F_i^j : S^{p+q-1} \to M$ *sont des fonctions arbitraires.*

Les démonstration des théorèmes 1 et 2 sont analogues à celles du théorème 1 dans l'article [3].

Théorème 3. — *Dans le cas où* $q<p<n<2q-1<2p-1$ *la solution générale de l'équation* (0.3), *est*

$$f_r(Q_1^p X, Q_1^q Y) \tag{1.3}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\min(n-p,\,k-r)} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y) + \sum_{\nu=n-r+1}^{n-p} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y)$$

$$+ \sum_{\nu=n-p+1}^{\min(k-r,\,n-q)} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_1^{\nu+p} X, Q_{\nu+1}^q Y)$$

$$+ \sum_{\nu=\max(n-p+1,\,n-r+1)}^{n-q} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_1^{\nu+p} X, Q_{\nu+1}^q Y)$$

$$+ \sum_{\nu=n-q+1}^{\min(k-r,\,q-1)} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_1^{\nu+p} X, Q_{\nu+1}^q Y, Q_1^{\nu+q} Y)$$

$$+ \sum_{\nu=\max(n-q+1,\,n-r+1)}^{q-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} (Q_1^{\nu+p} X, Q_{\nu+1}^p X, Q_1^{\nu+q} Y, Q_{\nu+1}^q Y)$$

$$+ \sum_{\nu=q}^{\min(k-r,\,p-1)} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} (Q_1^{\nu+p} X, Q_{\nu+1}^p X, Q_1^{\nu+q} Y)$$

$$+ \sum_{\nu=\max(q,\,n-r+1)}^{p-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} (Q_1^{\nu+p} X, Q_{\nu+1}^p X, Q_1^{\nu+q} Y)$$

$$+ \sum_{\nu=p}^{k-r} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} (Q_1^{\nu+p} X, Q_1^{\nu+q} Y)$$

$$+ \sum_{\nu=\max(p,\,n-r+1)}^{n-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} (Q_1^{\nu+p} X, Q_1^{\nu+q} Y),$$

où $r=1, 2, \ldots, k$ *et* $F_i^j : S^{p+q-2} \to M$ *sont des fonctions arbitraires.*

Théorème 4. — *La solution générale de l'équation* (0.3), *avec* $q<p<$ $<2q-1 \leqslant n \leqslant p+q-1<2p-1$, *est*

$$f_r(Q_1^p X, Q_1^q Y) \tag{1.4}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\min(n-p,\,k-r)} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y) + \sum_{\nu=n-r+1}^{n-p} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y)$$

$$+ \sum_{\nu=n-p+1}^{\min(k-r,\,q-1)} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_1^{\nu+p} X, Q_{\nu+1}^q Y)$$

$$+ \sum_{\nu=\max(n-p+1,\,n-r+1)}^{q-1} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_1^{\nu+p} X, Q_{\nu+1}^q Y)$$

$$+\sum_{\nu=q}^{\min(k-r,\,n-q)}(-1)^{\nu+1}F_r^{\nu}(Q_{\nu+1}^{p}X,\,Q_1^{\nu+p}X)$$

$$+\sum_{\nu=\max(n-r+1,\,q)}^{n-q}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{\nu+p}X,\,Q_{\nu+1}^{p}X)$$

$$+\sum_{\nu=n-q+1}^{\min(k-r,\,p-1)}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{\nu+p}X,\,Q_{\nu+1}^{p}X,\,Q_1^{\nu+q}Y)$$

$$+\sum_{\nu=\max(n-q+1,\,n-r+1)}^{p-1}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{\nu+p}X,\,Q_{\nu+1}^{p}X,\,Q_1^{\nu+q}Y)$$

$$+\sum_{\nu=p}^{k-r}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{\nu+p}X,\,Q_1^{\nu+q}Y)+\sum_{\nu=\max(p,\,n-r+1)}^{n-1}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{\nu+p}X,\,Q_1^{\nu+q}Y)$$

où $r=1,2,\ldots,k$ *et* $F_j^i: S^{p+q-2}\to M$ *sont des fonctions arbitraires.*

