PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 131 (1964)

O NEKIM KVADRATNIM FUNKCIONALNIM JEDNAČINAMA*

Petar M. Vasić

SADRŽAJ

* Primljeno za štampu na predlog D. S. Mitrinovića.

SKRAĆENICE

R označava skup realnih brojeva.
K označava skup kompleksnih brojeva.
$\Delta\,\{F_1(u_1),\ F_2(u_2),\ \ldots,\ F_n(u_n)\}$ je skraćena oznaka za funkcionalnu determinantu reda n:

$$\begin{vmatrix} F_1(u_1) & F_1(u_2) & F_1(u_3) & \ldots & F_1(u_n) \\ F_2(u_1) & F_2(u_2) & F_2(u_3) & & F_2(u_n) \\ \vdots & & & & \\ F_n(u_1) & F_n(u_2) & F_n(u_3) & & F_n(u_n) \end{vmatrix}.$$

0. UVOD

Ovaj rad sastoji se iz sledećih delova:

0. Uvod;
1. Generalizacije nekih rezultata D. S. Mitrinovića i S. B. Pešića;
2. Jedna klasa kvadratnih cikličnih funkcionalnih jednačina;
3. Neke kvadratne funkcionalne jednačine sa interesantnim osobinama;
4. Sistem funkcionalnih jednačina koji sadrži jednačinu F za slučaj $n=2$;
5. Neka otvorena pitanja i mogućnosti daljih generalizacija;
6. Bibliografija.

1. U prvom poglavlju date su neke generalizacije funkcionalne jednačine (jednačina $\mathbf{F}$):

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) + F(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2) + \cdots + F(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1}) = 0 \tag{0.1}$$

gde je funkcija F data formulom

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) = \prod_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}, x_{2k}) \qquad (f: K^2 \to K;\ n>1). \tag{0.2}$$

D. S. Mitrinović i S. B. Prešić dokazali su da je opšte rešenje ove jednačine (videti: [2])

$$f(u, v) = g(u)\, h(v) - g(v)\, h(n) \qquad \text{za } n=2, \tag{0.3}$$

$$f(u, v) = 0 \qquad \text{za } n>2, \tag{0.4}$$

gde su $g, h: K \to K$ proizoljne funkcije.

Prva generalizacija koja je data za jednačinu $\mathbf{F}$ je funkcionalna jednačina

$$\alpha_1 F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) + \alpha_2 F(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2) + \cdots + \alpha_{2n-1} F(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1}) = 0 \tag{0.5}$$

u kojoj je funkcija F definisana formulom (0.2); $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2k-1} \in K$ su proizvoljne konstante od kojih sve nisu jednake nuli. Ova funkcionalna jednačina (jednačina $\mathbf{F}_1$) ima, kao što je u radu dokazano, sledeće opšte rešenje:

1° U slučaju $\sum\limits_{i=1}^{2n-1} \alpha_i = 0$ $(n \geqslant 2)$ funkciju

$$f(u, v) = g(u)\, g(v) \qquad (g: K \to K \text{ proizvoljna funkcija}); \tag{0.6}$$

2° U slučaju $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2n-1}$ za $n>2$ funkciju (0.4), a za $n=2$ funkciju (0.3); 3° U svim ostalim slučajevima funkciju (0.3).

Za $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2n-1}$, jednačina $\mathbf{F}_1$ svodi se na jednačinu **F**.

U vezi sa jednačinom $\mathbf{F}_1$, za slučaj kada je $n = 2$, videti članak [12].

Druga generalizacija odnosi se na jednačinu **F** u slučaju $n = 2$. Jednačina koja je analizirana (jednačina $\mathbf{F}_2$):

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{ni} \{ f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+i}) \times f(x_{n+i+1}, x_{n+i+2}, \ldots, x_{2n-1+i}, x_{2n+i}) \} = 0 \tag{0.7}$$

($f: K^n \to K$; $x_k = x_{k-n-1}$ za $k > 2n$) svodi se na jednačinu **F** kada je $n = 2$.

Jednačina (0.7) u potpunosti je rešena ako je $n = 3$. Njeno opšte rešenje u tom slučaju je

$$f(u, v, w) = F(w) \{ F(u) G(v) + F(v) G(u) \}, \tag{0.8}$$

$$f(u, v, w) = \Delta \{ F_1(u), F_2(v), F_3(w) \} \tag{0.9}$$

gde su F, G, F_1, F_2, $F_3: K \to K$ proizvoljne funkcije.

U slučaju proizvoljnog n dokazano je da je funkcija

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Delta \{ F_1(u_1), F_2(u_2), \ldots, F_n(u_n) \} \tag{0.10}$$

($F_i: K \to K$ proizvoljne funkcije) partikularno rešenje jednačine $\mathbf{F}_2$. Ovo rešenje je istovremeno opšte rešenje u klasi funkcija f koje imaju sledeću osobinu:

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) \\ \equiv -f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_n) \\ (1 \leqslant i < j \leqslant n). \end{aligned} \tag{0.11}$$

O rezultatima koji su u vezi sa jednačinom $\mathbf{F}_2$ videti članak [11].

Treća jednačina koja je posmatrana u ovom poglavlju (jednačina $\mathbf{F}_3$):

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{kn}) = \sum_{v=n+1}^{kn} \theta_{n,v} F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{kn}) \tag{0.12}$$

gde je $\theta_{i,j}$ operator koji vrši razmenu argumenata na i-tom i j-om mestu u funkciji F i

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{kn}) = \prod_{i=0}^{k-1} f(x_{ni+1}, x_{ni+2}, \ldots, x_{ni+n}), \tag{0.13}$$

generališe jednačinu **F** u tom smislu što kao opšte rešenje ima funkciju iste strukture kao i opšte rešenje jednačine **F**. Dokazano je da je opšte rešenje ove jednačine funkcija (0.10) kada je $k = 2$, odnosno (0.4) za $k > 2$. Ako je $n = 2$ ova rešenja su identična sa rešenjima jednačine **F**. Budući da funkcija f, rešenje jednačine $\mathbf{F}_3$ ima osobinu (0.11), ova jednačina može se za slučaj $n = 2$ transformisati na jednačinu **F**.

Jednačina $\mathbf{F}_3$ generališe u istom smislu i Carlitzovu jednačinu (videti [1]):

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3)\, f(x_4, x_5, x_6) + f(x_2, x_1, x_4)\, f(x_3, x_5, x_6) \\ + f(x_1, x_2, x_5)\, f(x_3, x_4, x_6) + f(x_2, x_1, x_6)\, f(x_3, x_4, x_5) = 0 \end{aligned} \tag{0.14}$$

na koju se za slučaj $n = 3$, $k = 2$, može transformisati.

Rezultati koji su u vezi sa jednačinom $\mathbf{F}_3$ za slučaj $k = 2$, objavljeni su u člancima [9] i [10].

2. U drugom poglavlju posmatrana je ciklična funkcionalna jednačina

$$
\begin{aligned}
(0.15)\qquad & F(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) + F(x_0, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) \\
& + \cdots + F(x_0, x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}) = 0
\end{aligned}
$$

gde je

$$(0.16)\qquad F(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\nu_1}, x_{\nu_2})\, f(x_{\nu_3}, x_{\nu_4})$$

($f: K^2 \to K$; ν_i međusobno različiti celi nenegativni brojevi $\leqslant n$).

Jednačina (0.15) uz uslov (0.16) za slučaj $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = p$, $\nu_3 = q$, $\nu_4 = r$, u potpunosti je rešena. Opšte rešenje ove jednačine je

$$(0.17)\qquad f(u, v) = g(u)\, h(v) - g(v)\, h(u)$$

($g, h: K \to K$ proizvoljne funkcije) u slučaju kada p, q, r, n zadovoljavaju jedan od sledećih šest uslova:

1°	$2p = q + r - n,$	$2n = 3r - 3p$	$(p < q < r);$
2°	$2p = q + r + n,$	$n = 3p - 3r$	$(q < r < p);$
3°	$2p = q + r,$	$n = 3p - 3r$	$(r < p < q);$
4°	$2p = q + r - n,$	$n = 3r - 3p$	$(p < r < q);$
5°	$2p = q + r,$	$n = 3r - 3p$	$(q < p < r);$
6°	$2p = q + r + n,$	$2n = 3p - 3r$	$(r < q < p).$

$$(0.18)\qquad f(u, v) = g(v) - g(u) \qquad (g: K \to K \text{ proizvoljna funkcija})$$

u slučaju kada je zadovoljen jedan od sledeći šest uslova:

7°	$2p = q + r - n,$	$2n \neq 3r - 3p$	$(p < q < r);$
8°	$2p = q + r + n,$	$n \neq 3p - 3r$	$(q < r < p);$
9°	$2p = q + r,$	$n \neq 3p - 3r$	$(r < p < q);$
10°	$2p = q + r - n,$	$n \neq 3r - 3p$	$(p < r < q);$
11°	$2p = q + r,$	$n \neq 3r - 3p$	$(q < p < r);$
12°	$2p = q + r + n,$	$n \neq 3p - 3r$	$(r < q < p).$

U svim ostalim slučajevima jedino rešenje je (0.4).

Rezultati koji stoje u vezi s ovom jednačinom objavljeni su u članku [8].

Slučaj kada je $\nu_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ (jednačina $\mathbf{F}_5$) nije potpuno rešen. U ovom radu tretirano je samo pitanje kada jednačina $\mathbf{F}_5$ ima i netrivijalnih rešenja i to u slučaju kada je nepoznata funkcija $f: R^2 \to R$. U vezi jednačine $\mathbf{F}_5$ dati su potrebni uslovi da bi postojala netrivijalna rešenja: mora biti ispunjen jedan od sledeća tri uslova:

1° $2r - 1 \equiv p \pmod{n}$, $p + q - 1 \not\equiv r \pmod{n}$, $r + q - p \not\equiv p \pmod{n}$;

2° $r + q - p \equiv p \pmod{n}$, $p + q - 1 \not\equiv r \pmod{n}$, $2r - 1 \not\equiv p \pmod{n}$;

3° $p + q - 1 \equiv r \pmod{n}$, $2r - 1 \equiv p \pmod{n}$, $r + q - p \equiv p \pmod{n}$.

Pri tome dokazano je da sva rešenja jednačine $\mathbf{F}_5$ imaju osobinu

$$f(x, y)+f(y, x)=0.$$

Takođe je iskazana hipoteza da jednačina $\mathbf{F}_5$ ima netrivijalnih rešenja tada i samo tada ako važi jedan od sledeća dva uslova:

$$1^\circ \quad 2r-1\equiv p \pmod{n}, \qquad 2q-1\equiv p \pmod{n};$$

$$2^\circ \quad q+r-p\equiv p \pmod{n}, \qquad r+q-2\equiv 0 \pmod{n}.$$

3. U trećem poglavlju posmatrane su neke funkcionalne jednačine koje nastaju iz jednačine

$$(0.19) \quad \begin{aligned} &F(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1})+F(x_0, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_1)\\ &\qquad +\cdots+F(x_0, x_{2n-1}, x_1, x_2, \ldots, x_{2n-2})=0, \end{aligned}$$

gde je

$$(0.20) \quad \begin{aligned} &F(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1})\\ &\quad = \{f(x_0, x_1)+f(x_2, x_3)+\cdots+f(x_{2k-2}, x_{2k-1})\}\\ &\qquad \times\{f(x_{2k}, x_{2k+1})+f(x_{2k+2}, x_{2k+3})+\cdots+f(x_{2n-2}, x_{2n-1})\} \end{aligned}$$

($f: K^2\to K$; $n>2$) permutovanjem argumenata i promenom znakova u (0.20) po utvrđenim zakonima.

Jednačinu (0.19) sa uslovom (0.20) (jednačina $\mathbf{F}_6$) rešili su D. S. Mitrinović i S. B. Prešić i dokazali su da je njeno opšte rešenje funkcija (0.18).

U ovom poglavlju dokazano je da je opšte rešenje funkcionalne jednačine (0.19) uz uslov

$$(0.21) \quad \begin{aligned} &F(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1})\\ &\quad = \{f(x_0, u_0)+f(x_2, u_1)+\cdots+f(x_{2k-2}, u_{k-1})\}\\ &\qquad \times\{f(x_{2k}, v_0)+f(x_{2k+2}, v_1)+\cdots+f(x_{2n-2}, v_{n-k-1})\} \end{aligned}$$

$\big(u_i\in\{x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{2k-1}\}$ $(i=0, 1, \ldots, k-1)$, $v_j\in\{x_{2k+1}, x_{2k+3}, \ldots, x_{2n-1}\}$ $(j=0, 1, \ldots, n-k-1)$; $u_\nu\neq u_\mu$ i $v_\nu\neq v_\mu$ za $\nu\neq\mu\big)$

(jednačina $\mathbf{F}_7$) takođe funkcija (0.18).

Sledeća funkcionalna jednačina koja je u ovom poglavlju posmatrana je jednačina (0.19) uz uslov

$$(0.22) \quad \begin{aligned} &F(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1})\\ &=\{f(x_0, u_0)-f(u_1, v_0)+f(v_1, u_2)-f(u_3, v_2)+\cdots+f(v_{k-3}, u_{k-2})-f(u_{k-1}, v_{k-2})\}\\ &\times\{f(x_{2k}, w_0)+f(x_{2k+2}, w_1)+\cdots+f(x_{2n-2}, w_{n-k-1})\} \qquad (k \text{ parno}),\\ &=\{f(x_0, u_0)-f(u_1, v_0)+f(v_1, u_2)-\cdots-f(u_{k-2}, v_{k-3})+f(v_{k-2}, u_{k-1})\}\\ &\times\{f(x_{2k}, w_0)+f(x_{2k+2}, w_1)+\cdots+f(x_{2n-2}, w_{n-k-1})\} \qquad (k \text{ neparno}) \end{aligned}$$

$\big(f: K^2\to K$; $u_i\in\{x_1, x_3, \ldots, x_{2k-1}\}$ $(i=0, 1, \ldots, k-1)$, $v_j\in\{x_2, x_4, \ldots, x_{2k-2}\}$ $(j=0, 1, \ldots, k-2)$ $w_\nu\in\{x_{2k+1}, x_{2k+3}, \ldots, x_{2n-1}\}$ $(\nu=0, 1, \ldots, n-k-1)$; $u_\alpha\neq u_\beta$, $v_\alpha\neq v_\beta$, $w_\alpha\neq w_\beta$ ako je $\alpha\neq\beta\big)$.

Dokazano je da ova funkcionalna jednačina (jednačina F_8) u slučaju $k=2m-1$ ima kao opšte rešenje funkciju (0.18), dok je u slučaju $k=2m$ njeno opšte rešenje funkcija (0.18) ili funkcija oblika $f(u, v)=h(v)$, gde je h podesno izabrana funkcija.

