PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 136 (1965)

SUR L'ÉQUATION FONCTIONNELLE CYCLIQUE GÉNÉRALISÉE*

P. M. Vasić et *R. Ž. Đorđević*

1. Préliminaires

Dans cet article nous allons utiliser les notations suivantes:

S, un ensemble non vide arbitraire,

M, un groupe additif abélien quelconque,

$$X=(x_1, x_2 \ldots , x_n) \quad (x_i \in S; \quad i=1, 2, \ldots , n),$$

$$Q_i^j X = Q_i^j (x_1, x_2, \ldots , x_n)=(x_i, x_{i+1}, \ldots , x_j) \quad (i \leqslant j \leqslant n)$$
$$=(x_i, x_{i+1}, \ldots , x_n, x_1, \ldots , x_j) \quad (n \geqslant i > j),$$

C_n l'opérateur cyclique quel est déterminé par l'égalité

$$C_n Q_i^j X = Q_{i+1}^{j+1} X \quad (Q_i^{n+j} X = Q_j^i X).$$

L'équation fonctionnelle cyclique

$$\sum_{i=1}^{n} f(C_n^{i-1} Q_1^p X)=0 \quad (Q_i^{n+j} X = Q_i^j X), \tag{1.1}$$

a été résolue (*voir:* [1] et [2]) sous les conditions suivantes: 1° $x_i \in S$ ($i=1, 2, \ldots , n$); 2° La fonction inconnue $f: S^p \to M$; 3° Dans le groupe M l'équation $mY=A$, où $m (\leqslant n)$ est un nombre naturel et $Y, A \in M$, possède une solution unique par rapport à Y. Dans le cas où $n \geqslant 2p-1$, D. Djoković a trouvé la solution générale de l'équation (1.1) sous les conditions 1° et 2° (*voir:* [3]).

L'équation fonctionnelle plus générale

$$\sum_{i=1}^{n} f_i (C_n^{i-1} Q_1^p X)=0 \quad (Q_i^{n+j} X = Q_i^j X) \tag{1.2}$$

où les fonctions $f_i: S^p \to M$ sont inconnues a été résolue dans le cas $n=p$ et $n \geqslant 2p-1$ (*voir:* [3]).

Dans l'article [4] D. S. Mitrinović a déterminé la solution générale de quelques cas particuliers de l'équation fonctionnelle (1.2) dans le cas où $p < n < 2p-1$.

---

* Présenté le 20 décembre 1964 par D. S. Mitrinović.

Dans cet article nous allons trouver, d'abord, la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$\sum_{i=1}^{k} f_i \left(C_n^{i-1} Q_1^p X\right) = 0 \quad (p < n < 2p-1;\ k \leqslant n). \tag{1.3}$$

Puis, en partant de l'équation (1.3), nous allons déterminer la solution générale de l'équation (1.2). Enfin, si l'on a $f_1 = f_2 = \cdots = f_n = f$, nous allons démontrer qu'on peut obtenir la solution générale de l'équation (1.1) en partant de la solution générale de l'équation fonctionnelle (1. 2).

2. L'équation fonctionnelle (1.3)

Théorème 1. — *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (1.3) *est donnée par*

$$\begin{aligned} f_r\left(Q_1^p X\right) = & \sum_{\nu=1}^{\min(k-r,\, n-p)} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu \left(Q_{\nu+1}^p X\right) \\ & + \sum_{\nu=n-r+1}^{n-p} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu \left(Q_{\nu+1}^p X\right) \\ & + \sum_{\nu=n-p+1}^{\min(k-r,\, p-1)} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu \left(Q_{\nu+1}^p X,\ Q_1^{p+\nu} X\right) \\ & + \sum_{\nu=\max(n-r+1,\, n-p+1)}^{p-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} \left(Q_1^{p+\nu} X,\ Q_{\nu+1}^p X\right) \\ & + \sum_{\nu=p}^{k-r} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} \left(Q_1^{p+\nu} X\right) \\ & + \sum_{\nu=\max(n-r+1,\, p)}^{n-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+r}^{n-\nu} \left(Q_1^{p+\nu} X\right) \quad (r = 1, \ldots, k(\leqslant n)), \end{aligned} \tag{2.1}$$

où $\sum_a^b \overset{\text{def}}{=\!=} 0\ (a > b)$; $Q_{m+n}^\nu = Q_n^\nu$, $Q_\nu^{m+n} = Q_\nu^m$, $F_{m+n}^\nu = F_m^\nu$ (*m nombre naturel*) F_i^j *sont des fonctions arbitraires à valeurs appartiennent à* M.