Théorème 5. — *La solution générale de l'équation* (0.3), *où* $q<p<p+q-1<n<2p-1$, *est*

$$f_r(Q_1^pX,\,Q_1^qY) \tag{1.5}$$

$$=\sum_{\nu=1}^{\min(q-1,\,k-r)}(-1)^{\nu+1}F_r^{\nu}(Q_{\nu+1}^{p}X,\,Q_{\nu+1}^{q}Y)+\sum_{\nu=n-r+1}^{q-1}(-1)^{\nu+1}F_r^{\nu}(Q_{\nu+1}^{p}X,\,Q_{\nu+1}^{q}Y)$$

$$+\sum_{\nu=q}^{\min(k-r,\,n-p)}(-1)^{\nu+1}F_r^{\nu}(Q_{\nu+1}^{p}X)+\sum_{\nu=\max(q,\,n-r+1)}^{n-p}(-1)^{\nu+1}F_r^{\nu}(Q_{\nu+1}^{p}X)$$

$$+\sum_{\nu=n-p+1}^{\min(k-r,\,p-1)}(-1)^{\nu+1}F_r^{\nu}(Q_{\nu+1}^{p}X,\,Q_1^{\nu+p}X)$$

$$+\sum_{\nu=\max(n-p+1,\,n-r+1)}^{p-1}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{\nu+p}X,\,Q_{\nu+1}^{p}X)$$

$$+\sum_{\nu=p}^{\min(k-r,\,n-q)}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{\nu+p}X)+\sum_{\nu=\max(p,\,n-r+1)}^{n-q}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{\nu+p}X)$$

$$+\sum_{\nu=n-q+1}^{k-r}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{\nu+p}X,\,Q_1^{\nu+q}Y)$$

$$+\sum_{\nu=\max(n-q+1,\,n-r+1)}^{n-1}(-1)^{n-\nu}F_{\nu+r}^{n-\nu}(Q_1^{\nu+p}X,\,Q_1^{\nu+q}Y),$$

oú $r=1,2,\ldots,k$ *et* $F_i^j: S^{p+q-2}\to M$ *sont des fonctions arbitraires.*

Démonstration des théorèmes 3, 4, 5. Ces théorèmes se démontrent de la même manière. C'est pourquoi nous allons démontré seulement le théorème 5.

Pour $k=2$, l'équatoin (0.3) a la forme

$$f_1(Q_1^p X, Q_1^q Y)+f_2(Q_2^{p+1} X, Q_2^{q+1} Y)=0. \tag{1.6}$$

En faisant $x_i=x_i^0$ $(x_i\in[X]\setminus[Q_1^p X])$, $y_i=y_i^0$ $(y_i\in[Y]\setminus[Q_1^q Y])$ $(x_i^0, y_i^0\in S,\ i=1,2,\ldots)$, où l'on a, par exemple $[X]=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, à partir de (1.6) on obtient

$$f_1(Q_1^p X, Q_1^q Y)=F_1^1(Q_2^p X, Q_2^q Y). \tag{1.7}$$

Si l'on porte (1.7) dans (1.6), on trouve

$$f_2(Q_2^{p+1} X, Q_2^{q+1} Y)=-F_1^1(Q_2^p X, Q_2^q Y),$$

d'où

$$f_2(Q_1^p X, Q_1^q Y)=-F_1^1(Q_1^{p-1} X, Q_1^{q-1} Y). \tag{1.8}$$

Pour $k=2$ et $r=1, 2$, de (1.5) on obtient (1.7) et (1.8). Donc, le théorème est vrai pour $k=2$.

Supposons que la solution générale de l'équation

$$\sum_{i=1}^{k} g_i(C_n^{i-1} Q_1^p X, C_n^{i-1} Q_1^q Y)=0 \tag{1.9}$$

soit donnée par (1.5) avec $f_r=g_r$.

Considérons maintenant l'équation

$$\sum_{i=1}^{k+1} f_i(C_n^{i-1} Q_1^p X, C_n^{i-1} Q_1^q Y)=0. \tag{1.10}$$

Nous allons distinguer les cas suivants:

1° $1<k<q$, 2° $q\leqslant k<n-p+1$, 3° $n-p+1\leqslant k<p$,
4° $p\leqslant k<n-q+1$, 5° $n-q+1\leqslant k<n$.