Funkcionalna jednačina (0.19), kada je F dato formulom

$$
\begin{aligned}
(0.23)\qquad & F(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1})\\
&= \{f(x_0, u_0)+f(x_2, u_1)+\cdots+f(x_{2k-2}, u_{k-1})\}\\
&\quad\times\{f(v_0, w_0)-f(w_1, v_1)+f(v_2, w_2)-\cdots-f(w_{n-k-2}, v_{n-k-2})\\
&\qquad+f(v_{n-k-1}, w_{n-k-1})\}\qquad (n-k=2m+1),\\
&= \{f(x_0, u_0)+f(x_2, u_1)+\cdots+f(x_{2k-2}, u_{k-1})\}\\
&\quad\times\{f(v_0, w_0)-f(w_1, v_1)+f(v_2, w_2)+\cdots+f(v_{n-k-2}, w_{n-k-2})\\
&\qquad-f(w_{n-k-1}, v_{n-k-1})\}\qquad (n-k=2m)
\end{aligned}
$$

$\big(f\colon K^2\to K;\ u_i\in\{x_1, x_3, \ldots, x_{2k-1}\}\ (i=0, 1, \ldots, k-1),\ v_j\in\{x_{2k}, x_{2k+2}, \ldots,$ $x_{2n-2}\}\ (j=0, 1, \ldots, n-k-1),\ w_\nu\in\{x_{2k+1}, x_{2k+3}, \ldots, x_{2n-1}\}$ $(\nu=0, 1, \ldots, n-k-1);\ u_\alpha\neq u_\beta,\ v_\alpha\neq v_\beta,\ w_\alpha\neq w_\beta$ ako je $\alpha\neq\beta\big)$

(jednačina F_9) nije potpuno rešena, već je opšte rešenje određeno samo u slučaju $n-k=2m+1$. Tada je opšte rešenje funkcija (0.18). Kada je $n-k=2m$, navedena su samo neka partikularna rešenja ove jednačine.

Najzad, dokazano je da je za funkcionalnu jednačinu (0.19) kada je F dato na sledeći način $(n=2m,\ k=2r)$

$$
\begin{aligned}
(0.24)\qquad & F(x_0, x_1, \ldots, x_{4m-1})\\
&= \{f(x_0, x_1)-f(x_3, x_2)+f(x_4, x_5)-\cdots+f(x_{4r-4}, x_{4r-3})-f(x_{4r-1}, x_{4r-2})\}\\
&\quad\times\{f(x_{4r}, x_{4r+1})-f(x_{4r+3}, x_{4r+2})+\cdots+f(x_{4m-4}, x_{4m-3})-f(x_{4m-1}, x_{4m-2})\}
\end{aligned}
$$

(jednačina F_{10}) opšte rešenje funkcija (0.18) ili konstanta.

Jednačine koje nastaju iz jednačine F_6 permutovanjem argumenata, prvi put su analizirane u članku [7] koji su objavili D. S. Mitrinović i P. M. Vasić. Rezultati koji su ovde dobijeni su generalizacija i proširenje rezultata iz navedenog članka.

Jednačina F_7 rešena je u članku [7].

Iz jednačine F_8 za $u_i=x_{2i+1}$ $(i=0, 1, \ldots, k-1)$ i $v_j=x_{2j+2}$ $(j=0, 1, \ldots, k-2)$ dobija se jednačina koja je rešena u citiranom radu.

Slično, za $v_i=x_{2k+1\,i}$, $w_i=x_{2k+2i+1}$ $(i=0, 1, \ldots, n-k-1)$ iz jednačine F_9 dobija se jednačina koja je analizirana u članku [7].

Jednačina F_{10} prvi put se pojavljuje u ovom radu.

4. U ovom poglavlju rešen je sledeći sistem funkcionalnih jednačina (sistem S):

$$f(x_1, x_2)\, f(x_3, x_4) + f(x_1, x_3)\, f(x_4, x_2) + f(x_1, x_4)\, f(x_2, x_3)$$
$$+ \alpha \{g(x_1, x_2)\, g(x_3, x_4) + g(x_1, x_3)\, g(x_4, x_2) + g(x_1, x_4)\, g(x_2, x_3)\} = 0,$$
$$f(x_1, x_2)\, g(x_3, x_4) + f(x_1, x_3)\, g(x_4, x_2) + f(x_1, x_4)\, g(x_2, x_3)$$
$$+ g(x_1, x_2)\, f(x_3, x_4) + g(x_1, x_3)\, f(x_4, x_2) + g(x_1, x_4)\, f(x_2, x_3)$$
$$+ \beta \{g(x_1, x_2)\, g(x_3, x_4) + g(x_1, x_3)\, g(x_4, x_2) + g(x_1, x_4)\, g(x_2, x_3)\} = 0.$$

Ovaj sistem ima tri tipa rešenja u zavisnosti od toga da li je $\frac{\beta^2}{4} + \alpha$ pozitivno, negativno ili nula.

Sistem jednačina **S** sadrži jednačinu **F** za slučaj $n = 2$. Jedno rešenje toga sistema dobija se kada se stavi $g \equiv 0$ i odredi funkcija f iz jednačine **F**.

5. U ovom poglavlju navedena su pitanja koja ostaju otvorena i odnose se na jednačine **F**, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_5$ i $\mathbf{F}_9$.

Takođe, navedeno je više pravaca u kojima je moguće vršiti generalizacije rezultata koji su dobijeni u ovom radu.

6. U bibliografiji literatura je podeljena na dva dela: a) Citirani radovi, b) Ostala literatura.

U prvom delu po azbučnom redu navedeni su članci koji su upotrebljeni pri izradi ovoga rada, a u drugom delu, takođe azbučnim redom, nabrojana je ostala korišćena literatura koju nije bilo neophodno citirati u samom radu.

Na kraju, želim da izrazim zahvalnost profesoru D. S. Mitrinoviću koji me je uputio u naučni rad i za vreme izrade ovoga rada dao niz korisnih saveta i sugestija.

Takođe želim da se zahvalim D. Ž. Đokoviću i S. B. Prešiću koji su pročitali neke delove ovog rada.

1. GENERALIZACIJE NEKIH REZULTATA

D. S. MITRINOVIĆA I S. B. PREŠIĆA

1.1. Funkcionalna jednačina $\mathbf{F}_1$

Funkcionalnu jednačinu

(1.1.1) $$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) + F(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2) + \cdots + F(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1}) = 0,$$

gde je

(1.1.2) $$F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}\, x_{2n}) = \prod_{k=1}^{n} f(x_{2k-1}, x_{2k}) \qquad (f: K^2 \to K;\ n > 1)$$

zvaćemo *jednačina* **F**.

Za jednačinu **F**, D. S. Mitrinović i S. B. Prešić dokazali su sledeći rezultat (videti: [2]):

T e o r e m a 1. 1. 1. — *Opšte rešenje jednačine* **F** *je*

(1.1.3) $$f(u, v) = g(u)\, h(v) - g(v)\, h(u) \qquad za\ n = 2,$$

(1.1.4) $$f(u, v) = 0 \qquad za\ n > 2,$$

gde su $g, h: K^2 \to K$ *proizvoljne funkcije.*

Funkcionalnu jednačinu

(1.1.5) $$\alpha_1 F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n}) + \alpha_2 F(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{2n}, x_2) + \cdots + \alpha_{2n-1} F(x_1, x_{2n}, x_2, \ldots, x_{2n-2}, x_{2n-1}) = 0,$$

gde je F dato relacijom (1.1.2) i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n-1} \in K$ parametri od kojih svi nisu jednaki nuli, zvaćemo: *jednačina* **F**. Kada je $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_{2n-1}$, jednačina $\mathbf{F}_1$ svodi se na jednačinu **F**.

Za jednačinu $\mathbf{F}_1$ dokazaćemo sledeći rezultat:

T e o r e m a 1. 1. 2. — *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* $\mathbf{F}_1$ *u slučaju* $\sum_{i=1}^{2n-1} \alpha_i = 0$ *je*

(1.1.6) $$f(u, v) = g(u)\, g(v) \qquad (n \geqslant 2).$$

Ako je $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2n-1}$ $(\neq 0)$, *njeno opšte rešenje je funkcija* (1.1.3) *za* $n = 2$, *odnosno* (1.1.4) *za* $n > 2$.

U svim ostalim slučajevima opšte rešenje je (1.1.4).

Funkcije g, $h: K^2 \to K$ koje se pojavljuje u opštim rešenjima su proizvoljne funkcije.

Dokaz teoreme 1.1.2. — Dokažimo prvo teoremu za slučaj $n=2$ (videti: [12]). Tada jednačina $\mathbf{F}_1$ glasi

$$\alpha_1 f(x_1, x_2) f(x_3, x_4) + \alpha_2 f(x_1, x_3) f(x_4, x_2) + \alpha_3 f(x_1, x_4) f(x_2, x_3) = 0. \tag{1.1.7}$$

Ako u jednačini (1.1.7) ciklički permutujemo promenljive x_2, x_3, x_4 dobijamo

$$\alpha_1 f(x_1, x_3) f(x_4, x_2) + \alpha_2 f(x_1, x_4) f(x_2, x_3) + \alpha_3 f(x_1, x_2) f(x_3, x_4) = 0, \tag{1.1.8}$$

$$\alpha_1 f(x_1, x_4) f(x_2, x_3) + \alpha_2 f(x_1, x_2) f(x_3, x_4) + \alpha_3 f(x_1, x_3) f(x_4, x_2) = 0. \tag{1.1.9}$$

Sistem jednačina (1.1.7), (1.1.8) i (1.1.9) je saglasan ako i samo ako je ispunjen uslov:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.1.10}$$

U svim ostalim slučajevima opšte rešenje funkcionalne jednačine (1.1.7) je

$$f(u, v) \equiv 0.$$

Iz (1.1.10) sleduje

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\alpha_2 - \alpha_3)^2 + (\alpha_3 - \alpha_1)^2\} = 0. \tag{1.1.11}$$

Ispitaćemo slučajeve:

Prvi slučaj: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ pri čemu je $\alpha_1 = \alpha_2$ $(\neq 0)$; tada je uslov (1.1.10) ispunjen. Jednačina (1.1.7) je oblika

$$f(x_1, x_2) f(x_3, x_4) + f(x_1, x_3) f(x_4, x_2) = 2 f(x_1, x_4) f(x_2, x_3). \tag{1.1.12}$$

Ciklički permutujući promenljive x_2, x_3, x_4, iz ove jednačine nalazimo

$$f(x_1, x_3) f(x_4, x_2) + f(x_1, x_4) f(x_2, x_3) = 2 f(x_1, x_2) f(x_3, x_4). \tag{1.1.13}$$

Eliminišući iz jednačina (1.1.12) i (1.1.13) član

$$f(x_1, x_2)\, f(x_3, x_4),$$

dobijamo jednačinu

$$f(x_1, x_3) f(x_4, x_2) = f(x_1, x_4) f(x_2, x_3). \tag{1.1.14}$$

Za svako netrivijalno rešenje jednačine (1.1.12) postoji najmanje jedan par kompleksnih brojeva (a, b), takav da je $f(a, b) \neq 0$.

Stavljajući $x_1 = a$, $x_2 = u$, $x_3 = v$, $x_4 = b$, jednačina (1.1.14) postaje

$$f(a, b)\, f(u, v) = f(a, v)\, f(b, u). \tag{1.1.15}$$

Ako u ovoj jednačini stavimo $u = b$, dolazimo do

$$f(b, v) = \frac{f(b, b)}{f(a, b)} f(a, v).$$

Na osnovu ove jednakosti, jednačina (1.1.15) postaje

$$f(u, v) = g(u)\, g(v), \tag{1.1.16}$$

gde smo stavili

$$\frac{\sqrt{f(b, b)}}{f(a, b)} f(a, u) = g(u).$$

Funkcija (1.1.16) je zaista jedno rešenje jednačine (1.1.12).

Drugi slučaj: $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, pri čemu je $\alpha_1 \neq \alpha_2$; i tada je uslov (1.1.10) ispunjen.

Za $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$, jednačina (1.1.7) postaje

(1.1.17) $\alpha_1 f(x_1, x_2) f(x_3, x_4) + \alpha_2 f(x_1, x_3) f(x_4, x_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) f(x_1, x_4) f(x_2, x_3)$.

Pretpostavka $\alpha_1 = 0$ povlači sa sobom $\alpha_2 \neq 0$, pa se jednačina (1.1.17) svodi na jednačinu (1.1.14), čije je opšte rešenje funkcija (1.1.16).

Pretpostavimo sada da je $\alpha_1 \neq 0$.

Označimo sa C_1 klasu svih funkcija f za koje je $f(u, u) \equiv 0$ i sa C_2 klasu svih funkcija f takvih da je $f(u, u) \not\equiv 0$.

U klasi funkcija C_1 postoji za svako netrivijalno rešenje jednačine (1.1.17), najmanje jedan par kompleksnih brojeva (a, b) takvih da je $f(a, b) \neq 0$. Stavljajući $x_1 = x_3 = a$, $x_2 = x_4 = b$, iz jednačine (1.1.17) dobijamo

(1.1.18) $$(\alpha_1 + \alpha_2) f(b, a) = \alpha_1 f(a, b).$$

Za $x_1 = u$, $x_2 = b$, $x_3 = x_4 = a$, na osnovu (1.1.18), jednačina (1.1.17) svodi se na jednačinu

$$(\alpha_1 - \alpha_2) f(a, b) f(u, a) = 0,$$

iz koje sleduje

(1.1.19) $$f(u, a) = 0.$$

Smenom $x_1 = u$, $x_2 = v$, $x_3 = a$, $x_4 = b$, jednačina (1.1.17), na osnovu (1.1.19) daje

(1.1.20) $$f(u, v) \equiv 0.$$

U klasi funkcija C_2, za svako netrivijalno rešenje, postoji bar jedan broj $c\ (c \in K)$, takav da je $f(c, c) \neq 0$. Ako stavimo $x_1 = x_2 = x_4 = c$, $x_3 = u$, iz (1.1.17) dobijamo

(1.1.21) $$f(c, u) = f(u, c).$$

Za $x_1 = x_2 = c$, $x_3 = u$, $x_4 = v$, vodeći računa o (1.1.21), jednačinu (1.1.17) možemo napisati u obliku

$$f(u, v) = \frac{1}{f(c, c)} f(c, u) f(c, v),$$

ili bolje, u obliku

(1.1.22) $$f(u, v) = g(u)\, g(v),$$

sa oznakom $f(c, u) = \sqrt{f(c, c)}\, g(u)$.

Bez teškoće se proverava da je funkcija (1.1.22) zaista jedno rešenje jednačine (1.1.17).

Budući da je klasa svih funkcija f upravo $C_1 \cup C_2$ i da (1.1.22) obuhvata trivijalno rešenje (1.1.20), opšte rešenje jednačine (1.1.17) dato je formulom (1.1.22).