Démonstration. — Nous procédons par induction. Pour $k = 2$ l'équation (1.3) devient

$$f_1\left(Q_1^p X\right) + f_2\left(Q_2^{p+1} X\right) = 0. \tag{2.2}$$

Si l'on fait $x_1 = x_1^0$ (dans ce qui suit x_i^0 $(i = 1, 2, \ldots)$ sont des constantes arbitraires $\in S$), à partir de (2.2) on obtient

$$f_2\left(Q_2^{p+1} X\right) = -F_1^1\left(Q_2^p X\right), \tag{2.3}$$

avec

$$F_1^1\left(Q_2^p X\right) \overset{\text{def}}{=\!=} f_1\left(x_1^0,\ Q_2^p X\right).$$

Si dans (2.2) on porte f_2, doneé à l'aide de (2.3), on obtient

$$f_1\left(Q_1^p X\right) = F_1^1\left(Q_2^p X\right). \tag{2.4}$$

Pour $k=2$, $r=1$ étant donné que

$$\min(1,\, n-p)=1, \quad \min(1,\, p-1)=1, \quad \max(n,\, n-p+1)=n, \quad \max(n,\, p)=n,$$

de (2.1) on obtient (2.4). Pour $k=2$, $r=2$ à partir de (2.1) on obtient (2.3). Donc, le théorème 1 est vraie pour $k=2$.

Supposons que le théorème 1 soit vraie pour k, c'est-à-dire que la solution générale de l'équation fonctionnelle

$$\sum_{i=1}^{k} g_i\,(C_n^{i-1}\, Q_1^p X)=0 \quad (k<n) \tag{2.5}$$

soit donée par (2.1), où il faut remplacer f_r par g_r.

Considérons maitenant l'équation fonctionnelle suivante

$$\sum_{i=1}^{k+1} f_i\,(C_n^{i-1}\, Q_1^p X)=0 \quad (k+1\leqslant n). \tag{2.6}$$

Il faut distinguer les trois cas suivants:

1° $2\leqslant k<n-p+1$; 2° $n-p+1\leqslant k<p$; $p\leqslant k\leqslant n-1$.

1° $2\leqslant k<n-p+1$. Si l'on pose $x_i=x_i^0$ $(x_i\in[X]\diagdown[Q_{k+1}^{p+k}X])$, où, l'on a par exemple, $[X]=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, l'équation (2.6) prend la forme que voici:

$$f_{k+1}\,(Q_{k+1}^{p+k}X)=\sum_{\nu=n-k}^{n-1}(-1)^{n-\nu}\,F_{\nu+k+1}^{n-\nu}\,(Q_{k+1}^{\nu+p+k}X), \tag{2.7}$$

où

$$(-1)^{n-\nu+1}\,F_{\nu+k+1}^{n-\nu}\,(Q_{k+1}^{\nu+p+k}X)\overset{\text{def}}{=\!=}f_{\nu+k+1-n}\,(Q_{\nu+k+1-n}^{\nu+k+p-n}X)\Big|_{x_i=x_i^0\,(x_i\in[X]\diagdown[Q_{k+1}^{p+k}X])}.$$

De (2.7) il vient

$$f_{k+1}\,(Q_1^p X)=\sum_{\nu=n-k}^{n-1}(-1)^{n-\nu}\,F_{\nu+k+1}^{n-\nu}\,(Q_1^{\nu+p}X). \tag{2.8}$$