<u>1° $1<k<q$</u>. La substitution

$$x_i=x_i^0\ (x_i\in[X]\setminus[Q_{k+1}^{p+k} X]),\quad y_i=y_i^0\ (y_i\in[Y]\setminus[Q_{k+1}^{q+k} Y]) \tag{1.11}$$
$$(x_i^0, y_i^0=\text{const}\in S)$$

transforme l'équation (1.10) en

$$f_{k+1}(Q_{k+1}^{p+k} X, Q_{k+1}^{q+k} Y)=\sum_{\nu=n-k}^{n-1}(-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu}(Q_{k+1}^{\nu+p+k} X, Q_{k+1}^{\nu+q+k} Y). \tag{1.12}$$

En introduissant les nouvelles fonctions par

$$g_\nu=f_\nu+(-1)^{k+1-\nu} F_\nu^{k+1-\nu} \qquad (\nu=1, 2, \ldots, k) \tag{1.13}$$

et en portant (1.12) dans (1.10), on obtient l'équation (1.9). Donc, d'après l'hypothèse et (1.13) la solution générale de l'équation (1.10) est

$$(1.14)\quad f_r(Q_1^p X, Q_1^q Y) = \sum_{\nu=1}^{k-r} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y) + S_2 + S_4 + S_6 + S_8 + S_{10}$$
$$+ (-1)^{k-r} F_r^{k+1-r} (Q_{k-r+2}^p X, Q_{k-r+2}^q Y)$$
$$= \sum_{\nu=1}^{k+1-r} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y) + S_2 + S_4 + S_6 + S_8 + S_{10} \quad (r = 1, 2, \ldots, k)$$

où S_2, S_4, S_6, S_8, S_{10} désignent la deuxième, la quatrième, la sixième, la huitième et la dixième somme dans (1.5).

Donc, d'après (1.12) et (1.14), dans le cas où $1<k<q$, le théorème 5 est aussi vrai pour $k+1$.

2° $q \leqslant k < n-p+1$. Pour les valeurs (1.11) l'équation (1.10) devient

$$(1.15)\quad f_{k+1}(Q_{k+1}^{p+k} X, Q_{k+1}^{q+k} Y) = \sum_{\nu=n-k}^{n-q} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{\nu+p+k} X)$$
$$+ \sum_{\nu=n-q+1}^{n-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{\nu+p+k} X, Q_{k+1}^{\nu+q+k} Y).$$

Introduisons les nouvelles notations comme suit

$$(1.16)\qquad g_\nu = f_\nu + (-1)^{k+1-\nu} F_\nu^{k+1-\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k).$$

Vu (1.15) et (1.16), l'équation (1.10) devient (1.9). En utilisant l'hypothèse inductive, d'après (1.16) on conclut que la solution générale de l'équation (1.10) est

$$f_r(Q_1^p X, Q_1^q Y) = \sum_{\nu=1}^{q-1} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y) + \sum_{\nu=q}^{k-r} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X)$$
$$+ (-1)^{k-r} F_r^{k+1-r} (Q_{k-r+2}^p X) + S_2 + S_4 + S_6 + S_8 + S_{10} \quad (r = 1, \ldots, k-q+1),$$
$$= \sum_{\nu=1}^{k-r} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y) + S_2 + S_4 + S_6 + S_8 + S_{10}$$
$$+ (-1)^{k-r} F_r^{k+1-r} (Q_{k-r+2}^p X, Q_{k-r+2}^q Y) \quad (r = k-q+2, \ldots, k),$$

ou bien

$$(1.17)\quad f_r(Q_1^p X, Q_1^q Y) = \sum_{\nu=1}^{\min(q-1,\, k+1-r)} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y)$$
$$+ \sum_{\nu=q}^{k-r} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X) + S_2 + S_4 + S_6 + S_8 + S_{10} \quad (r = 1, 2, \ldots, k),$$

où S_i ont les mêmes significations comme dans (1.14).

Donc, d'après (1.15) et (1.17) on conclut que le théorème 5 est vrai dans le cas considéré.