Treći slučaj: $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\neq 0$. Sabirajući odgovarajuće strane jednačina (1.1.7), (1.1.8) i (1.1.9), prema uslovu $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\neq 0$, dobijamo jednačinu **F** za slučaj $n=2$. Dobijena jednačina, prema (1.1.3), ima sledeće osobine:

$$f(u, v)\equiv -f(v, u), \quad f(u, u)\equiv 0. \tag{1.1.23}$$

Ako stavimo $x_1=x_4=u$, $x_2=x_3=v$, iz (1.1.7) nalazimo

$$\alpha_2 f^2(u, v)+\alpha_1 f(u, v)\, f(v, u)=0.$$

Odavde, na osnovu prve od jednakosti (1.1.23), nalazimo

$$(\alpha_1-\alpha_2)\, f^2(u, v)=0. \tag{1.1.24}$$

Razlikovaćemo dva slučaja:

$$1^\circ\ \alpha_1\neq\alpha_2; \quad 2^\circ\ \alpha_1=\alpha_2.$$

U slučaju $\alpha_1\neq\alpha_2$, polazeći od (1.1.24), dobijamo (1.1.4).

U slučaju $\alpha_1=\alpha_2$ iz uslova (1.1.11) nalazimo

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3,$$

pa se jednačina (1.1.7) transformiše na jednačinu **F** uz uslov $n=2$. Kao što smo naveli, opšte rešenje te jednačine je funkcija (1.1.3). Ovim je teorema za $n=2$ dokazana.

Pređimo sada na dokaz teoreme 1.1.2. ako je $n>2$.

Ispitaćemo prvo slučaj

$$\sum_{i=1}^{2n-1}\alpha_i\neq 0.$$

Stavljajući $x_i=u$ $(i=1, 2, \ldots, 2n)$ iz jednačine $\mathbf{F}_1$ proizilazi identitet

$$f(u, u)\equiv 0. \tag{1.1.25}$$

U daljem toku dokazivanja pretpostavićemo da je $\alpha_1\neq 0$. Ovo možemo pretpostaviti, jer ako je $\alpha_1=0$, mora postojati bar jedno $\alpha_i\neq 0$ $(i=2, 3, \ldots, 2n-2)$, a tada cikličkim permutovanjem promenljivih $x_2, x_3, \ldots, x_{2n}$ možemo postići da koeficijent uz $f(x_1, x_2)\, f(x_3, x_4)\cdots f(x_{2n-1}, x_{2n})$ bude različit od nule.

Uvodeći smenu

$$x_1=x_3=\cdots=x_{2n-1}=u, \quad x_2=x_4=\cdots=x_{2n}=v$$

i vodeći računa o (1.1.25), jednačina $\mathbf{F}_1$ svodi se na

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\alpha_{2\nu+1}\, f^{n-\nu}(u, v)\, f^{\nu}(v, u)=0. \tag{1.1.26}$$

Jednačina $\mathbf{F}_1$ za

$$x_3=x_5=\cdots=x_{2r+1}=v, \quad x_4=x_6=\cdots=x_{2r+2}=u, \quad x_1=x_{2i-1}=u, \quad x_2=x_{2i}=v$$

$$(i=r+2,\ r+3,\ \ldots,\ n;\ 1\leqslant r<n)$$

daje

$$\alpha_1 f^{n-r}(u, v)\, f^r(v, u)=0 \qquad (1\leqslant r<n),$$

tako da iz (1.1.26) dobijamo $f(u, v)\equiv 0$.

Pređimo sada na ispitivanje slučaja $\sum_{i=1}^{2n-1}\alpha_i=0$.

U klasi funkcija C_1 (sve funkcije f za koje je $f(u, u) \equiv 0$) opšte rešenje je (1.1.4), što se dokazuje potpuno isto kao u slučaju $\sum_{i=1}^{2n-1} \alpha_i = 0$.

U klasi funkcija C_2 (sve funkcije f za koj je $f(u, u) \not\equiv 0$) postoji bar jedan broj c ($c \in K$) takav da je $f(c, c) \neq 0$.

Među parametrima $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2n-1}$ postoje bar $n-1$ takvih da je

$$\sum_{\nu=0}^{n-2} \alpha_{2\nu+i} \neq 0 \qquad (i \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}),$$

pri čemu je $\alpha_j = \alpha_{j-2n+1}$ $(j > 2n-1)$.

Zaista, ako takvi parametri ne bi postojali, imali bismo sledeći sistem od $2n-1$ linearne homogene jednačine

$$\sum_{\nu=0}^{n-2} \alpha_{2\nu+i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2n-1),$$

koji ima samo trivijalna rešenja

$$\alpha_1 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_{2n-1} = 0,$$

što se protivi pretpostavci da je bar jedan od tih parametara različit od nule.

Pretpostavimo da je

$$\sum_{\nu=0}^{n-2} \alpha_{2\nu+1} \neq 0. \tag{1.1.27}$$

Ovo možemo pretpostaviti, jer slučaj kada je

$$\sum_{\nu=0}^{n-2} \alpha_{2\nu+1} = 0 \quad \text{i} \quad \sum_{\nu=0}^{n-2} \alpha_{2\nu+i} \neq 0 \qquad (i \in \{2, 3, \ldots, 2n-1\})$$

cikličnim permutovanjem promenljivih $x_2, x_3, \ldots, x_{2n}$ i jednostavnim prenumerisavanjem parametara, možemo svesti na slučaj (1.1.27).

Stavljajući

$$x_{2n-1} = u, \quad x_{2n} = v, \quad x_\nu = c \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, 2n-2)$$

iz jednačine $\mathbf{F}_1$ dobijamo

$$\sum_{\nu=0}^{n-2} \alpha_{2\nu+1} f^{n-1}(c, c) f(u, v) + \sum_{\nu=0}^{n-2} \alpha_{2\nu+1} f^{n-2}(c, c) f(c, u) f(v, c) + \alpha_{2n-1} f^{n-2}(c, c) f(c, u) f(c, v) = 0. \tag{1.1.28}$$

Budući da je

$$\alpha_{2n-1} = -\sum_{\nu=0}^{n-2} \alpha_{2\nu+1} - \sum_{\nu=0}^{n-2} \alpha_{2\nu+2}$$

i vodeći računa o pretpostavci (1.1.27), za $v = c$, iz jednačine (1.1.28) proizilazi $f(c, u) = f(u, c)$.

Uvodeći oznaku $f(c, u) = g(u)\sqrt{f(c, c)}$, iz (1.1.28) dobijamo

$$f(u, v) = g(u)\, g(v).$$

Budući da je u slučaju $\sum\limits_{\nu=1}^{2n-1} \alpha_\nu = 0$ ova funkcija zaista rešenje jednačine $\mathbf{F}_1$, teorema 1.1.2. u potpunosti je dokazana.

Primer. Funkcionalna jednačina

$$f(x_1, x_2)\, f(x_3, x_4)\, f(x_5, x_6) + f(x_1, x_3)\, f(x_4, x_5)\, f(x_6, x_2) = 0$$

na osnovu teoreme o funkcionalnoj jednačini $\mathbf{F}_1$ ima kao opšte rešenje $f(u, v) \equiv 0$, jer je $\sum\limits_{i=1}^{2n-1} \alpha_i = 2 \neq 0$. Zaista, za $x_i = u$ $(i = 1, 2, \ldots, 6)$, dobijamo $f(u, u) \equiv 0$, a na osnovu ove ralacije za $x_1 = x_3 = x_5 = u$, $x_2 = x_4 = x_6 = v$, neposredno dobijamo $f(u, v) \equiv 0$.

Funkcionalna jednačina

$$f(x_1, x_2)\, f(x_3, x_4)\, f(x_5, x_6) + f(x_1, x_3)\, f(x_4, x_5)\, f(x_6, x_6) = 3\, f(x_1, x_4)\, f(x_5, x_6)\, f(x_2, x_3)$$

na osnovu iste teoreme, budući da je $\Sigma \alpha_i = 0$, kao opšte rešenje ima funkciju $f(u, v) = g(u)\, g(v)$. Zaista, stavljajući $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = c$ $(f(c, c) \neq 0)$ i $x_5 = u$, $x_6 = v$, dobijamo

$$2 f^2(c, c)\, f(u, v) = 2 f(c, c)\, f(c, u)\, f(v, c).$$

Iz poslednje jednačine stavljajući $v = c$ dobijamo vezu

$$f(u, c) = f(c, u),$$

tako da je konačno $f(u, v) = g(u)\, g(v)$, gde smo stavili

$$g(u) \sqrt{f(c, c)} = f(c, u).$$

1.2. Funkcionalna jednačina $\mathbf{F}_2$

Funkcionalna jednačina $\mathbf{F}$ ako je $n = 2$ glasi

$$f(x_1, x_2)\, f(x_3, x_4) + f(x_1, x_3)\, f(x_4, x_2) + f(x_1, x_4)\, f(x_2, x_3) = 0. \tag{1.2.1}$$

Opšte rešenje ove jednačine, prema teoremi 1.1.1., je

$$f(u, v) = g(u)\, h(v) - g(v)\, h(u). \tag{1.2.2}$$

Jednačina (1.2.1) je najinteresantniji slučaj jednačine $\mathbf{F}$ jer u ostalim slučajevima postoje samo trivijalna rešenja. U ovom i u sledećem odeljku bavićemo se nekim generalizacijama jednačine (1.2.1). Ove generalizacije vršićemo u dva pravca:

1° Posmatraćemo neke funkcionalne jednačine u kojima je nepoznata funkcija $f: K^n \to K$ $(n > 2)$ a koje su istog oblika kao jednačina (1.2.1);

2° Formiraćemo funkcionalnu jednačinu sa nepoznatom funkcijom $f: K^n \to K$ $(n > 2)$, koja kao opšte rešenje ima funkciju iste strukture kao (1.2.2).

U ovom odeljku zadržaćemo se na slučaju 1°.

Posmatrajmo funkcionalnu jednačinu (videti: [11])

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^{ni} \{ f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+i}) \times f(x_{n+i+1}, x_{n+i+2}, \ldots, x_{2n-1+i}, x_{2n+i}) \} = 0 \tag{1.2.3}$$

pri čemu je $f: K^n \to K$ i $x_k \equiv x_{k-n-1}$ za $k > 2n$.

Funkcionalnu jednačinu (1.2.3) zvaćemo: *jednačina* $\mathbf{F}_2$. Za $n = 2$, jednačina $\mathbf{F}_2$ svodi se na jednačinu (1.2.1).

Funkcija f, data formulom

(1.2.4) $$f(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Delta \{F_1(u_1), F_2(u_2), \ldots, F_n(u_n)\},$$

gde su $F_1, F_2, \ldots, F_n : K \to K$ proizvoljne funkcije, jeste jedno rešenje jednačine $\mathbf{F}_2$. Zaista, razvijajući po Laplaceovom pravilu sledeću determinatu

$$D = \begin{vmatrix} F_1(x_1) & F_2(x_1) & \ldots & F_n(x_1) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ F_1(x_2) & F_2(x_2) & & F_n(x_2) & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ F_1(x_{n-1}) & F_2(x_{n-1}) & & F_n(x_{n-1}) & 0 & 0 & & 0 \\ F_1(x_n) & F_2(x_n) & & F_n(x_n) & F_1(x_n) & F_2(x_n) & & F_n(x_n) \\ F_1(x_{n+1}) & F_2(x_{n+1}) & & F_n(x_{n+1}) & F_1(x_{n+1}) & F_2(x_{n+1}) & & F_n(x_{n+1}) \\ \vdots & & & & & & & \\ F_1(x_{2n}) & F_2(x_{2n}) & & F_n(x_{2n}) & F_1(x_{2n}) & F_2(x_{2n}) & & F_n(x_{2n}) \end{vmatrix}$$

i vodeći računa identitetu

(1.2.5) $$D = 0,$$

proverava se da je funkcija (1.2.4) zaista rešenje jednačine (1.2.3).

Međutim, u opštem slučaju, funkcija (1.2.4) nije opšte rešenje jednačine (1.2.3). Zaista, ako je $n = 2k + 1$, jednačina (1.2.3) ima kao partikularno rešenje sledeću funkciju

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n) = u_1 + u_2,$$

koja nije sadržana u (1.2.4), jer za ovo rešenje imamo

$$f(u, u, u, \ldots, u, u) = 2u,$$

dok je za funkciju (1.2.4)

$$f(u, u, u, \ldots, u, u) \equiv 0.$$

U slučaju $n = 2k$ $(k > 1)$, jednačina (1.2.3) ima kao partikularno rešenje funkciju

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n) = u_1 - u_2$$

koja takođe nije obuhvaćena formulom (1.2.4).

U slučaju $n = 2$, funkcija (1.2.4) je opšte rešenje jednačine (F_2), što proizilazi iz teoreme 1.1.1.

Odredićemo sada opšte rešenje jednačine (1.2.3) u slučaju kada je $n = 3$. U ovom slučaju jednačina (1.2.3) glasi

(1.2.6) $$f(x_1, x_2, x_3) f(x_4, x_5, x_6) - f(x_1, x_2, x_4) f(x_5, x_6, x_3) + f(x_1, x_2, x_5) f(x_6, x_3, x_4) - f(x_1, x_2, x_6) f(x_3, x_4, x_5) = 0.$$

Teorema 1.2.1. — *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (1.2.6) *dato je formulama*

(1.2.7) $$f(u, v, w) = F(w)\{F(u) G(v) + F(v) G(u)\},$$

(1.2.8) $$f(u, v, w) = \Delta \{F_1(u), F_2(v), F_3(w)\},$$

gde su $F, G, F_1, F_2, F_3 : K \to K$ proizvoljne funkcije.

Dokaz teoreme 1.2.1. — Označimo sa C_1 klasu svih funkcija f za koje je $f(u, u, u) \equiv 0$, a sa C_2 klasu svih funkcija f takvih da je $f(u, u, u) \not\equiv 0$. Potražićemo prvo opšte rešenje u klasi funkcija C_2.

Klasa C_2. Budući da je $f(u, u, u) \not\equiv 0$, postoji najmanje jedan broj α ($\alpha \in K$) takav da je

$$f(\alpha, \alpha, \alpha) = k^3 \neq 0.$$

Stavljajući $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = \alpha$, $x_6 = u$, jednačina (1.2.6) svodi se na

$$f(u, \alpha, \alpha) = f(\alpha, u, \alpha). \tag{1.2.9}$$

Za $x_1 = x_4 = x_5 = x_6 = \alpha$, $x_2 = u$, $x_3 = v$, jednačina (1.2.6) postaje

$$f(\alpha, u, v) = k F(v) H(u), \tag{1.2.10}$$

gde smo uveli nove funkcije F, H relacijama

$$F(u) = \frac{f(\alpha, \alpha, u)}{k^2}, \quad H(u) = \frac{f(u, \alpha, \alpha)}{k^2}. \tag{1.2.11}$$

Uvodeći smenu $x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = \alpha$, $x_1 = u$, $x_3 = v$, prema (1.2.9) i (1.2.11)' iz jednačine (1.2.6) proizilazi

$$f(u, \alpha, v) = k F(v) H(u). \tag{1.2.12}$$

Stavljajući $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \alpha$, $x_5 = u$, $x_6 = v$ i koristeći osobinu (1.2.10), iz jednačine (1.2.6) nalazimo

$$f(u, v, \alpha) = k \{H(u) F(v) - F(u) F(v) + F(u) H(v)\}. \tag{1.2.13}$$

Najzad, ako stavimo $x_1 = x_2 = x_3 = \alpha$, $x_4 = u$, $x_5 = v$, $x_6 = w$ i iskoristimo relacije (1.2.10), (1.2.11), (1.2.12) i (1.2.13) jednačinu (1.2.6) možemo napisati u sledećem obliku

$$f(u, v, w) = F(w) \{F(u) H(v) + F(v) H(u) - F(u) F(v)\}. \tag{1.2.14}$$

Uvodeći novu funkciju pomoću relacije

$$G(u) = H(u) - \frac{1}{2} F(u),$$

identitet (1.2.14) dobija sledeći prostiji oblik

$$f(u, v, w) = F(w) \{F(u) G(v) + F(v) G(u)\}. \tag{1.2.15}$$

Funkcija (1.2.15) je zaista rešenje jednačine (1.2.6).

