PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 134 (1965)

SUR UNE CLASSE DES INTÉGRALES DÉFINIES*

Radomir P. Lučić

L'objet de cette Note est l'intégrale définie

$$(1)\qquad J_s^n(a_1, \ldots, a_n) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin a_1 x \sin a_2 x \cdots \sin a_n x}{x^s}\, dx,$$

en désignant par n un nombre naturel, par s un nombre réel tel que $n-1<s<n+1$, par $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels différents du zéro.

1. Nous allons prouver la formule suivante:

$$(2)\qquad J_s^n(a_1, \ldots, a_n) = A_s^n \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \sum_\nu \Phi_s^n(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_n)$$

avec

$$A_s^n = \frac{\pi}{2^{n+1}\,\Gamma(s)\sin(s-n+1)\frac{\pi}{2}}, \qquad \Phi_s^n(x) = |x|^{s-1}(\operatorname{sgn} x)^n.$$

L'expression

$$\sum_\nu \Phi_s^n(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_n)$$

désigne la somme de toutes les expressions $\Phi_s^n(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_n)$ dans lesquelles le signe — apparaît ν fois.

Démonstration. Dans le livre [1] on trouve la formule suivante

$$(3)\qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x^s}\, dx = \frac{\pi a^{s-1}}{2\,\Gamma(s)\sin\frac{s\pi}{2}} \qquad (a>0;\ 0<s<2).$$

Pour $n=1$, la formule (2) se ramène à (3). Supposons que la formule (2) soit vraie pour $n-1$.

---

* Présenté le 20 décembre 1964 par D. S. Mitrinović.

Étant donné que l'intégrale (1) est convergente, en employant l'intégration par parties, en partir de (1) on obtient

$$J_s^n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{1}{2(s-1)} \sum_{k=1}^{n} a_k I_k, \tag{4}$$

avec

$$\begin{aligned} I_k = {} & J_{s-1}^{n-1}(a_1, \ldots, a_{k-2}, a_{k-1}+a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n) \\ & + J_{s-1}^{n-1}(a_1, \ldots, a_{k-2}, a_{k-1}-a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n), \end{aligned} \tag{5}$$

(dans le cas où $k=1$ il faut prendre $a_0 = a_n$).

En évaluant les expressions (5), d'après l'hypothèse inductive, on a

$$\begin{aligned} I_k = {} & A_{s-1}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \sum_\nu \Phi_{s-1}^{n-1}(\pm a_1 \pm \cdots \pm (a_{k-1}+a_k) \pm a_{k+1} \pm \cdots \pm a_n) \\ & + A_{s-1}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \sum_\nu \Phi_{s-1}^{n-1}(\pm a_1 \pm \cdots \pm (a_{k-1}-a_k) \pm a_{k+1} \pm \cdots \pm a_n). \end{aligned} \tag{6}$$

Si l'on a le signe $+$ devant $(a_{k-1}+a_k)$ dans l'expression

$$(-1)^\nu \Phi_{s-1}^{n-1}(\pm a_1 \pm \cdots \pm (a_{k-1}+a_k) \pm a_{k+1} \pm \cdots \pm a_n) \tag{7}$$

qui figure au premier membre de (6), on obtient un terme de la somme

$$(-1)^\nu \sum_\nu \Phi_{s-1}^{n-1}(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_{k-1} + a_k \pm a_{k+1} \pm \cdots \pm a_n).$$

Si l'on a le signe $-$ devant $(a_{k-1}+a_k)$ dans l'expression (7), on obtient un terme de la somme

$$-(-1)^\nu \sum_\nu \Phi_{s-1}^{n-1}(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_{k-1} - a_k \pm a_{k+1} \pm \cdots \pm a_n).$$

Les mêmes conclusions sont valables pour l'expression

$$(-1)^\nu \Phi_{s-1}^{n-1}(\pm a_1 \pm \cdots \pm (a_{k-1}-a_k) \pm a_{k+1} \pm \cdots \pm a_n).$$

Donc, on trouve

$$\begin{aligned} I_k = A_{s-1}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \Big\{ & \sum_\nu \Phi_{s-1}^{n-1}(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_{k-1} + a_k \pm a_{k+1} \pm \cdots \pm a_n) \\ & - \sum_\nu \Phi_{s-1}^{n-1}(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_{k-1} - a_k \pm a_{k+1} \pm \cdots a_n) \Big\}. \end{aligned}$$

En multipliant cette égalité par a_k, il vient

$$a_k I_k = A_{s-1}^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \sum_\nu (\pm a_k) \Phi_{s-1}^{n-1}(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_k \pm \cdots \pm a_n), \tag{8}$$

où le signe devant a_k est le même dans les deux cas.