3° $n-p+1 \leqslant k < p$. Si l'on fait la substitution (1.11) dans (1.10) on trouve

$$(1.18) \quad f_{k+1}(Q_{k+1}^{p+k} X, Q_{k+1}^{q+k} Y) = \sum_{\nu=n-k}^{p-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{\nu+p+k} X, Q_{k+1+\nu}^{k+p} X)$$

$$+ \sum_{\nu=p}^{n-q} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{\nu+p+k} X) + \sum_{\nu=n-q+1}^{n-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{\nu+p+k} X, Q_{k+1}^{\nu+q+k} Y)$$

Si l'on porte (1.18) dans (1.10) et si l'on fait la transformation (1.16), on obtient l'équation (1.9). D'après (1.16) et l'hypothèse inductive on trouve que la solution générale de l'équation (1.10) est

$$f_r(Q_1^p X, Q_1^q Y) = \sum_{\nu=1}^{q-1} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y) + \sum_{\nu=q}^{n-p} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X)$$

$$+ \sum_{\nu=n-p+1}^{k-r} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_1^{\nu+p} X) + (-1)^{k-r} F_r^{k+1-r} (Q_{k+2-r}^p X, Q_1^{k+1-r+p} X)$$

$$+ S_2 + S_4 + S_6 + S_8 + S_{10} \quad (r = 1, 2, \ldots, k+p-n),$$

$$= \sum_{\nu=1}^{q-1} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y) + \sum_{\nu=q}^{k-r} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X)$$

$$+ S_2 + S_4 + S_6 + S_8 + S_{10} + (-1)^{k-r} F_r^{k+1-r} (Q_{k+2-r}^p X)$$

$$(r = k+p-n+1, \ldots, k-q+1),$$

$$= \sum_{\nu=1}^{k-r} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y) + S_2 + S_4 + S_6 + S_8 + S_{10}$$

$$+ (-1)^{k-r} F_r^{k+1-r} (Q_{k+2-r}^p X, Q_{k+2-r}^q Y) \quad (r = k-q+2, \ldots, k),$$

où S_i sont définie comme dans (1.14).

On peut écrire la dernière égalité sous la forme

$$(1.19) \quad f_r(Q_1^p X, Q_1^q Y) = \sum_{\nu=1}^{\min(q-1,\, k+1-r)} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y)$$

$$+ \sum_{\nu=q}^{\min(n-p,\, k+1-r)} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X) + \sum_{\nu=n-p+1}^{k-r} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_1^{\nu+p} X)$$

$$+ S_2 + S_4 + S_6 + S_8 + S_{10} \quad (r = 1, 2, \ldots, k).$$

Ainsi, d'après (1.18) et (1.19), le théorème 5 est vrai dans ce cas.

4° $p \leqslant k < n-q+1$. En utilisant (1.11) à partir de (1.10) on obtient

$$(1.20) \quad f_{k+1}(Q_{k+1}^{p+k} X, Q_{k+1}^{q+k} Y) = \sum_{\nu=n-k}^{n-p} (-1)^{\nu+1} F_{k+1}^\nu (Q_{\nu+k+1}^{p+k} X)$$

$$+ \sum_{\nu=n-p+1}^{p-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{\nu+k+p} X, Q_{\nu+k+1}^{k+p} X) + \sum_{\nu=p}^{n-q} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{\nu+p+k} X)$$

$$+ \sum_{\nu=n-q+1}^{n-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{\nu+p+k} X, Q_{k+1}^{\nu+q+k} Y).$$

Si dans (1.10) on porte f_{k+1}, donné à l'aide de (1.20), vu la substitution

$$(1.21)\qquad g_\nu = f_\nu + (-1)^{n-k+\nu} F_{k+1}^{n-k+\nu-1} \quad (\nu = 1, \ldots, k-p+1),$$

$$g_\nu = f_\nu + (-1)^{k+1-\nu} F_\nu^{k+1-\nu} \quad (\nu = k-p+2, \ldots, k),$$

on obtient l'équation (1.9). Alors, vu (2.21), la solution générale de l'équation (1.10) est

$$f_r(Q_1^p X, Q_1^q Y) = \sum_{\nu=1}^{q-1} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y) + \sum_{\nu=q}^{n-p} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X)$$

$$+ \sum_{\nu=n-p+1}^{p-1} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_1^{\nu+p} X) + \sum_{\nu=p}^{k-r} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{u-\nu} (Q_1^{\nu+p} X)$$