Klasa C_1. U ovoj klasi funkcija imamo

$$f(u, u, u) \equiv 0.$$

Za svako netrivijalno rešenje jednačine (1.2.6) u klasi funkcija C_1 postoji najmanje jedna trojka brojeva (a, b, c) $(a, b, c \in K)$, takva da je $f(a, b, c) \neq 0$.

Iz (1.2.6), za $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = x_4 = x_5 = c$, $x_6 = u$, dobijamo

$$f(c, c, u) - f(c, u, c) + f(u, c, c) = 0. \tag{1.2.16}$$

Na osnovu smene $x_1 = x_2 = x_4 = x_6 = c$, $x_3 = x_5 = u$, jednačina se svodi na

$$f(c, u, c) f(c, c, u) = 0. \tag{1.2.17}$$

Ako stavimo $x_1=x_2=x_4=x_5=c,\ x_3=x_6=u$ iz (1.2.6) nalazimo

$$f(c,c,u)\{f(c,c,u)-f(u,c,c)\}=0. \tag{1.2.18}$$

Pretpostavimo da postoji jedan broj d ($d\in K$) takav da je $f(c,c,d)\neq 0$. Tada, na osnovu jednakosti (1.2.17) i (1.2.18) biće

$$f(c,d,c)=0 \text{ i } f(c,c,d)=f(d,c,c),$$

pa, prema (1.2.16), mora važiti

$$f(c,c,d)=0.$$

Dobijena relacija je u protivurečnosti sa pretpostavkom da postoji bar jedan broj d takav da je $f(c,c,d)\neq 0$. Prema tome, imamo $f(c,c,u)\equiv 0$ i prema (1.2.16)

$$f(c,u,c)=f(u,c,c). \tag{1.2.19}$$

Razlikovaćemo sledeća dva slučaja:

$$1^\circ \quad f(u,c,c)\not\equiv 0; \qquad 2^\circ \quad f(u,c,c)\equiv 0.$$

1° Ako pretpostavimo da je $f(u,c,c)\not\equiv 0$, mora postojati bar jedan broj β ($\beta\in K$) takav da je $f(\beta,c,c)\neq 0$.

Za $x_1=u,\ x_2=x_5=x_6=c,\ x_3=v,\ x_4=\beta$ iz (1.2.6) nalazimo

$$f(u,c,v)\,f(\beta,c,c)+f(u,c,c)\,f(c,v,\beta)-f(u,c,c)\,f(v,\beta,c)=0. \tag{1.2.20}$$

Sa oznakama

$$H(u)=\frac{f(u,c,c)}{f(\beta,c,c)},\quad F(u)=f(u,\beta,c)-f(c,u,\beta), \tag{1.2.21}$$

relacija (1.2.20) dobija oblik

$$f(u,c,v)=F(v)\,H(u). \tag{1.2.22}$$

Iz (1.2.6), smenom $x_1=x_5=x_6=c,\ x_2=u,\ x_3=v,\ x_4=\beta$, dolazimo do

$$f(c,u,v)=F(v)\,H(u),$$

pri čemu su korišćene oznake (1.2.21).

Jednačina (1.2.20), za $u=\beta$, daje $f(\beta,c,v)=F(v)$. Na osnovu toga, smenom $x_1=\beta,\ x_2=x_3=x_6=c,\ x_4=u,\ x_5=v$, transformiše se jednačina (1.2.6) u

$$f(u,v,c)=F(v)\,H(u)+F(u)\,H(v).$$

Najzad, stavljajući $x_1=\beta,\ x_2=x_3=c,\ x_4=u,\ x_5=v,\ x_6=w$ i koristeći oznaku $k=\dfrac{1}{f(\beta,c,c)}$, iz (1.2.6) dobijamo

$$f(u,v,w)=\frac{F(w)}{k}\,\{F(u)\,H(v)+F(v)\,H(u)\},$$

ili bolje

$$f(u,v,w)=F(w)\,\{F(u)\,G(v)+F(v)\,G(u)\},$$

pri čemu je stavljeno $G(u)=\dfrac{1}{k}\,H(u)$.

Prema tome, ako postoje funkcije f, rešenja jednačine (1.2.6) takve da je $f(u,u,u)\equiv 0$, $f(u,c,c)\not\equiv 0$, one moraju biti oblika (1.2.15).

2° Pretpostavimo sada da je $f(u, c, c) \equiv 0$.

Tada, na osnovu (1.2.16) i (1.2.19), dolazimo do

$$f(c, c, u) \equiv f(c, u, c) \equiv f(u, c, c) \equiv 0. \tag{1.2.23}$$

Koristeći relaciju (1.2.23), jednačina (1.2.6) za $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = u$, $x_4 = x_6 = c$, $x_5 = v$, daje

$$f(v, c, u) = -f(u, c, v). \tag{1.2.24}$$

Ako zamenimo $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = x_4 = c$, $x_5 = u$, $x_6 = v$ u jednačini (1.2.6), dobićemo

$$f(c, u, v) = f(u, v, c). \tag{1.2.25}$$

Ako je $f(a, b, c) \neq 0$, prema (1.2.24) i (1.2.25) biće i $f(a_1, b_1, c_1) \neq 0$ gde je (a_1, b_1, c_1) ma koja permutacija brojeva a, b, c.

Na osnovu ovoga, u jednakostima (1.2.24) i (1.2.25) c možemo zameniti bilo sa a, bilo sa b.

Stavljajući $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, $x_4 = u$, $x_5 = v$, $x_6 = w$, na osnovu (1.2.25), jednačina (1.2.6) postaje

$$f(a, b, c)\, f(u, v, w) = f(a, b, u)\, f(c, v, w) - f(a, b, v)\, f(w, c, u) + f(a, b, w)\, f(c, u, v).$$

Ako ovde stavimo $F_1(u) = -\dfrac{f(a, b, u)}{f(a, b, c)}$, dobijamo

$$f(u, v, w) = -F_1(u)\, f(c, v, w) + F_1(v)\, f(w, c, u) - F_1(w)\, f(c, u, v). \tag{1.2.26}$$

Smenom $x_1 = c$, $x_2 = a$, $x_3 = b$, $x_4 = u$, $x_5 = c$, $x_6 = v$, jednačina (1.2.6) svodi se na

$$f(c, a, b)\, f(u, c, v) = f(c, a, u)\, f(c, v, b) + f(c, a, v)\, f(b, u, c). \tag{1.2.27}$$

Na osnovu (1.2.24) i (1.2.25) važi

$$f(b, u, c) = f(c, b, u) = -f(u, b, c) = -f(c, u, b).$$

Uvedemo li osnake

$$F_2(u) = \frac{f(c, a, u)}{f(c, a, b)}, \quad F_3(u) = f(c, u, b), \tag{1.2.28}$$

jednačina (1.2.27) dobija oblik

$$f(u, c, v) = F_2(u)\, F_3(v) - F_2(v)\, F_3(u). \tag{1.2.29}$$

Jednačina (1.2.6) za $x_1 = x_4 = c$, $x_2 = a$, $x_3 = b$, $x_5 = u$, $x_6 = v$, uz oznake (1.2.28), daje

$$f(c, u, v) = F_2(v)\, F_3(u) - F_2(u)\, F_3(v). \tag{1.2.30}$$

Koristeći (1.2.29) i (1.2.30) jednakost (1.2.26) možemo napisati na sledeći način

$$f(u, v, w) = \Delta\, \{F_1(u),\ F_2(v),\ F_3(w)\}. \tag{1.2.31}$$

Prema tome, rešenje (1.2.31) je oblika (1.2.4).

Na osnovu svega do sada rečenog, a s obzirom da je klasa svih funkcija f baš $C_1 \cup C_2$, teorema 1.2.1. je dokazana.

1.3. Funkcionalna jednačina F_3

Pređimo sada na ispitivanje jedne funkcionalne jednačine koja generališe funkcionalnu jednačinu **F** u tom smislu što ima za opšte rešenje funkciju iste strukture kao i jednačina **F**.

Primetimo da je u ovom pravcu L. Carlitz (videti: [1]), dao jednu generalizaciju jednačine **F** za slučaj $n=2$, posmatrajući jednačinu sa nepoznatom funkcijom $f: K^3 \to K$

$$(1.3.1)\qquad f(x, y, z)\, f(u, v, w)+f(y, x, u)\, f(z, v, w) + f(x, y, v)\, f(z, u, w)+f(y, x, w)\, f(z, u, v)=0$$

čije je opšte rešenje

$$(1.3.2)\qquad f(x, y, z)=\Delta\,\{F_1(x),\ F_2(y),\ F_3(z)\}$$

$(F_i: K \to K$ $(i=1, 2, 3)$ proizvoljne funkcije).

Neka je $\theta_{i,j}$ operator koji vrši razmenu argumenata na i-tom i j-tom mestu u funkciji F, tj. neka je

$$(1.3.3)\qquad \theta_{i,j} F(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n) = F(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_{n-1}, x_n).$$

Posmatrajmo funkcionalnu jednačinu

$$(1.3.4)\qquad F(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{kn}) = \sum_{\nu=n+1}^{kn} \theta_{n,\nu} F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{kn})$$

gde je

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{kn})=\prod_{i=0}^{k-1} f(x_{ni+1}, x_{ni+2}, \ldots, x_{ni+n}) \qquad (f: K^n \to K,\ n>1),$$

koju ćemo zvati: *jednačina* $\mathbf{F}_3$.

Dokazaćemo sledeći rezultat:

Teorema 1. 3. 1. — *Opšte rešenje jednačine* $\mathbf{F}_3$ *je*

$$(1.3.5)\qquad f(u_1, u_2, \ldots, u_n)\equiv 0 \qquad \text{za } k>2,$$

$$(1.3.6)\qquad f(u_1, u_2, \ldots, u_n)=\Delta\,\{F_1(u_1),\ F_2(u_2), \ldots, F_n(u_n)\} \qquad \text{za } k=2$$

pri čemu su $F_1, F_2, \ldots, F_n: K \to K$ *proizvoljne funkcije.*

Dokaz teoreme 1.3.1. — Dokazaćemo prvo teoremu za slučaj $k>2$. Za dokaz koristićemo sledeću lemu:

Lema. — Ako je bar jedna od promenljivih $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ jednaka u_n, tada je

$$f(u_1, u_2, \ldots, u_n)\equiv 0.$$

Dokaz leme. — Neka je $E_{n-1}=\{1, 2, \ldots, n-1\}$ a S_ν jedan podskup E_{n-1} koji sadrži ν elementa $(1 \leqslant \nu \leqslant n-1)$.

Ako stavimo $x_i=u_n$ $(i=1, 2, \ldots, kn)$, iz jednačine $\mathbf{F}_3$ dobijamo

$$f(u_n, u_n, \ldots, u_n)\equiv 0.$$

Pretpostavimo da je

$$f(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, u_n) = 0,$$

gde je

$$v_i = u_n \qquad (i \in S_\nu),$$
$$= y_i \qquad (i \in E_{n-1} \setminus S_\nu).$$

Dokazaćemo da je tada i

$$f(w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{n-1}, u_n) \equiv 0 \tag{1.3.7}$$

gde je

$$w_i = u_n \qquad (i \in S_{\nu-1}),$$
$$= y_i \qquad (i \in E_{n-1} \setminus S_{\nu-1}).$$

Zamenjujući $x_{n\nu+i} = x_i$ ($\nu = 0, 1, \ldots, k-1$) u jednačini $\mathbf{F}_3$ i stavljajući zatim $x_i = w_i$, na osnovu pretpostavke dobijamo

$$\{\nu\,(k-1)-1\}\,\{f(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, u_n)\}^k = 0,$$

odakle, budući da je $k > 2$, dobijamo (1.3.7). Prema tome, lema je dokazana indukcijom.

Stavljajući $x_{\nu n+i} = u_i$ ($\nu = 0, 1, \ldots, k-1$) i vodeći računa o dokazanoj lemi, iz jednačine $\mathbf{F}_3$ dobijamo

$$(k-2)\,\{f(u_1, u_2, \ldots, u_n)\}^k = 0.$$

Budući da je $k > 2$, odavde neposredno dobijamo tvrđenje teoreme za slučaj $k > 2$.

Primer.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3)\, f(x_4, x_5, x_6)\, f(x_7, x_8, x_9) = {} & f(x_1, x_2, x_4)\, f(x_3, x_5, x_6)\, f(x_7, x_8, x_9) \\ & + f(x_1, x_2, x_5)\, f(x_4, x_3, x_6)\, f(x_7, x_8, x_9) \\ & + f(x_1, x_2, x_6)\, f(x_4, x_5, x_3)\, f(x_7, x_8, x_9) \\ & + f(x_1, x_2, x_7)\, f(x_4, x_5, x_6)\, f(x_3, x_8, x_9) \\ & + f(x_1, x_2, x_8)\, f(x_4, x_5, x_6)\, f(x_7, x_3, x_9) \\ & + f(x_1, x_2, x_9)\, f(x_4, x_5, x_6)\, f(x_7, x_8, x_3). \end{aligned}$$

Ova jednačina pripada klasi jednačina $\mathbf{F}_3$ i budući da je $k > 2$, kao opšte rešenje ima funkciju $f(u, v, w) = 0$. Stavljajući $x_1 = x_4 = x_7 = u$, $x_2 = x_5 = x_8 = v$, $x_3 = x_6 = x_9 = w$, iz ove jednačine dobijamo

$$\begin{aligned} f^3(u, v, w) = {} & 2 f(u, v, u)\, f(w, v, w)\, f(u, v, w) \\ & + 2 f(u, v, v)\, f(u, w, w)\, f(u, v, w) \\ & + 2 f(u, v, w)\, f(u, v, w)\, f(u, v, w). \end{aligned}$$

Poslednja jednakost za $v = w$, budući da je $f(x, x, x) = 0$, daje $f(u, w, w) = 0$, a za $u = w$, $f(w, v, w) = 0$, tako da je zaista $f \equiv 0$.