En utilisant (4) et (8), nous obtenons

$$J_s^n(a_1, \ldots, a_n) = \frac{A_{s-1}^{n-1}}{2(s-1)} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \sum_\nu (\pm a_k) \Phi_{s-1}^{n-1}(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_k \pm \cdots \pm a_n)$$

$$= A_s^n \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \sum_\nu (\pm a_1 \pm \cdots \pm a_n) \Phi_{s-1}^{n-1}(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_n)$$

$$= A_s^n \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \sum_\nu \Phi_s^n(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_n),$$

car $x \Phi_{s-1}^{n-1}(x) = \Phi_s^n(x)$.

La formule (2) est donc démontrée par l'induction.

Pour $n = s$, la formule (2) devient

$$J_n^n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{\pi}{2^{n+1}(n-1)!} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \sum_\nu \Phi_n^n(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_n). \tag{9}$$

2. Considérons maintenant l'intégrale

$$J_n(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin a_1 x \sin a_2 x \cdots \sin a_{n+1} x}{x^n} dx \quad (n, \text{ nombre naturel}). \tag{10}$$

Dans le cas où $n = 1$, l'intégrale (10) est convergente si $a_1 \pm a_2 \neq 0$. Dans le cas où $n \geqq 2$, la même intégrale converge pour $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ quelconques. Nous allons prouver la formule

$$J_n(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) = \frac{1}{2^{n+1}(n-1)!} \sum_{\nu=0}^{n+1} (-1)^\nu \sum_\nu \Phi_n(\pm a_1 \pm \cdots \pm a_{n+1}), \tag{11}$$

où $\Phi_n(x) = x^{n-1} \log |x|$.

Démonstration. Dans le cas où $n = 1$ avec $a_1 \pm a_2 \neq 0$, l'intégrale (11) peut être réduite à l'intégrale de Froullani; donc, on a

$$J_1(a_1, a_2) = \frac{1}{2^2}(\log|a_1 + a_2| - \log|-a_1 + a_2| - \log|a_1 - a_2| + \log|-a_1 - a_2|)$$

et la formule (11) est vraie pour $n = 1$. En utilisant cette relation, on peut démontrer que (11) est valable pour $n = 2$ sans restriction relative aux paramètres a_1 et a_2.

La démonstration de la formule (11) est analogue à celle de la formule (2).

Remarque 1. Dans le cas où $0 < s < n - 1$, on peut évaluer les intégrales (1) et (10) en utilisant les formules données dans [2] (pp. 37—38).

Rémarque 2. Si l'on a $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ et $a_1 > \sum_{k=2}^{n} a_k$ d'après la formule (*voir* [1], p. 637)

$$J_n^n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{\pi}{2} \prod_{k=2}^{n} a_k$$

et d'après (9), on obtient l'identité suivante

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \sum_{\nu} (-a_1 - \cdots - a_\nu + \cdots + a_n)^{n-1} \operatorname{sgn}(-a_1 - \cdots - a_\nu + \cdots + a_n) = 2^n (n-1)! \prod_{k=2}^{n} a_k .$$

Exemple. La formule (9) pour $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a > 0$ fournit

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^n dx = \frac{\pi}{2^{n+1}(n-1)!} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \Phi_n^n((n-2\nu)\,a)$$

$$= \frac{\pi}{2^{n+1}(n-1)!} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (n-2\nu)^{n-1} a^{n-1} \operatorname{sgn}(n-2\nu)$$

$$= \frac{\pi}{2^n (n-1)!} \sum_{\nu=0}^{2\nu<n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} a^{n-1} (n-2\nu)^{n-1}.$$

Cette formule est identique à celle donnée dans [1], p. 642.

3. Je remercie au professeur D. S. Mitrinović de m'avoir signalé ce problème. Je suis également reconnaissant à mon collègue D. Ž. Đoković qui a lu cette Note dans le manuscrit et m'a donné certaines suggestions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Г. М. Фихтенгольц: *Курс диференциального и интегрального исчисления*, II, pp. 787—788, Moskva 1959.

[2] D. S. Mitrinović: *Zbornik matematičkih problema*, t. I, Beograd 1962.