$$+ (-1)^{n-k+r-1} F_{k+1}^{n-k-1+r} (Q_1^{k+1-r+p} X) + S_2 + S_4 + S_6 + S_8 + S_{10}$$

$$(r = 1, \ldots, k-p+1),$$

$$= \sum_{\nu=1}^{q-1} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y) + \sum_{\nu=q}^{n-p} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X)$$

$$+ \sum_{\nu=n-p+1}^{k-r} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_1^{\nu+p} X) + (-1)^{k-r} F_r^{k+1-r} (Q_{k+2-r}^p X, Q_1^{k+1-r+p} X)$$

$$+ S_2 + S_4 + S_6 + S_8 + S_{10} \quad (r = k-p+2, \ldots, k+p-n),$$

$$= \sum_{\nu=1}^{q-1} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y) + \sum_{\nu=q}^{k-r} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X)$$

$$+ (-1)^{k-r} F_r^{k+1-r} (Q_{k+2-r}^p X) + S_2 + S_4 + S_6 + S_8 + S_{10}$$

$$(r = k+p+1-n, \ldots, k-q+1),$$

$$= \sum_{\nu=1}^{k-r} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y) + (-1)^{k-r+1} F_r^{k-r+1} (Q_{k-r+2}^p X, Q_{k-r+2}^q Y)$$

$$+ S_2 + S_4 + S_6 + S_8 + S_{10} \quad (r = k-q+2, \ldots, k),$$

où S_i sont définis comme dans (1.14).

De la dernière égalité on obtient

$$(1.22)\qquad f_r(Q_1^p X, Q_1^q Y) = \sum_{\nu=1}^{\min(q-1,\, k+1-r)} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y)$$

$$+ \sum_{\nu=q}^{\min(n-p,\, k+1-r)} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X) + \sum_{\nu=n-p+1}^{\min(p-1,\, k-r)} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_1^{p+\nu} X)$$

$$+ \sum_{\nu=p}^{k-r} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} (Q_1^{\nu+p} X) + S_2 + S_4 + S_6 + S_8 + S_{10} \quad (r = 1, 2, \ldots, k).$$

Donc, le théorème 5, dans le cas $p \leqslant k < n-q+1$, est démontré.

5° $n-q+1 \leqslant k < n$. Si l'on fait (1.11), a partir de (1.10) on trouve

$$(1.23)\quad f_{k+1}(Q_{k+1}^{p+k} X, Q_{k+1}^{q+k} Y) = \sum_{\nu=n-k}^{q-1} (-1)^{\nu+1} F_{k+1}^{\nu} (Q_{\nu+k+1}^{p+k} X, Q_{\nu+k+1}^{q+k} Y)$$

$$+ \sum_{\nu=q}^{n-p} (-1)^{\nu+1} F_{k+1}^{\nu} (Q_{\nu+k+1}^{p+k} X) + \sum_{\nu=n-p+1}^{p-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{\nu+k+p} X, Q_{\nu+k+1}^{k+p} X)$$

$$+ \sum_{\nu=p}^{n-q} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{\nu+p+k} X) + \sum_{\nu=n-q+1}^{n-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{\nu+p+k} X, Q_{k+1}^{\nu+q+k} Y).$$

En portant la fonction f_{k+1} déterminé à l'aide de (1.23) dans (1.10) et en utilisant la substitution (1.21), on obtient l'équation (1.9). Donc, la solution générale de l'équation (1.10), dans le cas considéré, est

$$f_r(Q_1^p X, Q_1^q Y) = \sum_{\nu=1}^{q-1} (-1)^{\nu+1} F_r^{\nu} (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y) + \sum_{\nu=q}^{n-p} (-1)^{\nu+1} F_r^{\nu} (Q_{\nu+1}^p X)$$

$$+ \sum_{\nu=n-p+1}^{p-1} (-1)^{\nu+1} F_r^{\nu} (Q_{\nu+1}^p X, Q_1^{\nu+p} X) + \sum_{\nu=p}^{n-q} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} (Q_1^{\nu+p} X)$$

$$+ \sum_{\nu=n-q+1}^{k-r} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} (Q_1^{\nu+p} X, Q_1^{\nu+q} Y) + S_2 + S_4 + S_6 + S_8 + S_{10}$$