Pređimo sada na dokaz teoreme za slučaj $k = 2$ (videti: [9] i [10]). U ovom slučaju jednačina $\mathbf{F}_3$ glasi

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)\, f(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n}) \\ & = f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1})\, f(x_n, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots, x_{2n}) \\ & \quad + f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+2})\, f(x_{n+1}, x_n, x_{n+3}, \ldots, x_{2n}) \\ & \quad + \cdots \\ & \quad + f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{2n})\, f(x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n-1}, x_n). \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

Za dokaz teoreme u slučaju $k=2$, koristićemo sledeću lemu:

L e m a. — *Ako su $a_1, a_2, \ldots, a_n \in K$ takvi brojevi da je*

$$f(a_1, a_1, \ldots, a_n) \neq 0,$$

važi jednakost

$$f(a_n, u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}, a_n) \equiv 0. \tag{1.3.9}$$

Dokaz leme. — Stavljajući

$$x_i = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$x_{n+1} = x_{2n} = a_n, \quad x_j = u_{j-n-1} \qquad (j = n+2, n+3, \ldots, 2n-1),$$

jednačina (1.3.7) postaje

$$\begin{aligned}
(1.3.10) \qquad & f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)\, f(a_n, u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}, a_n) \\
& + f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, u_1)\, f(a_n, a_n, u_2, \ldots, u_{n-2}, a_n) \\
& + f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, u_2)\, f(a_n, u_1, a_n, u_3, \ldots, u_{n-2}, a_n) \\
& + \cdots \\
& + f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, u_{n-2})\, f(a_n, u_1, \ldots, u_{n-3}, a_n, a_n) = 0.
\end{aligned}$$

Neka je $E_{n-2} = \{1, 2, 3, \ldots, n-2\}$ a S_ν $(0 < \nu \leqslant n-2)$ jedan podskup skupa E_{n-2} koji sadrži ν elemenata. Za $\nu = n-2$ imamo $S_{n-2} = E_{n-2}$. Smenjujući u jednačini (1.3.8) sve promenljive sa a_n, dobijamo

$$f(a_n, a_n, \ldots, a_n, a_n) = 0. \tag{1.3.11}$$

Pretpostavimo da važi

$$f(a_n, v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}, a_n) = 0 \tag{1.3.12}$$

gde je

$$\begin{aligned}
(1.3.13) \qquad v_i &= a_n \qquad (i \in S_\nu), \\
&= y_i \qquad (i \in E_{n-2} \setminus S_\nu).
\end{aligned}$$

Pod ovom pretpostavkom dokazaćemo da je

$$f(a_n, w_1, w_2, \ldots, w_{n-2}, a_n) = 0, \tag{1.3.14}$$

gde je

$$\begin{aligned}
(1.3.15) \qquad w_i &= a_n \qquad (i \in S_{\nu-1}), \\
&= y_i \qquad (i \in E_{n-2} \setminus S_{\nu-1}).
\end{aligned}$$

Zamenjujući u jednačini (1.3.10) $u_i = w_i$, na osnovu hipoteze (1.3.12) dobijamo

$$\nu f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)\, f(a_n, w_1, w_2, \ldots, w_{n-2}, a_n) = 0.$$

Odavde dobijamo da je

$$f(a_n, w_1, w_2, \ldots, w_{n-2}, a_n) = 0,$$

ako je hipoteza (1.3.12) tačna.

Prema tome, indukcijom smo dokazali da je

$$f(a_n, u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, a_n) \equiv 0$$

ako je tačno $\nu\,(0 \leqslant \nu \leqslant n-2)$ elemenata između $u_1, u_2, \dots, u_{n-2}$ jednako sa a_n.

Za $\nu = 0$, dobijamo lemu.

Koristeći dokazanu lemu, dokazaćemo indukcijom teoremu za $k = 2$.

U slučaju $n = 2$, jednačina (1.3.7) ima sledeći oblik

$$(1.3.16) \qquad f(x_1, x_2)\, f(x_3, x_4) = f(x_1, x_3)\, f(x_2, x_4) + f(x_1, x_4)\, f(x_3, x_2).$$

Za svako netrivijalno rešenje jednačine (1.3.16) postoji najmanje jedan par brojeva (a, b) $(a, b \in K)$ takvih da je $f(a, b) \neq 0$.

Ako stavimo $x_1 = a$, $x_3 = b$, $x_2 = u_1$, $x_4 = u_2$, iz jednačine (1.3.7) dobijamo

$$f(u_1, u_2) = \frac{f(a, u_1)}{f(a, b)}\, f(b, u_2) - \frac{f(a, u_2)}{f(a, b)}\, f(b, u_1).$$

Ako ovde stavimo

$$\frac{f(a, u_1)}{f(a, b)} = F_1(u_1), \quad f(b, u_1) = F_2(u_1),$$

dobijamo da je funkcija

$$f(u_1, u_2) = \Delta\,\{F_1(u_1), F_2(u_2)\},$$

opšte rešenje jednačine (1.3.8) u slučaju $n = 2$, jer obuhvata i trivijalno rešenje $f(x, y) \equiv 0$.

Pretpostavimo da je teorema tačna za $n-1$, tj. da je opšte rešenje funkcionalne jednačine

$$(1.3.17) \qquad \begin{aligned} & f(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1})\, f(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n}) \\ &= f(x_1, \dots, x_{n-2}, x_n)\, f(x_{n-1}, x_{n+1}, \dots, x_{2n-2}) \\ &\quad + f(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n+1})\, f(x_n, x_{n-1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n-2}) + \cdots \\ &\quad + f(x_1, \dots, x_{n-2}, x_{2n-2})\, f(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{2n-3}, x_{n-1}) \end{aligned}$$

dato sledećom formulom

$$(1.3.18) \qquad f(u_1, u_2, \dots, u_{n-1}) = \Delta\,\{F_1(u_1), F_2(u_2), \dots, F_{n-1}(u_{n-1})\}.$$

Neka je $f(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$. Ako stavimo

$$x_1 = a_n, \quad x_{n+1} = a_n;$$

$$f(a_n, x_2, x_3, \dots, x_n) = F(x_2, x_3, \dots, x_n) \qquad (f: K^n \to K,\ F: K^{n-1} \to K),$$

jednačina (1.3.8), na osnovu dokazane leme, postaje

$$(1.3.19) \qquad \begin{aligned} & F(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n)\, F(x_{n+2}, x_{n+3}, \dots, x_{2n}) \\ &= F(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_{n+2})\, F(x_n, x_{n+3}, \dots, x_{2n}) \\ &\quad + F(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_{n+3})\, F(x_{n+2}, x_n, x_{n+4}, \dots, x_{2n}) \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + F(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_{2n})\, F(x_{n+2}, x_{n+3}, \dots, x_{2n-1}, x_n). \end{aligned}$$

Prema (1.3.17) i (1.3.18) dobijamo da je opšte rešenje jednačine (1.3.19)

$$(1.3.20)\qquad \begin{aligned} F(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) &= f(a_n, u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) \\ &= \Delta\,\{F_1(u_1), F_2(u_2), \ldots, F_{n-1}(u_{n-1})\}, \end{aligned}$$

gde su $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}: K \to K$ proizvoljne funkcije.

Stavljajući u jednačini (1.3.8)

$$x_i = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$x_n = u_1, \; x_{n+1} = a_n, \; x_{n+k} = u_k \qquad (k = 2, 3, \ldots, n)$$

dobijamo

$$(1.3.21)\qquad \begin{aligned} f(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)\, f(u_1, u_2, \ldots, u_n) &= f(a_1, \ldots, a_{n-1}, u_1)\, f(a_n, u_2, \ldots, u_n) \\ &\quad - f(a_1, \ldots, a_{n-1}, u_2)\, f(a_n, u_1, u_3, \ldots, u_n) - \cdots \\ &\quad - f(a_1, \ldots, a_{n-1}, u_n)\, f(a_n, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_1). \end{aligned}$$

Na osnovu (1.3.20) dolazimo do jednakosti

$$(1.3.22)\qquad \begin{aligned} & f(a_n, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_j, u_{j+1}, \ldots, u_{n-1}) \\ &= -f(a_n, \ldots, u_{i-1}, u_j, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, u_i, u_{j+1}, \ldots, u_{n-1}) \\ & \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant n-1). \end{aligned}$$

Koristeći (1.3.20) i (1.3.21), uz notaciju

$$\frac{f(a_1, \ldots, a_{n-1}, u)}{f(a_1, \ldots, a_n)} = F_n(u),$$

dobijamo da je $f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ oblika (1.3.6).

Ostaje još da pokažemo da je svaka funkcija oblika (1.3.5) zaista rešenje jednačine (1.3.1). U tom cilju posmatrajmo sledeći identitet

$$\begin{vmatrix} F_1(x_1) & F_2(x_1) & \ldots & F_n(x_1) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ F_1(x_2) & F_2(x_2) & & F_n(x_2) & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ F_1(x_{n-1}) & F_2(x_{n-1}) & & F_n(x_{n-1}) & 0 & 0 & & 0 \\ F_1(x_n) & F_2(x_n) & & F_n(x_n) & F_1(x_n) & F_2(x_n) & & F_n(x_n) \\ F_1(x_{n+1}) & F_2(x_{n+1}) & & F_n(x_{n+1}) & F_1(x_{n+1}) & F_2(x_{n+1}) & & F_n(x_{n+1}) \\ \vdots & & & & & & & \\ F_1(x_{2n}) & F_2(x_{2n}) & & F_n(x_{2n}) & F_1(x_{2n}) & F_2(x_{2n}) & & F_n(x_{2n}) \end{vmatrix} = 0.$$

Razvijajući po Laplaceovom pravilu determinantu na levoj strani ovog identiteta, pokazuje se da je funkcija (1.3.6) zaista rešenje funkcionalne jednačine $\mathbf{F}_3$.

Ovim je dokaz teoreme završen.

Za $n = 2$, jednačina $\mathbf{F}_3$, na osnovu osobine $f(u, v) = -f(v, u)$ svodi se na jednačinu $\mathbf{F}$.

Za $n=3$, jednačina (1.3.8) ima oblik

$$(1.3.23)\qquad \begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3)\, f(x_4, x_5, x_6) = &\ f(x_1, x_2, x_4)\, f(x_3, x_5, x_6) \\ &+ f(x_1, x_2, x_5)\, f(x_4, x_3, x_6) \\ &+ f(x_1, x_2, x_6)\, f(x_4, x_5, x_3). \end{aligned}$$

Budući da je $f(u, v, w) = -f(u, w, v)$ i $f(u, v, w) = -f(v, u, w)$, jednačina (1.3.23) može se svesti na jednačinu (1.3.1).

Vratimo se sada jednačini $\mathbf{F}_2$.

Označimo sa C_3 klasu svih funkcija f koje imaju osobinu

$$(1.3.24)\qquad \begin{aligned} &f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ &= -f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ &\qquad (1 \leqslant i < j \leqslant n). \end{aligned}$$

T e o r e m a 1. 3. 2. — *Opšte rešenje jednačine* $\mathbf{F}_2$ *u klasi funkcija* C_3 (*sve funkcije* $f: K^n \to K$ *koje imaju osobinu* (1.3.23)) *je*

$$(1.3.25)\qquad f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \Delta\{F_1(u_1), F_2(u_2), \dots, F_n(u_n)\},$$

gde su $F_i: K \to K$ *proizvoljne funkcije.*

Dokaz teoreme 1.3.2. — Funkcija (1.3.25) je zaista jedno rešenje funkcionalne jednačine $\mathbf{F}_2$, kao što smo to ranije konstatovali. Budući da se jednačina $\mathbf{F}_2$ u klasi funkcija C_3 može napisati u obliku (1.3.8) i da je opšte rešenje funkcionalne jednačine (1.3.8) baš funkcija (1.3.25), teorema je dokazana.

Primetimo da u klasi C_3 za $n=3$, jednačinu $\mathbf{F}_2$ možemo napisati u obliku

$$(1.3.26)\qquad \begin{aligned} &f(x_1, x_2, x_3)\, f(x_4, x_5, x_6) + f(x_2, x_1, x_4)\, f(x_3, x_5, x_6) \\ &+ f(x_1, x_2, x_5)\, f(x_3, x_4, x_6) + f(x_2, x_1, x_6)\, f(x_3, x_4, x_5) = 0. \end{aligned}$$

Jednačina (1.3.26) je baš jednačina (1.3.1). Međutim, valja primetiti da opšte rešenje jednačine (1.3.26) samo jedno partikularno rešenje jednačine $\mathbf{F}_2$ kada je $n=3$.

2. JEDNA KLASA KVADRATNIH CIKLIČNIH FUNKCIONALNIH JEDNAČINA

2.1. Funkcionalna jednačina $\mathbf{F}_4$

Funkcionalnu jednačinu

$$F(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) + F(x_0, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) + \cdots + F(x_0, x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}) = 0, \tag{2.1.1}$$

gde je

$$F(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{\nu_1}, x_{\nu_2})\, f(x_{\nu_3}, x_{\nu_4}) \tag{2.1.2}$$

($f: K^2 \to K$; ν_i međusobno različiti celi negativni brojevi $\leqslant n$)

zvaćemo: *jednačina* $\mathbf{F}_4$.

Posmatraćemo prvo slučaj kada je $\nu_1 = 0$. Jasno je da su ovim obuhvaćeni i slučajevi kada je umesto ν_1 bilo koji drugi od indeksa $\nu_i = 0$. U slučaju $\nu_1 = 0$, funkcija (2.1.2) glasi

$$F(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_0, x_p)\, f(x_q, x_r) \tag{2.1.3}$$

pri čemu smo stavili $\nu_2 = p$, $\nu_3 = q$, $\nu_4 = r$.

Za ovaj slučaj važi sledeća teorema:

Teorema 2. 1. 1. — *Opšte rešenje funkcionalne jednačine* (2.1.1), *uz uslov* (2.1.3), *je:*

$$f(u, v) = g(u)\, h(v) - g(v)\, h(u) \qquad (g, h: K \to K \text{ proizvoljne funkcije}) \tag{2.1.4}$$

u slučaju kada p, q, r, n *zadovoljavaju jedan od sledećih šest uslova:*

1°	$2p = q + r - p$,	$2n = 3r - 3p$	$(p < q < r)$;
2°	$2p = q + r + n$,	$n = 3p - 3r$	$(q < r < p)$;
3°	$2p = q + r$,	$n = 3p - 3r$	$(r < p < q)$;
4°	$2p = q + r - n$,	$n = 3r - 3p$	$(p < r < q)$;
5°	$2p = q + r$,	$n = 3r - 3p$	$(q < p < r)$;
6°	$2p = q + r + n$,	$2n = 3p - 3r$	$(r < q < p)$.

$$f(u, v) = g(v) - g(u) \qquad (g: K \to K \text{ proizvoljna funkcija}) \tag{2.1.5}$$

kada je zadovoljen jedan od sledečih šest uslova:

$$
\begin{array}{llll}
7^\circ & 2p=q+r-n, & 2n\neq 3r-3p & (p<q<r);\\
8^\circ & 2p=q+r+n, & n\neq 3p-3r & (q<r<p);\\
9^\circ & 2p=q+r, & n\neq 3p-3r & (r<p<q);\\
10^\circ & 2p=q+r-n, & n\neq 3r-3p & (p<r<q);\\
11^\circ & 2p=q+r, & n\neq 3r-3p & (q<p<r);\\
12^\circ & 2p=q+r+n, & 2n\neq 3p-3r & (r<q<p).
\end{array}
$$

(2.1.6) $$f(u, v)\equiv 0$$

u svim ostalim slučajevima.