En introduisant les nouvelles notations suivantes

$$g_{\nu+k+1-n}\,(Q_{k+1}^{\nu+p+k}X)=f_{\nu+k+1-n}\,(Q_{k+1}^{\nu+p+k}X)+(-1)^{n-\nu}\,F_{\nu+k+1}^{n-\nu}\,(Q_{k+1}^{\nu+p+k}X) \tag{2.9}$$
$$(\nu=n-k,\ \dots,\ n-1)$$

et en portant l'expression (2.7) dans (2.6), on obtient l'équation (2.5). Dans le cas où $2\leqslant k\leqslant n-p$, on a $\min(k-r,\ n-p)=\min(k-r,\ p-1)=k-r$, $n-p+1>k-r$; donc, d'après (2.1) la solution générale de l'équation (2.5) est

$$g_r\,(Q_1^p X)=\sum_{\nu=1}^{k-r}(-1)^{\nu-1}\,F_r^\nu\,(Q_{\nu+1}^p X)+S_2+S_4+S_6 \quad (r=1, 2, \dots, k), \tag{2.10}$$

où S_2, S_4, S_6 désignent première, deuxième et troisième somme dans l'expression (2.1). D'après (2.8), (2.9) et (2.10) on a

$$f_r\,(Q_1^p X)=\sum_{\nu=1}^{k+1-r}(-1)^{\nu-1}\,F_r^\nu\,(Q_{\nu+1}^p X)+S_2+S_4+S_6\,(r=1, 2, \dots, k+1). \tag{2.11}$$

Donc, si l'on a $2 \leqslant k < n-p+1$, le théorème 1 est aussi vrai pour $k+1$.

2° $n-p+1 \leqslant k < p$. En faisant $x_i = x_i^0$ $(x_i \in [X] \setminus [Q_{\nu+k+1}^{p+k} X])$, l'équation (2.6) devient

$$(2.12) \qquad f_{k+1}(Q_{k+1}^{p+k} X) = \sum_{\nu=n-k}^{p-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{p+k+\nu} X,\ Q_{\nu+k+1}^{p+k} X)$$

$$+ \sum_{\nu=p}^{n-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{p+k+\nu} X)$$

avec

$$f_{\nu+k+1-n}(Q_{\nu+k+1-n}^{\nu+k+p-n} X)\Big|_{x_i = x_i^0 (x_i \in [X] \setminus [Q_{k+1}^{p+k} X])}$$

$$= (-1)^{n-\nu+1} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{p+k+\nu} X,\ Q_{\nu+k+1}^{p+k} X) \qquad (\nu = n-k,\ n-k+1, \ldots, p-1),$$

$$= (-1)^{n-\nu+1} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{p+k+\nu} X) \qquad (\nu = p,\ p+1, \ldots, n-1).$$

En introduisant les nouvelles fonctions par

$$(2.13) \qquad g_{\nu+k+1-n} = f_{\nu+k+1-n} + (-1)^{n-\nu-1} F_{\nu+k+1}^{n-\nu},$$

et en remplaçant (2.12) dans (2.6), on obtient l'équation (2.5). Donc, d'après l'hypothèse inductive et (2.13), la solution générale de l'équation (2.6) est

$$(2.14) \quad f_r(Q_1^r X) = \sum_{\nu=1}^{n-p} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X) + \sum_{\nu=n-p+1}^{k-r} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X,\ Q_1^{p+\nu} X)$$

$$+ (-1)^{k-r} F_r^{k+1-r} (Q_{k+2-r}^p X,\ Q_1^{p+k-r+1} X) + S_2 + S_4 + S_6 \quad (r = 1, \ldots, p+k-n),$$

$$= \sum_{\nu=1}^{k-r} (-1)^{\nu-1} F_r^\nu (Q_{\nu+1}^p X)$$

$$+ (-1)^{k-r} F_r^{k+1-r} (Q_{k+2-r}^p X) + S_2 + S_4 + S_6 \quad (r = p+k-n+1, \ldots, k)$$

où S_2, S_4, S_6 sont définies comme dans (2.11).

D'après (2.12) et (2.14) la solution générale de l'équation (2.6) est donnée par (2.1), où il faut remplacer k par $k+1$. Donc, si l'on a $n-p+1 \leqslant k < p$, le théorème 1 est également vrai pour $k+1$.