$$+ (-1)^{n-k+r-1} F_{k+1}^{n-k+r-1} (Q_1^{k+1-r+p} X, Q_1^{k+1-r+q} Y) \quad (r = 1, \ldots, q+k-n),$$

$$= \sum_{\nu=1}^{q-1} (-1)^{\nu+1} F_r^{\nu} (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y) + \sum_{\nu=q}^{n-p} (-1)^{\nu+1} F_r^{\nu} (Q_{\nu+1}^p X)$$

$$+ \sum_{\nu=n-p+1}^{p-1} (-1)^{\nu+1} F_r^{\nu} (Q_{\nu+1}^p X, Q_1^{\nu+p} X) + \sum_{\nu=p}^{k-r} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} (Q_1^{\nu+p} X)$$

$$+ (-1)^{n-k+r-1} F_{k+1}^{n-k+r-1} (Q_1^{k-r+1+p} X) + S_2 + S_4 + S_6 + S_8 + S_{10}$$

$$(r = q+k-n+1, \ldots, k-p+1),$$

$$= \sum_{\nu=1}^{q-1} (-1)^{\nu+1} F_r^{\nu} (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y) + \sum_{\nu=q}^{n-p} (-1)^{\nu+1} F_r^{\nu} (Q_{\nu+1}^p X)$$

$$+ \sum_{\nu=n-p+1}^{k-r} (-1)^{\nu+1} F_r^{\nu} (Q_{\nu+1}^p X, Q_1^{\nu+p} X) + S_2 + S_4 + S_6 + S_8 + S_{10}$$

$$+ (-1)^{k-r} F_r^{k+1-r} (Q_{k+2-r}^p X, Q_1^{k+1-r+p} X) \quad (r = k-p+2, \ldots, p-n+k),$$

$$= \sum_{\nu=1}^{q-1} (-1)^{\nu+1} F_r^{\nu} (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y) + \sum_{\nu=q}^{k-r} (-1)^{\nu+1} F_r^{\nu} (Q_{\nu+1}^p X)$$

$$+ (-1)^{k-r} F_r^{k+1-r} (Q_{k+2-r}^p X) + S_2 + S_4 + S_6 + S_8 + S_{10}$$

$$(r = p-n+k+1, \ldots, k-q+1),$$

$$= \sum_{\nu=1}^{k-r} (-1)^{\nu+1} F_r^{\nu} (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y) + (-1)^{k-r} F_r^{k-r+1} (Q_{k+2-r}^p X, Q_{k+2-r}^q Y)$$

$$+ S_2 + S_4 + S_6 + S_8 + S_{10} \quad (r = k-q+2, \ldots, k).$$

S_i ont les mêmes valeurs comme dans (1.14).

De là on a

$$(1.24)\qquad f_r(Q_1^p X, Q_1^q Y) = \sum_{\nu=1}^{\min(q-1,\, k+1-r)} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_{\nu+1}^q Y)$$

$$+ \sum_{\nu=q}^{\min(k+1-r,\, n-p)} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X)$$

$$+ \sum_{\nu=n-p+1}^{\min(k+1-r,\, p-1)} (-1)^{\nu+1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X, Q_1^{\nu+p} X)$$

$$+ \sum_{\nu=p}^{\min(k+1-r,\, n-q)} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} (Q_1^{\nu+p} X)$$

$$+ \sum_{\nu=n-q+1}^{k-r} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} (Q_1^{\nu+p} X, Q_1^{\nu+q} Y) + S_2 + S_4 + S_6 + S_8 + S_{10}$$

$$(r = 1, \ldots, k),$$

Donc, le théorème 5 est aussi vrai dans le cas $n-q+1 \leqslant k < n$.

2. L'équation (0.2)

En posant $k=n$, dans (1.1), (1.2), (1.3) (1.4), (1.5), on obtient la solution générale de l'équation (0.2) dans les cas considérés.

Théorème 6. — *Dans le cas* $\frac{n+1}{2} \geqslant \max(p_1, p_2, \ldots, p_m)$, *la solution générale de l'équation* (0.2) *est*

$$(1.25)\qquad f_r(Q_1^{p_1} X_1, Q_1^{p_2} X_2, \ldots, Q_1^{p_m} X_m) = F_r(Q_1^{p_1-1} X_1, Q_1^{p_2-1} X_2, \ldots, Q_1^{p_m-1} X_m)$$

$$- F_{r+1}(Q_2^{p_1} X_1, Q_2^{p_2} X_2, \ldots, Q_2^{p_m} X_m),$$

avec $F_{n+1} \equiv F_1$, *où* F_i *sont des fonctions arbitraires à valeurs dans* M.