Dokaz teoreme 2.1.1. — Između parametara p, q, r može postojati jedan od sledećih odnosa:

1° $p<q<r$, 2° $p<r<q$, 3° $q<p<r$, 4° $q<r<p$, 5° $r<p<q$, 6° $r<q<p$.

U slučajevima 1°, 4°, 5° stavimo

(2.1.7) $$F(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)=G(x_0, x_{1+r}, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_r);$$

$$x_0=u_0, \quad x_i=u_{n-r+i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

pri čemu je $x_{j+n}=x_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$. Tada iz (2.1.1) dobijamo

(2.1.8) $$G(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n)+G(u_0, u_2, u_3, \ldots, u_n, u_1) + \cdots + G(u_0, u_n, u_1, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1})=0,$$

a iz (2.1.3)

(2.1.9)
$$
\begin{aligned}
G(u_0, u_1, \ldots, u_n) &= f(u_0, u_{n+p-r})\, f(u_{n+q-r}, u_n) && (p<q<r),\\
&= f(u_0, u_{p-r})\, f(u_{n+q-r}, u_n) && (q<r<p),\\
&= f(u_0, u_{p-r})\, f(u_{q-r}, u_n) && (r<p<q).
\end{aligned}
$$

U slučajevima 2°, 3°, 6° stavimo

(2.1.10) $$F(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)=G(x_0, x_{r-1}, x_{r-2}, \ldots, x_1, x_n, \ldots, x_r),$$

$$x_0=u_0, \quad x_i=u_{n+r-i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

pri čemu je $x_{j+n}=x_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$. Jednačina (2.1.1) svodi se tada na jednačinu (2.1.8), dok funkcija (2.1.3) postaje

(2.1.11)
$$
\begin{aligned}
G(u_0, u_1, \ldots, u_n) &= f(u_0, u_{r-p})\, f(u_{n+r-q}, u_n) && (p<r<q),\\
&= f(u_0, u_{r-p})\, f(u_{r-q}, u_n) && (q<p<r),\\
&= f(u_0, u_{n+r-p})\, f(u_{n+r-q}, u_n) && (r<q<p).
\end{aligned}
$$

U funkcijama (2.1.9) i (2.1.11) promenljive x_i $(i=0, 1, \ldots, n)$ uređene su po rastućim indeksima. Prema tome, dovoljno je posmatrati funkcionalnu jednačinu

(2.1.12) $$G(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n)+G(u_0, u_2, u_3, \ldots, u_n, u_1) + \cdots + G(u_0, u_n, u_1, \ldots, u_{n-2}, u_{n-1})=0,$$

gde je

(2.1.13) $$G(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n)=f(u_0, u_k)\, f(u_m, u_n) \qquad (0<k<m<n).$$

Jednačinu (2.1.12) sa uslovom (2.1.13) zvaćemo: *jednačina* $\mathbf{F}_4'$.

Stavljajući $u_\nu = u$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n$), jednačina $\mathbf{F}_4'$ svodi se na

(2.1.14) $$f(u, u) \equiv 0.$$

Ako stavimo $u_\nu = x$ za sve vrednosti indeksa ν osim za k, m, n kao i

$$u_k = y, \quad u_m = u, \quad u_n = v,$$

jednačina $\mathbf{F}_4'$ postaje

(2.1.15) $$f(x, y)\, f(u, v) + f(x, u)\, f(u_{2m-k}, u_{m-k}) + f(x, v)\, f(u_{m-k}, u_{n-k}) = 0$$

gde je $x_j = x_{j-n}$ za $j > n$. U jednačini (2.1.15) u_{2m-k}, u_{m-k}, u_{n-k} jednake su x, ili imaju neku vrednost iz sledeće tabele

u_{2m-k}	u_{m-k}	u_{n-k}
y	y	y
v		u

Tako, na primer, ne može biti $u_{2m-k} = u$ jer bi u jednačini (2.1.15) postojao sabirak $f(x, u)\, f(u, u_{m-k})$, što je s obzirom na učinjenu smenu, nemoguće.

Kada je $u_{2m-k} = u_{m-k} = u_{n-k} = x$, jednačina (2.1.15), na osnovu (2.1.14), svodi se na

$$f(x, y)\, f(u, v) = 0.$$

Za $x = u$, $y = v$ odavde dobijamo $f^2(u, v) = 0$, pa u ovom slučaju postoji samo trivijalno rešenje

(2.1.16) $$f(u, v) \equiv 0.$$

Razmotrićemo sve slučajeve kada se u jednačini (2.1.15) pored člana $f(x, y)\, f(u, v)$ ne anulira bar još jedan sabirak.

2.1.1. $u_{2m-k} = y$.

Ovo će biti ako i samo ako je $n = 2m - 2k$. Jednačina (2.1.15) tada postaje

(2.1.17) $$f(x, y)\, f(u, v) + f(x, u)\, f(y, u_{m-k}) + f(x, v)\, f(u_{m-k}, u_{2m-3k}) = 0.$$

Na osnovu drugog sabirka ove jednačine, vodeći računa o uslovu $0 < k < m < 2m - 2k$, zaključuje se da je $u_{m-k} = x$. Prema tome, jednačina (2.1.17) dobija oblik

(2.1.18) $$f(x, y)\, f(u, v) + f(x, u)\, f(y, x) + f(x, v)\, f(x, u_{2m-3k}) = 0.$$

Ispitajmo sve moguće vrednosti

(2.1.1.1) $$u_{2m-3k} = y \quad \Rightarrow \quad m = n = 2k;$$

(2.1.1.2) $$u_{2m-3k} = u \quad \Rightarrow \quad m = 3k, \; n = 4k,$$

koje u_{2m-3k} može dobiti.

Slučaj (2.1.1.1), zbog pretpostavke, $0 < k < m < n$, ne dolazi u obzir.

U slučaju $m = 3k$, $n = 4k$, jednačina (2.1.18) glasi

(2.1.19) $$f(x, y)\, f(u, v) + f(x, u)\, f(y, x) + f(x, v)\, f(x, u) = 0.$$

Ako je $n = 2m - 2k$ i $m \neq 3k$, jednačina (2.1.18) glasi

(2.1.20) $$f(x, y)\, f(u, v) + f(x, u)\, f(y, x) = 0.$$

2.1.2. $u_{2m-k}=v$.

Ovaj slučaj nastupa tada i samo tada kada je $n=2m-k$ i u tom slučaju jednačina (2.1.15) glasi

$$f(x, y)\, f(u, v)+f(x, u)\, f(v, u_{m-k})+f(x, v)\, f(u_{m-k}, u_{2m-2k})=0. \tag{2.1.21}$$

Mogu nastupiti slučajevi:

(2.1.2.1) $u_{m-k}=y \Rightarrow m=2k,\ n=3k;$

(2.1.2.2) $u_{2m-2k}=y \Rightarrow m=\frac{3}{2}k,\ n=2k;$

(2.1.2.3) $u_{2m-2k}=u \Rightarrow m=2k,\ n=3k.$

Kada je (2.1.2.1) i (2.1.2.3) jednačina (2.1.21) svodi se na sledeću jednačinu

$$f(x, y)\, f(u, v)+f(x, u)\, f(v, y)+f(x, v)\, f(y, u)=0. \tag{2.1.22}$$

U slučaju (2.1.2.2), budući da su k, m, n prirodni brojevi, mora postojati jedan prirodan broj ν takav da je $k=2\nu$, $m=3\nu$, $n=4\nu$. Tada je $u_\nu=x$ jer bi u protivnom morala da važi jedna od jednakosti: $\nu=2\nu$, $\nu=3\nu$, $\nu=4\nu$, što je nemoguće.

Prema tome, jednačina (2.1.21) u ovom slučaju glasi

$$f(x, y)\, f(u, v)+f(x, u)\, f(v, x)+f(x, v)\, f(x, y)=0. \tag{2.1.23}$$

Ako je $n=2m-k$ i $n\neq 2k$, $n\neq 3k$, jednačina (2.1.21) svodi se na

$$f(x, y)\, f(u, v)+f(x, u)\, f(v, x)=0. \tag{2.1.24}$$

2.1.3. $u_{m-k}=y$.

Kako u ovom slučaju mora biti $m=2k$, jednačina (2.1.15) glasi

$$f(x, y)\, f(u, v)+f(x, u)\, f(u_{3k}, y)+f(x, v)\, f(y, u_{n-k})=0. \tag{2.1.25}$$

Potrebno je ispitati samo

(2.1.3.1) $u_{3k}=v \Rightarrow m=2k,\ n=3k;$

(2.1.3.2) $u_{n-k}=u \Rightarrow m=2k,\ n=3k,$

jer se iz (2.1.25) vidi da ne može biti $u_{3k}=y$, niti $u_{n-k}=y$.

Oba puta jednačina (2.1.25) svodi se na jednačinu (2.1.22).

Ako je $m=2k$, $n\neq 3k$, jednačina (2.1.25) ima oblik

$$f(x, y)\, f(u, v)+f(x, u)\, f(x, y)+f(x, v)\, f(y, x)=0. \tag{2.1.26}$$

2.1.4. $u_{n-k}=y$.

Ovaj slučaj nastupa samo tada ako je $n=2k$, pa jednačina (2.1.15) postaje

$$f(x, y)\, f(u, v)+f(x, u)\, f(u_{2m-k}, u_{m-k})+f(x, v)\, f(u_{m-k}, y)=0. \tag{2.1.27}$$

Potrebno je ispitati sledeće slučajeve:

(2.1.4.1) $u_{2m-k}=y \Rightarrow m=n=2k;$

(2.1.4.2) $u_{2m-k}=v \Rightarrow m=\frac{3}{2}k,\ n=2k.$

Slučaj (2.1.4.1) ne dolazi u obzir. Kada je (2.1.4.2) jednačina (2.1.15) svodi se na jednačinu (2.1.23).

Ako je $n=2k$ i $m\neq\frac{3}{2}k$, jednačina (2.1.27) glasi

(2.1.28) $$f(x, y)\, f(u, v)+f(x, v)\, f(x, y)=0.$$

2.1.5. $u_{n-k}=u$.

Ovaj slučaj nastupiće samo ako je $n=k+m$. Tada, iz (2.1.15) dobijamo

(2.1.29) $$f(x, y)\, f(u, v)+f(x, u)\, f(u_{2m-k}, u_{m-k})+f(x, v)\, f(u_{m-k}, u)=0.$$

Moramo analizirati sledeće slučajeve

(2.1.5.1) $$u_{2m-k}=y \quad\Rightarrow\quad m=3k,\ n=4k;$$

(2.1.5.2) $$u_{2m-k}=v \quad\Rightarrow\quad m=2k,\ n=3k;$$

(2.1.5.3) $$u_{m-k}=y \quad\Rightarrow\quad m=2k,\ n=3k.$$

Ako je (2.1.5.1) jednačina (2.1.29) svodi se na jednačinu (2.1.19), a ako je (2.1.5.2) i (2.1.5.3) na jednačinu (2.1.22).

Kada je $n=k+m$ i $m\neq 3k$, $m\neq 2k$, jednačina (2.1.29) glasi

(2.1.30) $$f(x, y)\, f(u, v)+f(x, v)\, f(x, u)=0.$$

Prema tome, da bismo rešili jednačinu $\mathbf{F}_4'$ za različite vrednosti k, m, n moramo rešiti sledeće jednačine: (2.1.19), (2.1.20), (2.1.22), (2.1.23), (2.1.24), (2.1.26), (2.1.28), (2.1.30).

Jednačine (2.1.19), (2.1.20), (2.1.23), (2.1.24), (2.1.28), (2.1.30).

Stavljajući $x=u$, $y=v$ i vodeći računa o jednakosti (2.1.14) sve ove jednačine svode se na

$$f^2(u, v)=0,$$

tako da je opšte rešenje u ovim slučajevima

(2.1.31) $$f(u, v)\equiv 0.$$

Jednačina (2.1.22).

Na osnovu teoreme 1.1.1., opšte rešenje ove jednačine je

(2.1.32) $$f(u, v)=g(u)\, h(v)-g(v)\, h(u),$$

gde su g, $h: K\to K$ proizvoljne funkcije.

Jednačina (2.1.26).

Za svako netrivijalno rešenje ove jednačine postoji bar jedan par kompleksnih brojeva (a, b) takav da je $f(a, b)\neq 0$.

Za $x=v=a$, $y=b$ iz (2.1.26) proizilazili

(2.1.33) $$f(a, u)=-f(u, a).$$

Stavljajući $x=a$, $y=b$ iz (2.1.26), na osnovu (2.1.33), sleduje

(2.1.34) $$f(u, v)=f(a, v)-f(a, u).$$

Uvodeći oznaku $g(u)=f(a, u)$, jednakost (2.1.34) postaje

$$f(u, v)=g(v)-g(u). \tag{2.1.35}$$

Budući da je funkcija (2.1.35) zaista rešenje jednačine (2.1.26), opšte rešenje ove jednačine ima oblik (2.1.35), gde je $g: K \to K$ proizvoljna funkcija.

Na osnovu svega do sada rečenog, proizilazi sledeći rezultat:

Opšte rešenje funkcionalne jednačine $\mathbf{F}_4'$ *je:*

$$\begin{aligned} f(u, v) &= g(u)\, h(v)-g(v)\, h(u) && (m=2k,\ n=3k), \\ &= g(v)-g(u) && (m=2k,\ n \neq 3k), \\ &= 0 && (\textit{u svim ostalim slučajevima}) \end{aligned} \tag{2.1.36}$$

gde su $g, h: K \to K$ *proizvoljne funkcije.*

Na osnovu smena (2.1.7) i (2.1.10) i dobijenog rezultata direktno proizilazi teorema 2.1.1.

