PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA – SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 135 (1965)

# ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ МОДУЛЕЙ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ*

*Т. Т. Тонков*

В работе [1] мы доказали элементарным образом, что если $z$ корень полинома $f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$, то

$$\sqrt[n]{|a_n|}-\sqrt[n-1]{|a_{n-1}|}-\cdots-\sqrt{|a_2|}-|a_1|\leqslant|z|\leqslant\sqrt[n]{|a_n|}+\sqrt[n-1]{|a_{n-1}|}+\cdots+\sqrt{|a_2|}+|a_1|.$$

Используя еще несколько других элементарных теорем, мы докажем здесь более сильные неравенства.

Пусть $f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$ полином с произвольными комплексными коэффициентами. Введем обозначение

$$g(z)=\frac{f(z)-a_n}{z}=z^{n-1}+a_1z^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=(z-b_1)(z-b_2)\cdots(z-b_{n-1});$$
$$B=\max|b_i|\qquad(i=1,2,\ldots,n-1).$$

Тогда, если $f(z)=0$, то

$$|z|\,|z-b_1|\,|z-b_2|\cdots|z-b_{n-1}|=|a_n|. \tag{1}$$

**1.** Если $|z|>B$ то $|z|\geqslant|z|-|b_i|\geqslant|z|-B>0$ и из (1) получаем

$$|z|(|z|-B)^{n-1}\leqslant|z|(|z|-|b_1|)(|z|-|b_2|)\cdots(|z|-|b_{n-1}|)$$
$$\leqslant|z|\,|z-b_1|\,|z-b_2|\cdots|z-b_{n-1}|=|a_n|.$$

Применяя теорему о неравенстве между средним геометрическим и средним гармоническим, получаем далее

$$\frac{n}{\frac{1}{|z|}+\frac{n-1}{|z|-B}}\leqslant\sqrt[n]{|a_n|}\quad\text{или}\quad n|z|^2-n(B+\sqrt[n]{|a_n|})|z|+B\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant0.$$

Отсюда следует, что $|z|\leqslant|z|_1$, где $|z|_1$ больший корень уравнения

$$n|z|^2-n(B+\sqrt[n]{|a_n|})|z|+B\sqrt[n]{|a_n|}=0.$$

(Это уравнение имеет только действительные положительные корни.)

---

* Представлено 20 декабря 1964 проф. Д. С. Митриновићем и доц. С. Прешићем.

Мы имеем

$$|z| \leqslant |z|_1 = \frac{B + \sqrt[n]{|a_n|} + \sqrt{(B + \sqrt[n]{|a_n|})^2 - \frac{4}{n} B \sqrt[n]{|a_n|}}}{2}.$$

**2.** Если $|z| \leqslant B$, то, как легко доказать, при $n \geqslant 1$ верно неравенство:

$$B \leqslant \frac{B + \sqrt[n]{|a_n|} + \sqrt{(B + \sqrt[n]{|a_n|})^2 - \frac{4}{n} B \sqrt[n]{|a_n|}}}{2}.$$

Поэтому всегда, когда $f(z) = 0$,

$$|z| \leqslant \frac{B + \sqrt[n]{|a_n|} + \sqrt{(B + \sqrt[n]{|a_n|})^2 - \frac{4}{n} B \sqrt[n]{|a_n|}}}{2}, \tag{2}$$

откуда по индукции следует, что вообще:

$$B_k \leqslant \frac{B_{k+1} + \sqrt[n-k]{|a_{n-k}|} + \sqrt{(B_{k+1} + \sqrt[n-k]{|a_{n-k}|})^2 - \frac{4}{n-k} B_{k+1} \sqrt[n-k]{|a_{n-k}|}}}{2} \tag{3}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n-2),$$

где $B_k$ наибольший модуль корней полинома

$$g_k(z) = z^{n-k} + a_1 z^{n-k-1} + \cdots + a_{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$g_0(z) = f(z),\ B_0 = |z|,\ B_1 = B.$$

Неравенства (3) дают нам возможность вычислять верхнюю границу модулей корней численных полиномов. Для этой цели, более конкретно, используем последовательно неравенства:

$$B_{n-1} = |a_1|,$$

$$B_{n-2} \leqslant \frac{B_{n-1} + \sqrt{|a_2|} + \sqrt{(B_{n-1} + \sqrt{|a_2|})^2 - \frac{4}{2} B_{n-1} \sqrt{|a_2|}}}{2},$$

$$\vdots$$

$$B_1 = B \leqslant \frac{B_2 + \sqrt[n-1]{|a_{n-1}|} + \sqrt{(B_2 + \sqrt[n-1]{|a_{n-1}|})^2 - \frac{4}{n-1} B_2 \sqrt[n-1]{|a_{n-1}|}}}{2},$$

$$B_0 = |z| \leqslant \frac{B + \sqrt[n]{|a_n|} + \sqrt{(B + \sqrt[n]{|a_n|})^2 - \frac{4}{n} B \sqrt[n]{|a_n|}}}{2}.$$

Заметим, что из (2) и (3) следуют неравенства

$$|z| \leqslant B + \sqrt[n]{|a_n|},\quad B_k \leqslant B_{k+1} + \sqrt[n-k]{|a_{n-k}|} \tag{4}$$

при помощи которых в [1] мы доказали известное неравенство

$$|z| \leqslant \sqrt[n]{|a_n|} + \cdots + \sqrt{|a_2|} + |a_1|.$$

Из (1) следует еще, что

$$|z|(|z|+B)^{n-1} \geqslant |z|(|z|+|b_1|)(|z|+|b_2|)\cdots(|z|+|b_{n-1}|)$$
$$\geqslant |z||z-b_1||z-b_2|\cdots|z-b_{n-1}| = |a_n|.$$

Применяя теорему о неравенстве между средним геометрическим и средним арифметическим, получаем

$$\frac{n|z|+(n-1)B}{n} \geqslant \sqrt[n]{|a_n|}$$

или

$$|z| \geqslant \sqrt[n]{|a_n|} - \frac{n-1}{n} B. \tag{5}$$

Рекуррентным путем из (5), снова при помощи (3) можно получить нижнюю оценку модулей корней.

Из (5), при помощи (4), мы получаем непосредственную оценку:

$$|z| \geqslant \sqrt[n]{|a_n|} - \frac{n-1}{n}\left(\sqrt[n-1]{|a_{n-1}|} + \cdots + \sqrt{|a_2|} + |a_1|\right).$$

Итак, нами доказана следующая

Теорема: *Если $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ — комплексный полином и если $f(z) = 0$, то*

$$\sqrt[n]{|a_n|} - \frac{n-1}{n} B \leqslant |z| \leqslant \frac{B + \sqrt[n]{|a_n|} + \sqrt{\left(B + \sqrt[n]{|a_n|}\right)^2 - \frac{4}{n} B \sqrt[n]{|a_n|}}}{2}$$

*где $B$ наибольший по модулю корень полинома* $g(z) = \dfrac{f(z) - a_n}{z}$.

*Следствие:*

$$\sqrt[n]{|a_n|} - \frac{n-1}{n}\left(\sqrt[n-1]{|a_{n-1}|} + \cdots + |a_1|\right) \leqslant |z| \leqslant \sqrt[n]{|a_n|} + \sqrt[n-1]{|a_{n-1}|} + \cdots + |a_1|.$$

Замечание: оценки для $|z|$ часто можно улучшить используя то, что $1/z$ есть корень полинома $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + 1$.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Т. Т. Тонков: *Об одной оценке модулей корней полиномов*, Журнал вычислительной математики и математической физики, том 4. № 4, 1964, стр. 748—749.