La démonstration du théorème 6 est complètement analogue à celle du théorème 2 dans l'article [4].

3. L'équation (0.1)

Hypothèse 1. — *L'équation* $mZ = A$ (*m nombre naturel* $\leqslant n$, A; $Z \in M$) *possède, par rapport à* Z *une solution unique.*

Théorème 7. — *Dans le cas* $m=2$, $q < 2q-1 \leqslant p = n$ *et sous l'hypothèse* 1, *la solution générale de l'équation* (0.1) *est*

$$f(Q_1^n X, Q_1^q Y) = F_0(Q_1^n X, Q_1^{q-1} Y) - F_0(Q_2^1 X, Q_2^q Y).$$

Théorème 8. — *Dans le cas* $m=2$, $q < p = n < 2q-1$ *et sous l'hypothèse* 1 *la solution générale de l'équation* (0.1), *est*

$$f(Q_1^n X, Q_1^q Y)=F_0(Q_1^n X, Q_1^{q-1} Y)-F_0(Q_2^1 X, Q_2^q Y)$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{2q-n}{2}\right]}\{F_\nu(Q_{n-q+\nu+1}^{\nu+1} X, Q_1^\nu Y, Q_{n-q+\nu+1}^q Y)-F_\nu(Q_1^n X, Q_{q-\nu+1}^q Y, Q_1^{2q-n-\nu} Y)\}.$$

Théorème 9. — *Dans le cas* $m=2$, $q<p<n<2q-1<2p-1$ *et sous l'hypothèse* 1 *la solution générale de l'équation* (0.1) *est*

$$f(Q_1^p X, Q_1^q Y)=F_0(Q_1^{p-1} X, Q_1^{q-1} Y)-F_0(Q_2^p X, Q_2^q Y)$$
$$+\sum_{\nu=1}^{p-q}\{F_\nu(Q_1^\nu X, Q_{n-p+\nu+1}^p X, Q_{n-p+\nu+1}^q Y)-F_\nu(Q_{p-\nu+1}^p X, Q_1^{2p-n-\nu} X, Q_1^{p+q-n-\nu} Y)\}$$
$$+\sum_{\nu=p-q+1}^{\left[\frac{2p-n}{2}\right]}\{F_\nu(Q_1^\nu X, Q_{n-p+\nu+1}^p X, Q_1^{\nu+q-p} Y, Q_{n-p+\nu+1}^q Y)$$
$$-F_\nu(Q_{p-\nu+1}^p X, Q_1^{2p-n-\nu} X, Q_{p-\nu+1}^q Y, Q_1^{p+q-n-\nu} Y)\}.$$

Théorème 10. — *Dans le cas* $m=2$, $q<p<2q-1<n<p+q-1<2p-1$ *et sous l'hypothèse* 1 *la solution générale de l'équation* (0.1) *est*

$$f(Q_1^p X, Q_1^q Y)=F_0(Q_1^{p-1} X, Q_1^{q-1} Y)-F_0(Q_2^p X, Q_2^q Y)$$
$$+\sum_{\nu=1}^{p+q-n-1}\{F_\nu(Q_1^\nu X, Q_{n-p+\nu+1}^p X, Q_{n-p+\nu+1}^q Y)$$
$$-F_\nu(Q_{p-\nu+1}^p X, Q_1^{2p-n-\nu} X, Q_1^{p+q-n-\nu} Y)\}$$
$$+\sum_{\nu=p+q-n}^{\left[\frac{2p-n}{2}\right]}\{F_\nu(Q_1^\nu X, Q_{n-p+\nu+1}^p X)-F_\nu(Q_{p-\nu+1}^p X, Q_1^{2p-n-\nu} X)\}.$$

Théorème 11. — *Dans le cas* $m=2$, $q<p<p+q-1<n<2p-1$ *et sous l'hypothèse* 1 *la solution générale de l'équation* (0.1) *est*

$$f(Q_1^p X, Q_1^q Y)=F_0(Q_1^{p-1} X, Q_1^{q-1} Y)-F_0(Q_2^p X, Q_2^q Y)$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{2p-n}{2}\right]}\{F_\nu(Q_1^\nu X, Q_{n-p+\nu+1}^p X)-F_\nu(Q_{p-\nu+1}^p X, Q_1^{2p-n-\nu} X)\}.$$

Les fonctions F_k *intervenant dans les théorèmes* 7, 8, 9, 10, 11 *prennent des valeurs dans l'ensemble* M.