3° $p \leqslant k < n-1$. Pour $x_i = x_i^0$ $(x_i \in [X] \setminus [Q_{k+1}^{p+k} X])$, l'équation (2.6) reçoit la forme suivante

$$(2.15) \quad f_{k+1}(Q_{k+1}^{p+k} X) = \sum_{\nu=n-k}^{n-p} (-1)^{\nu-1} F_{k+1}^\nu (Q_{\nu+1}^p X)$$

$$+ \sum_{\nu=n-p+1}^{p-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{p+k+\nu} X,\ Q_{\nu+k+1}^{p+k} X) + \sum_{\nu=p}^{n-1} (-1)^{n-\nu} F_{\nu+k+1}^{n-\nu} (Q_{k+1}^{p+k+\nu} X)$$

où

$$f_{\nu+k+1-n}(Q_{\nu+k+1-n}^{\nu+k+p-n} X)\Big|_{x_i = x_i^0 (x_i \in [X] \setminus [Q_{k+1}^{p+k} X])}$$

$$= (-1)^\nu F_{k+1}^\nu (Q_{\nu+1}^p X) \qquad (\nu = n-k,\ n-k+1, \ldots, n-p),$$

$$=(-1)^{n-\nu+1}F^{n-\nu}_{\nu+k+1}(Q^{p+k+\nu}_{k+1}X,\ Q^{p+k}_{\nu+k+1}X)\quad(\nu=n-p+1,\ n-p+2,\dots,p-1),$$
$$=(-1)^{n-\nu+1}F^{n-\nu}_{\nu+k+1}(Q^{p+k+\nu}_{k+1}X)\quad(\nu=p,\ p+1,\dots,n-1).$$

Introduisons maintenant les nouvelles notations suivantes

$$g_{\nu+k+1-n}=f_{\nu+k+1-n}+(-1)^{n-\nu-1}F^{n-\nu}_{\nu+k+1}. \tag{2.16}$$

Si dans (2.6) on porte la fonction f_{k+1} déterminée à l'aide de (2.15), on obtient l'équation (2.5). En utilisant (2.16) et la solution générale de l'équation fonctionnelle (2.5), on trouve que la solution générale de l'équation (2.6) est

$$\begin{aligned}(2.17)\quad f_r(Q^p_1X)&=\sum_{\nu=1}^{n-p}(-1)^{\nu-1}F^\nu_r(Q^p_{\nu+1}X)+\sum_{\nu=n-p+1}^{p-1}(-1)^{\nu-1}F^\nu_r(Q^p_{\nu+1}X,Q^{p+\nu}_1X)\\&+\sum_{\nu=p}^{k-r}(-1)^{n-\nu}F^{n-\nu}_{\nu+r}(Q^{p+\nu}_1X)+(-1)^{n-k+1-r}F^{n-k+1-r}_k(Q^{p+k-r}_1X)\\&\qquad+S_2+S_4+S_6\ (r=1,\dots,n-k-p+1)\\&=\sum_{\nu=1}^{n-p}(-1)^{\nu-1}F^\nu_r(Q^p_{\nu+1}X)+\sum_{\nu=n-p+1}^{k-r}(-1)^{\nu-1}F^\nu_r(Q^p_{\nu+1}X,\ Q^{p+\nu}_1X)\\&+(-1)^{k-r}F^{k+1-r}_r(Q^p_{k-r+2}X,Q^{p+k-r+1}_1X)+S_2+S_4+S_6\ (r=k-p+2,\dots,p-1)\\&=\sum_{\nu=1}^{k-r}(-1)^{\nu-1}F^\nu_r(Q^p_{\nu+1}X)+(-1)^{k-r}F^{k+1-r}_r(Q^p_{\nu+1}X)\\&+S_2+S_4+S_6\quad(r=p,\ p+1,\dots,k),\end{aligned}$$

où S_2, S_4, S_6 sont définies comme dans (2.11).

Compte tenu de (2.15) et (2.17), on obtient que la solution générale de l'équation (2.6) est donnée par (2.1), où il faut remplacer k par $k+1$.

Le théorème 1 est ainsi prouvé.