Primer. Navedimo prvo nekoliko primera funkcionalnih jednačina iz klase jednačina F_4 koje kao opšte rešenje imaju funkciju:

$$f(u, v)=g(u)\, h(v)-g(v)\, h(u). \tag{1}$$

Funkcionalna jednačina

$$\begin{aligned} F(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n) &+ F(x_0, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1) \\ &+ \cdots + F(x_0, x_n, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1})=0 \end{aligned}$$

pri čemu je

$$F(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)=f(x_0, x_p)\, f(x_q, x_r)$$

ima kao opšte rešenje gornju funkciju ako je, na primer,

1° $p=1,\ q=3,\ r=5,\ n=6$; 2° $p=7,\ q=1,\ r=4,\ n=9$;

3° $p=4,\ q=6,\ r=2,\ n=6$; 4° $p=3,\ q=5,\ r=1,\ n=12$;

5° $p=5,\ q=1,\ r=9,\ n=12$; 6° $p=8,\ q=5,\ r=2,\ n=9$,

Dokažimo ovo u slučaju kada je $p=4,\ q=6,\ r=2,\ n=6$; tada posmatrana jednačina glasi:

$$\begin{aligned} f(x_0, x_4)\, f(x_6, x_2) &+ f(x_0, x_5)\, f(x_1, x_3) + f(x_0, x_6)\, f(x_2, x_4) \\ &+ f(x_0, x_1)\, f(x_3, x_5) + f(x_0, x_2)\, f(x_4, x_6) + f(x_0, x_3)\, f(x_5, x_1)=0. \end{aligned}$$

Stavljajući $x_4=b,\ x_6=u,\ x_2=v$ i zamenjujući sve preostale promenljive sa a iz poslednje jednačine nalazimo

$$f(a, b)\, f(u, v)+f(a, u)\, f(v, b)+f(a, v)\, f(b, u)=0$$

a ovo je jednačina $\mathbf{F}$ čije je opšte rešenje funkcija (1).

Posmatrana funkcionalna jednačina imaće kao opšte rešenje funkciju

$$f(u, v)=g(v)-g(u),$$

ako je, na primer,

1° $p=1,\ q=3,\ r=4,\ n=5$; 2° $p=6,\ q=2,\ r=3,\ n=7$;

3° $p=5,\ q=9,\ r=1,\ n=10$; 4° $p=1,\ q=6,\ r=4,\ n=8$;

5° $p=5,\ q=2,\ r=8,\ n=10$; 6° $p=5,\ q=3,\ r=2,\ n=5$.

Dokažimo ovo na slučaju 6°. Jednačina tada glasi

$$\begin{aligned} f(x_0, x_5)\, f(x_3, x_2) &+ f(x_0, x_1)\, f(x_4, x_3) \\ &+ f(x_0, x_2)\, f(x_5, x_4) + f(x_0, x_3)\, f(x_1, x_5) + f(x_0, x_4)\, f(x_2, x_1)=0. \end{aligned}$$

Stavljajući $x_5 = b$, $x_3 = u$, $x_2 = v$ i zamenjujući sve ostale promenljive sa a, dobijamo

$$f(a, b) f(u, v) + f(a, v) f(b, a) + f(a, u) f(a, b) = 0.$$

Za $u = a$, $v = b$ odavde dobijamo $f(a, b) = -f(b, a)$, tako da je opšte rešenje funkcija

$$f(u, v) = g(v) - g(u)$$

gde smo stavili $f(a, u) = g(u)$.

Posmatrana funkcionalna jednačina imaće kao opšte rešenje funkciju $f(x, y) = 0$ ako je na primer $p = 1$, $q = 2$, $r = 4$, $n = 5$. Tada jednačina glasi

$$f(x_0, x_1) f(x_2, x_4) + f(x_0, x_2) f(x_3, x_5) + f(x_0, x_3) f(x_4, x_1)$$
$$+ f(x_0, x_4) f(x_5, x_2) + f(x_0, x_5) f(x_1, x_3) = 0.$$

Stavljajući $x_0 = x_1 = x_3 = x_4 = u$, $x_2 = x_5 = v$, zaista dobijamo $f^2(u, v) = 0 \Rightarrow f(u, v) = 0$.

Pređimo sada na analizu jednačine $\mathbf{F}_4$ za slučaj kada je u (2.1.2) $\nu_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Cikličnim permutovanjem promenljivih možemo umesto funkcije (2.1.2) posmatrati sledeću funkciju

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, x_p) f(x_q, x_r) \tag{2.1.37}$$

$(p, q, r$ međusobno različiti prirodni brojevi $\leqslant n)$.

Na jednačinu (2.1.1) u slučaju kada je funkcija F data formulom (2.1.37) može se primeniti isti postupak koji je primenjen pri rešavanju te jednačine u slučaju kada je F bilo dato formulom (2.1.3). Međutim, sam postupak bi bio neuporedivo duži. Naime, u slučaju kada je funkcija F bila data formulom (2.1.3), u diskusiji pri rešavanju učestvovala su samo tri parametra, a osim toga, indeksi promenljivih bili su uređeni po veličini; u ovom slučaju u diskusiji se pojavljuju četiri parametra a indeksi nisu uređeni po veličini. Zbog toga u ovom slučaju jednačinu $\mathbf{F}_4$ posmatraćemo sa jednog drugog stanovišta.

Pre svega, u daljem ograničićemo se na slučaj kada je

$$f: R^2 \rightarrow R.$$

2.2. Funkcionalna jednačina $\mathbf{F}_5$

Funkcionalnu jednačinu $\mathbf{F}_4$ u specijalnom slučaju kada je funkcija F data formulom (2.1.37) i kada je $f: R^2 \rightarrow R$, zvaćemo funkcionalna *jednačina* $\mathbf{F}_5$.

Jednačinu $\mathbf{F}_5$ nećemo rešavati u opštem slučaju, već ćemo samo vršiti ispitivanja kada ova jednačina ima i netrivijalnih rešenja. Pri tome, daćemo neke potrebne uslove da ova jednačina pored trivijalnih ima i drugih rešenja. Zatim, postavićemo jednu hipotezu o tome kada ova jednačina ima i netrivijalnih rešenja.

Stavljajući $x_p = x_r = v$ i zamenjujući sve ostale promenljive sa u, jednačina $\mathbf{F}_5$ svodi se, budući da je $f(u, u) \equiv 0$, na

$$f^2(u, v) + f(v, x_{2p-1}) f(x_{p+q-1}, x_{p+r-1}) \tag{2.2.1}$$
$$+ f(v, x_{p+r-1}) f(x_{q+r-1}, x_{2r-1}) + f(x_{\alpha_1}, v) f(x_{\alpha_2}, x_{\alpha_3}) = 0,$$

gde je

$\alpha_1 = r - p + 1 \; (r - p + 1 > 0)$, $\quad \alpha_2 = r + q - p \; (r + q - p > 0)$, $\quad \alpha_3 = 2r - p \; (2r - p > 0)$,

$= n + r - p + 1 \; (r - p + 1 \leqslant 0)$, $\quad = n + q + r - p \; (r + q - p \leqslant 0)$, $\quad = n + 2r - p \; (2r - p \leqslant 0)$, Jednačinu (2.2.1) možemo napisati u obliku

$$Af^2(u, v) + Bf(u, v)\, f(v, u) + Cf^2(v, u) = 0 \tag{2.2.2}$$

pri čemu su A, B, C ($A \neq 0$) celi nenegativni brojevi takvi da je $1 \leqslant A + B + C \leqslant 4$.

Permutujući u i v u jednačini (2.2.2), dobijamo

$$Af^2(v, u) + Bf(u, v)\, f(v, u) + Cf^2(u, v) = 0. \tag{2.2.3}$$

Ako je $B = 0$, budući da je A, $C > 0$ i $f: R^2 \to R$, iz (2.2.2) dobijamo

$$f(u, v) \equiv 0. \tag{2.2.4}$$

Ako je $C = 0$, $B \neq 0$ ($B \neq A$), pretpostavljajući da postoji par brojeva (a, b) ($a, b \in R$) takav da je $f(a, b) \neq 0$, iz (2.2.2) i (2.2.3) dobijamo

$$A\, f^2(a, b) + B\, f(a, b)\, f(b, a) = 0,$$

$$A\, f^2(b, a) + B\, f(a, b)\, f(b, a) = 0.$$

Rešavanjem ovog sistema, dobijamo $f(a, b) = f(b, a) = 0$, što se protivi učinjenoj pretpostavci $f(a, b) \neq 0$. Prema tome, i u ovom slučaju imamo (2.2.4).

Ispitajmo sada slučaj A, B, $C \neq 0$. Ako je $A = B = C = 1$, pretpostavljajući da je $f(a, b) \neq 0$, iz (2.2.2) i (2.2.3) dobijamo

$$f^2(a, b) + f(a, b)\, f(b, a) + f^2(b, a) = 0,$$

a ova jednačina nema realnih rešenja po $f(a, b)$, tako da je $f(a, b) = f(b, a) = 0$, pa opet imamo (2.2.4). Isti rezultat dobija se i u slučajevima $A = 2$, $B = C = 1$ i $A = B = 1$, $C = 2$.

Pređimo na analizu slučaja kada je $A = B \neq 0$, $C = 0$. Iz (2.2.2) i (2.2.3) dobijamo

$$\{f(u, v) + f(v, u)\}^2 = 0,$$

odakle sleduje

$$f(u, v) + f(v, u) = 0. \tag{2.2.5}$$

Ostaje još mogućnost $A = C = 1$, $B = 2$. Tada iz (2.2.2) takođe dobijamo (2.2.5).

Prema tome, potrebni uslovi da bi postojala netrivijalna rešenja jednačine $\mathbf{F}_5$ su

$$C = 0, \quad A = B \ (= 1, 2); \tag{2.2.6}$$

$$B = 2, \quad A = C = 1. \tag{2.2.7}$$

Relacije (2.2.6) za slučaj $A = B = 1$, važiće tada i samo tada ako je zadovoljen jedan od uslova

$$2r - 1 \equiv p \ (\text{mod}\ n), \quad p + q - 1 \not\equiv r \ (\text{mod}\ n); \ r + q - p \not\equiv p \ (\text{mod}\ n); \tag{2.2.8}$$

$$r + q - p \equiv p \ (\text{mod}\ n), \ p + q - 1 \not\equiv v \ (\text{mod}\ n), \ 2r - 1 \not\equiv p \ (\text{mod}\ n). \tag{2.2.9}$$

Slučaj $A = B = 2$, $C = 0$ ne može nastupiti jer bi tada moralo da važi $p + r - 1 \equiv r$ (mod n), a to je nemoguće.

Relacije (2.2.7) važiće ako i samo ako je

$$p + q - 1 \equiv r \ (\text{mod}\ n), \quad 2r - 1 \equiv p \ (\text{mod}\ n), \quad r + q - p \equiv p \ (\text{mod}\ n). \tag{2.2.10}$$

Na osnovu ovoga proizilazi sledeći rezultat:

Teorema 2. 2. 1. — *Da bi jednačina* $\mathbf{F}_5$ *imala i netrivijalnih rešenja, mora biti ispunjen jedan od uslova* (2.2.8), (2.2.9), (2.2.10).

Ukoliko postoje netrivijalna rešenja jednačine $\mathbf{F}_5$, ona imaju osobinu (2.2.5), tako da svako rešenje mora biii sledećeg oblika

$$f(u, v) = G(u, v) - G(v, u) \tag{2.2.11}$$

gde je $G: R^2 \to R$ podesno izabrana funkcija.

Najjednostavnija funkcija oblika (2.2.11), pored funkcije $f(u, v) \equiv 0$, je sledeća funkcija

$$f(u, v) = g(u) - g(v). \tag{2.2.12}$$

Ispitajmo kada je funkcija (2.2.12) rešenje jednačine $\mathbf{F}_5$ za bilo koju funkciju $g: R \to R$. tada mora biti

$$\begin{aligned}
&g(x_1)\,g(x_q) - g(x_1)\,g(x_r) - g(x_p)\,g(x_q) + g(x_p)\,g(x_r)\\
&+ g(x_2)\,g(x_{q+1}) - g(x_2)\,g(x_{r+1}) - g(x_{p+1})\,g(x_{q+1}) + g(x_{p+1})\,g(x_{r+1})\\
&+ \cdots\\
&+ g(x_n)\,g(x_{q-1}) - g(x_n)\,g(x_{r-1}) - g(x_{p-1})\,g(x_{q-1}) + g(x_{p-1})\,g(x_{r-1}) = 0.
\end{aligned}$$

Zadnja jednakost biće identitet za svako g u dva slučaja:

1° Ako se međusobno potru članovi I i III kolone gornje šeme i elementi II i IV kolone međusobno;

2° Ako se međusobno potru članovi I i II kolone i članovi III i IV kolone međusobno.

Ovo će nastupiti ako i samo ako je

1° $2r-1 \equiv p \pmod{n}$, $2q-1 \equiv p \pmod{n}$

ili

2° $q+r-p \equiv p \pmod{n}$, $r+q-1 \equiv 1 \pmod{n}$.

Uslovi 1° i 2° ustvari predstavljaju dovoljne uslove za postojanje i drugih rešenja osim trivijalnih jednačine $\mathbf{F}_5$.

Sada ćemo postaviti sledeću hipotezu:

Hipoteza. — *Funkcionalna jednačina* $\mathbf{F}_5$ *ima netrivijalnih rešenja tada i samo tada ako važi jedan od sledeća dva uslova:*

(2.2.13) 1° $2r-1 \equiv p \pmod{n}$, $2q-1 \equiv p \pmod{n}$;

(2.2.14) 2° $q+r-p \equiv p \pmod{n}$, $r+q-1 \equiv 0 \pmod{n}$.

Ako su ovi uslovi zadovoljeni, ispunjen je istovremeno i potreban uslov za postojanje netrivijalnih rdšenja.

Primer. Navešćemo jednu jednačinu za koju su potiebni uslovi ispunjeni, ali uslovi hipoteze nisu, a koja ima samo trivijalno rešenje. To je sledeća jednačina:

$$\begin{aligned}
&f(x_1, x_3)\,f(x_5, x_2) + f(x_2, x_4)\,f(x_6, x_3) + f(x_3, x_5)\,f(x_7, x_4)\\
&\quad + f(x_4, x_6)\,f(x_1, x_5) + f(x_5, x_7)\,f(x_2, x_6) + f(x_6, x_1)\,f(x_3, x_7) + f(x_7, x_2)\,f(x_4, x_1) = 0.
\end{aligned}$$

3. NEKE KVADRATNE FUNKCIONALNE JEDNAČINE SA INTERESANTNIM OSOBINAMA

3.1. Funkcionalna jednačina $\mathbf{F}_6$

Funkcionalnu jndnačinu

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}) + F(x_0, x_2, x_3, \ldots, x_{2n-1}, x_1) + \cdots + F(x_0, x_{2n-1}, x_1, x_2, \ldots, x_{2n-2}) = 0, \tag{3.1.1}$$

gde je

$$\begin{aligned} F(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}) &= \{f(x_0, x_1) + f(x_2, x_3) + \cdots + f(x_{2k-2}, x_{2k-1})\} \\ &\times \{f(x_{2k}, x_{2k+1}) + f(x_{2k+2}, x_{2k+3}) + \cdots + f(x_{2n-2}, x_{2n-1})\} \\ &\qquad (f: K^2 \to K;\ n > 2) \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

zvaćemo *jednačina* $\mathbf{F}_6$.