Démonstration des théorèmes 7, 8, 9, 10, 11. Posons $k=n$ dans (1.1). Par addition membre à membre les formules définissant les fonctions f_r ($r=1, 2, \ldots, n$), en utilisant le fait que $f_1=f_2=\cdots=f_n=f$, vu l'hypothèse 1, on obtient le théorème 7. De la même façon, on obtient les théorèmes 8, 9, 10, 11.

Dans le théorème 11, par exemple, les nouvelles fonctions F_i sont déterminées par les égalités suivantes:

$$F_0(Q_1^{p-1}X, Q_1^{q-1}Y) = \frac{1}{n}\left\{\sum_{r=1}^{q-1}\sum_{\nu=1}^{r} G_r(Q_\nu^{p-r+\nu-1}X, Q_\nu^{q-r+\nu-1}Y) + \sum_{r=q}^{n-p}\sum_{\nu=1}^{r} G_r(Q_\nu^{p-r+\nu-1}X)\right\}$$

avec

$$G_r(Q_1^{p-r}X, Q_1^{q-r}Y) = \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^r F_\nu^r(Q_1^{p-r}X, Q_1^{q-r}Y) \quad (r=1, 2, \ldots, q-1),$$

$$G_r(Q_1^{p-r}X) = \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^r F_\nu^r(Q_1^{p-r}X) \quad (r=q,\ q+1, \ldots, n-p),$$

$$F_k(Q_1^k X, Q_{n-p+k+1}^p X) = \frac{(-1)^{k+1}}{n}\left\{\sum_{r=1}^{n-p+k} F_r^{p-k}(Q_1^k X, Q_{n-p+k+1}^p X) - \sum_{r=1}^{p-k} F_r^{n-p+k}(Q_{n-p+k+1}^p X, Q_1^k X)\right\} \quad \left(k=1, 2, \ldots, \left[\frac{2p-n-1}{2}\right]\right),$$

$$F_{p-m}(Q_1^{p-m}X, Q_{m+1}^p X) = \frac{(-1)^{p-m+1}}{n}\sum_{r=1}^{m} F_r^m(Q_1^{p-m}X, Q_{m+1}^p X) \text{ (dans le cas } n=2m).$$

Théorème 12. — *La solution générale de l'équation* (0.1) *dans le cas* $\frac{n+1}{2} \geqslant \max(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ *est*

$$f(Q_1^{q_1}X_1, Q_1^{p_2}X_2, \ldots, Q_1^{pm}X_m) = F(Q_1^{p_1-1}X_1, Q_1^{p_2-1}X_2, \ldots, Q_1^{pm-1}X_m) - F(Q_2^{p_1}X_1, Q_2^{p_2}X_2, \ldots, Q_2^{pm}X_m) + A$$

où F est une fonction arbitraire et A une constante arbitraire $\in M$ telle que $nA=0$.

La démonstration du théorème 12 est analogue à celle du théorème 1, donné dans l'article [4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. S. Mitrinović: *Équations fonctionnelles linéaires paracycliques de première espèce*, Publications de l'Institut mathématique, Belgrade, 3 (17) (1963), p. 115—128.

[2] D. S. Mitrinović: *Sur les équations fonctionnelles linéaires paracycliques de seconde espèce*, Glasnik matematičko-fizički i astronomski, serija II, t. 18 (1963), p. 177—181.

[3] P. M. Vasić et R. Ž. Đorđević: *Sur l'équation fonctionnelle cyclique généralisée*, Ces Publications, № 137.

[4] D. Ž. Djoković: *Generalisation of a result of Aczél, Ghermanescu and Hosszú*, Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences, vol. IX, series A. fasc. 1—2, 1964, p. 51—59.