3. L'équation fonctionnelle (1.2)

Pour $k=n$, à partir du théorème 1, il vient

Théorème 2. — *La solution générale de l'équation fonctionnelle* (1.2) *est déterminée par*

$$\begin{aligned}(3.1)\qquad f_r(Q^p_1X)&=\sum_{\nu=1}^{n-p}(-1)^{\nu-1}F^\nu_r(Q^p_{\nu+1}X)\\&+\sum_{\nu=n-p+1}^{\min(n-r,\ p-1)}(-1)^{\nu-1}F^\nu_r(Q^p_{\nu+1}X,\ Q^{p+\nu}_1X)\\&+\sum_{\nu=\max(n-r+1,\ n-p+1)}^{p-1}(-1)^{n-\nu}F^{n-\nu}_{\nu+r}(Q^{p+\nu}_1X,\ Q^p_{\nu+1}X)\\&+\sum_{\nu=p}^{n-1}(-1)^{n-\nu}F^{n-\nu}_{\nu+r}(Q^{p+\nu}_1X)\end{aligned}$$

où les fonctions $F^j_i:S^{p-1}\to M$ sont arbitraires.

4. L'équation fonctionnelle (1.1)

Dans ce qui précède nous avons déterminé les solutions générales des équations (1.3) et (1.2) sous les hypothèses suivantes: 1° $x_i \in S$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ et 2° $f_i : S^p \to M$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Si l'on introduit l'hypothése que l'équation $mY=A$, où $m\,(\leqslant n)$ est un nombre naturel et $Y, A \in M$, posède une solution unique par rapport à Y, on peut obtenir la solution générale de l'équation (1.1) en partant de la solution générale de l'équation (1.2).

En effet, en addionnant les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$, données par (3.1) et ayant en vue que $f_1=f_2=\cdots=f_n=f$, on trouve

$$(4.1)\quad f(Q_1^p X) = F_0(Q_1^{p-1} X) - F_0(Q_2^p X) + \sum_{k=1}^{[(2p-n)/2]} \{F_k(Q_1^k X,\ Q_{n-p+k+1}^p X) - F_k(Q_{p-k+1}^p X,\ Q_1^{2p-n-k} X)\}$$

où nous avons employé les notations

$$F_0(Q_1^{p-1} X) = \frac{1}{n}\left\{\sum_{r=1}^{n-p} \sum_{\nu=1}^{r} G_r(Q_\nu^{p-r-1+\nu} X)\right\} \text{ avec } G_r(Q_1^{p-r} X) = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^r F_\nu^r (Q_1^{p-r} X)$$

$$F_k(Q_1^k X,\ Q_{n-p+k+1}^p X) = \frac{(-1)^{k+1}}{n}\left\{\sum_{r=1}^{n-p+k} F_r^{p-k}(Q_1^k X,\ Q_{n-p+k+1}^p X) - \sum_{r=1}^{p-k} F_r^{n-p+k}(Q_{n-p+k+1}^p X,\ Q_1^k X)\right\} \quad \left(k=1, 2, \ldots, \left[\frac{2p-n-1}{2}\right]\right),$$

et, dans le cas où n est pair $(n=2m)$

$$F_{p-m}(Q_1^{p-m} X,\ Q_{m+1}^p X) = \frac{(-1)^{p-m+1}}{n} \sum_{r=1}^{m} F_r^m (Q_1^{p-m} X,\ Q_{m+1}^p X).$$

La solution générale (4.1) s'accorde avec la solution générale de l'équation (1.1) (*voir:* [1] et [2]).

RÉFÉRENCES

[1] J. Aczél, M. Ghermănescu, M. Hosszú: *On cyclic equations.* Publications of the Institute of the Hungarian Academy of Scienc s, vol. 5, series A, 1960, p. 215—221.

[2] M. Hosszú: *A lineáris függvényegyenletek egy osztályárol.* A Magyar Tudományos Akadémia matematikai és fizikai tudományok osztályának Közleményei, t. 11, 1961, p. 249—261.

[3] D. Djoković: *Sur certaines classes des équations fonltionnelles cycliques.* Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université de Belgrade, série: Mathématiqu-s et physiqu-, № 114, 1963.

[4] D. S. Mitrinović: *Équation fonctionnelle cyclique généralisée.* Publications de l'Institut m thématique de Belgrade, t. 4 (18), 1964, p. 29—41.