D. S. Mitrinović i S. B. Prešić (videti [4]) dokazali su sledeći rezultat.

Teorema 3. 1. 1. — *Opšte rešenje jednačine* $\mathbf{F}_6$ *je*

$$f(u, v) = g(v) - g(u), \tag{3.1.3}$$

gde je $g: K \to K$ *proizvoljna funkcija.*

Za $n=4$ i $k=2$, funkcionalna jednačina $\mathbf{F}_6$ glasi

$$\begin{aligned} &\{f(x_0, x_1) + f(x_2, x_3)\}\{f(x_4, x_5) + f(x_6, x_7)\} \\ &+ \{f(x_0, x_2) + f(x_3, x_4)\}\{f(x_5, x_6) + f(x_7, x_1)\} \\ &+ \{f(x_0, x_3) + f(x_4, x_5)\}\{f(x_6, x_7) + f(x_1, x_2)\} \\ &+ \{f(x_0, x_4) + f(x_5, x_6)\}\{f(x_7, x_1) + f(x_2, x_3)\} \\ &+ \{f(x_0, x_5) + f(x_6, x_7)\}\{f(x_1, x_2) + f(x_3, x_4)\} \\ &+ \{f(x_0, x_6) + f(x_7, x_1)\}\{f(x_2, x_3) + f(x_4, x_5)\} \\ &+ \{f(x_0, x_7) + f(x_1, x_2)\}\{f(x_3, x_4) + f(x_5, x_6)\} = 0. \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

Opšte rešenje ove jednačine je funkcija (3.1.3).

Funkcionalna jednačina

$$
\begin{aligned}
(3.1.5)\qquad & \{f(x_0, x_3)+f(x_2, x_1)\}\{f(x_4, x_7)+f(x_6, x_5)\}\\
&+\{f(x_0, x_4)+f(x_3, x_2)\}\{f(x_5, x_1)+f(x_7, x_6)\}\\
&+\{f(x_0, x_5)+f(x_4, x_3)\}\{f(x_6, x_2)+f(x_1, x_7)\}\\
&+\{f(x_0, x_6)+f(x_5, x_4)\}\{f(x_7, x_3)+f(x_2, x_1)\}\\
&+\{f(x_0, x_7)+f(x_6, x_5)\}\{f(x_1, x_4)+f(x_3, x_2)\}\\
&+\{f(x_0, x_1)+f(x_7, x_6)\}\{f(x_2, x_5)+f(x_4, x_3)\}\\
&+\{f(x_0, x_2)+f(x_1, x_7)\}\{f(x_3, x_6)+f(x_5, x_4)\}=0,
\end{aligned}
$$

nastaje iz jednačine (3.1.4) permutovanjem promenljivih i takođe ima kao rešenje funkciju (3.1.3) (za sada pitanje opštosti ovog rešenja ostaje otvoreno).

Funkcionalne jednačine

$$
\begin{aligned}
(3.1.6)\qquad & \{f(x_0, x_3)-f(x_1, x_2)\}\{f(x_4, x_7)+f(x_6, x_5)\}\\
&+\{f(x_0, x_4)-f(x_2, x_3)\}\{f(x_5, x_1)+f(x_7, x_6)\}\\
&+\{f(x_0, x_5)-f(x_3, x_4)\}\{f(x_6, x_2)+f(x_1, x_7)\}\\
&+\{f(x_0, x_6)-f(x_4, x_5)\}\{f(x_7, x_3)+f(x_2, x_1)\}\\
&+\{f(x_0, x_7)-f(x_5, x_6)\}\{f(x_1, x_4)+f(x_3, x_2)\}\\
&+\{f(x_0, x_1)-f(x_6, x_7)\}\{f(x_2, x_5)+f(x_4, x_3)\}\\
&+\{f(x_0, x_2)-f(x_7, x_1)\}\{f(x_3, x_6)+f(x_5, x_4)\}=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3.1.7)\qquad & \{f(x_0, x_3)+f(x_2, x_1)\}\{f(x_4, x_7)-f(x_5, x_6)\}\\
&+\{f(x_0, x_4)+f(x_3, x_2)\}\{f(x_5, x_1)-f(x_6, x_7)\}\\
&+\{f(x_0, x_5)+f(x_4, x_3)\}\{f(x_6, x_2)-f(x_7, x_1)\}\\
&+\{f(x_0, x_6)+f(x_5, x_4)\}\{f(x_7, x_3)-f(x_1, x_2)\}\\
&+\{f(x_0, x_7)+f(x_6, x_5)\}\{f(x_1, x_4)-f(x_2, x_3)\}\\
&+\{f(x_0, x_1)+f(x_7, x_6)\}\{f(x_2, x_5)-f(x_3, x_4)\}\\
&+\{f(x_0, x_2)+f(x_1, x_7)\}\{f(x_3, x_6)-f(x_4, x_5)\}=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3.1.8)\qquad & \{f(x_0, x_1)-f(x_3, x_2)\}\{f(x_4, x_5)-f(x_7, x_6)\}\\
&+\{f(x_0, x_2)-f(x_4, x_3)\}\{f(x_5, x_6)-f(x_1, x_7)\}\\
&+\{f(x_0, x_3)-f(x_5, x_4)\}\{f(x_6, x_7)-f(x_2, x_1)\}\\
&+\{f(x_0, x_4)-f(x_6, x_5)\}\{f(x_7, x_1)-f(x_3, x_2)\}\\
&+\{f(x_0, x_5)-f(x_7, x_6)\}\{f(x_1, x_2)-f(x_4, x_3)\}\\
&+\{f(x_0, x_6)-f(x_1, x_7)\}\{f(x_2, x_3)-f(x_5, x_4)\}\\
&+\{f(x_0, x_7)-f(x_2, x_1)\}\{f(x_3, x_4)-f(x_6, x_5)\}=0,
\end{aligned}
$$

koje su nastale iz jednačine (3.1.4) permutovanjem promenljivih i promenom znakova po jednom utvrđenom zakonu, isto tako imaju za rešenje funkciju (3.1.3). Ova osobina jednačina (3.1.4), (3.1.5), (3.1.6), (3.1.7) i (3.1.8) sugerira da se postavi pitanje da li je navedena funkcija (3.1.3) rešenje jednačina koje su analogne navedenim jednačinama u slučaju kada su k i n $(k<n)$ proizvoljni prirodni brojevi. Isto tako postavlja se, u potvrdnom slučaju, pitanje o karakteru takvog rešenja. Navedena pitanja biće predmet narednih odeljaka ove glave.

3.2. Funkcionalna jednačina $\mathbf{F}_7$

Funkcionalnu jednačinu (3.1.1), gde je

$$\begin{aligned}F(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}) &= \{f(x_0, u_0)+f(x_2, u_1)+\cdots+f(x_{2k-2}, u_{k-1})\}\\ &\quad\times\{f(x_{2k}, v_0)+f(x_{2k+2}, v_1)+\cdots+f(x_{2n-2}, v_{n-k-1})\}\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

$(u_i \in \{x_1, x_3, x_5, \ldots, x_{2k-1}\}$ $(i=0, 1, \ldots, k-1)$, $v_j \in \{x_{2k+1}, x_{2k+3}, \ldots, x_{2n-1}\}$ $(j=0, 1, \ldots, n-k-1)$; $u_\nu \neq u_\mu$ i $v_\nu \neq v_\mu$ ako je $\nu \neq \mu)$,

zvaćemo: *jednačina* $\mathbf{F}_7$.

T e o r e m a 3. 2. 1. — *Opšte rešenje jednačine* Γ_8 *je*

$$f(u, v)=g(v)-g(u), \tag{3.2.2}$$

gde je $g: K \to K$ *proizvoljna funkcija.*

Dokaz teoreme 3.2.1. — Funkcija (3.2.2) je jedno rešenje jednačine $\mathbf{F}_7$. Zaista zamenom (3.2.2) u (3.2.1) posle sređivanja dobijamo

$$\begin{aligned}F(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}) &= \{g(x_0)-g(x_1)+g(x_2)-\cdots+g(x_{2k-2})-g(x_{2k-1})\}\\ &\quad\times\{g(x_{2k})-g(x_{2k+1})+g(x_{2k+2})-\cdots+g(x_{2n-2})-g(x_{2n-1})\},\end{aligned}$$

odnosno isti rezultat kao i zamenom (3.2.2) u (3.1.2). Budući da je (3.2.2) rešenje jednačine $\mathbf{F}_6$, proizilazi da je (3.2.2) rešenje i jednačine $\mathbf{F}_7$.

Obrnuto, dokazaćemo da svako rešenje jednačine $\mathbf{F}_7$ ima oblik (3.2.2).

Trivijalno rešenje je sadržano u funkciji (3.2.2). Dalje ćemo tražiti samo netrivijalna rešenja. Za svako netrivijalno rešenje postoji bar jedan par brojeva (a, b) $(a, b \in K)$ takav je $f(a, b) \neq 0$.

Stavljajući $x_i=u$ $(i=0, 1, \ldots, 2n-1)$, jednačina $\mathbf{F}_7$ svodi se na

$$f(u, u)=0. \tag{3.2.3}$$

Ako u jednačini $\mathbf{F}_7$ stavimo da su sve promenljive jednake u i da je $x_1=x_{2n-1}=v$, na osnovu (3.2.3) dobijemo

$$pf^2(u, v)+qf(u, v)\,f(v, u)+rf^2(v, u)=0, \tag{3.2.4}$$

gde su $p\,(>0)$, $q\,(\geqslant 0)$, $r\,(>0)$ celi brojevi.

Kako funkcija (3.2.2) mora zadovoljavati jednačinu (3.2.4) za svako g, zamenom (3.2.2) u (3.2.4) dolazimo do uslova $q=p+r$.

Permutovanjem promenljivih u i v, iz (3.2.4) dobijamo

(3.2.5) $$pf^2(v, u)+qf(u, v)\,f(v, u)+rf^2(u, v)=0.$$

Sabiranjem jednakosti (3.2.4) i (3.2.5), vodeći računa o uslovu $q=p+r$ (>0), dobijamo

(3.2.6) $$f(u, v)+f(v, u)=0.$$

Razlikovaćemo dva slučaja: 1° $k=1$; 2° $k>1$.

1° *slučaj:* $k=1$. U ovom slučaju funkcija (3.2.1) glasi

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1})=f(x_0, x_1)\,\{f(x_2, v_0)+f(x_4, v_1)+\cdots+f(x_{2n-2}, v_{n-2})\}$$

$$(v_i \in \{x_3, x_5, \ldots, x_{2n-1}\}\ (i=0, 1, \ldots, n-2);\ v_\nu \neq v_\mu \text{ za } \nu \neq \mu).$$

Potrebno je posebno ispitati slučajeve $v_{n-2}\neq x_{2n-1}$ i $v_{n-2}=x_{2n-1}$.

U slučaju $v_{n-2}\neq x_{2n-1}$, smena

(3.2.7) $$x_0=a,\ x_1=b,\ x_{2n-2}=u,\ v_{n-2}=v,$$

$$x_2=x_4=\cdots=x_{2n-4}=a,\ v_0=v_1=\cdots=v_{n-3}=a,$$

transformiše jednačinu $\mathbf{F}_7$ u

$$f(a, b)\,f(u, v)+f(a, u)\,\{f(a, b)+f(a, v)\}+f(a, v)\,\{f(b, a)+f(u, a)\}=0.$$

Iz ove jednačine, na osnovu (3.2.6), dobijamo

$$f(u, v)=f(a, v)-f(a, u).$$

Uvodeći oznaku $f(a, u)=g(u)$, dobijamo da je funkcija f zaista oblika (3.2.2).

U slučaju kada je $v_{n-2}=x_{2n-1}$, smena (3.2.7) prevodi jednačinu (F_7) u sledeću jednačinu

(3.2.8) $$f(a, b)\,f(u, v)+f(a, u)\,\{f(v, a)+f(a, b)\}+f(a, v)\,\{f(b, a)+f(a, u)\}=0$$

u slučaju kada je $v_0\neq x_3$, odnosno u jednačinu

(3.2.9) $$f(a, b)\,f(u, v)+f(a, u)\,f(v, b)+f(a, v)\,f(b, a)+f(a, v)\,f(a, u)=0$$

u slučaju kada je $v_0=x_3$.

Jednačina (3.2.8) na osnovu (3.2.6) daje

(3.2.10) $$f(u, v)=g(v)-g(u),$$

gde je korišćena oznaka $f(a, u)=g(u)$.

Iz (3.2.9), za $v=b$, dobijamo

$$f(u, b)=f(a, b)-f(a, u).$$

Koristeći ovu jednakost i uvodeći oznaku $f(a, u)=g(u)$, jednačina (3.2.9) svodi se na (3.2.10).

2° *slučaj:* $k>1$. Neka je $u_0=x_{2p-1}$ $(0<p<k)$. Razlikovaćemo dva slučaja: $0<2p\leqslant k$ i $k<2p\leqslant 2k$.

U slučaju $0<2p\leqslant k$, stavimo da su sve promenljive x_i $(i=0, 1, 2, \ldots, 2n-1)$, osim x_0; x_p, x_{2n-1}, jednake x i da je

$$x_0=u,\ x_{2p-1}=v,\ x_{2n-1}=y.$$

Ovom smenom jednačina (F_7), s obzirom na (3.2.3) i (3.2.6) svodi se na jednačinu

$$\text{(3.2.11)}\qquad \begin{aligned} &f(x, y)\, f(u, v)+A\, f(u, x)\, f(v, x)+B\, f(u, x)\, f(y, x)\\ &\quad +C\, f(x, y)\, f(v, x)+D\, f(u, x)\, f(y, v)+E\, f(u, y)\, f(v, x)=0, \end{aligned}$$

gde su A, B, C, D, E celi brojevi.

Primetimo da je u ovoj jednačini $E=0$. Zaista, član $f(u, y)\, f(v, x)$ u jednačini (3.1.1) može se pojaviti samo u članu $F(x_0, x_{2n-1}, \ldots, x_{2n-2})$. Promenljiva x_{2p-1} pojavljuje se u ovoj funkciji na $2p+1$—om mestu, tako da navedenom smenom dobijamo

$$F(x_0, x_{2n-1}, x_1, \ldots, x_{2n-2})=\{f(u, y)+f(v, x)\}\times\{(n-k)\, f(x, x)\}\equiv 0.$$

Funkcija $f(u, v)=g(v)-g(u)$ mora da zadovoljava jednačinu (3.2.11) za za svako g. Zamenom (3.2.2) u (3.2.11) dolazimo do sledećeg sistema jednačina koji mora biti zadovoljen da bi funkcija (3.2.2) bila rešenje jednačine (3.2.11) za svako g:

$$A+B=1,\quad A-C-D=-1,\quad C=1,$$

$$B-C+D=0,\quad A-D=0,\quad A+B-C=0.$$

Odavde dobijamo

$$\text{(3.2.12)}\qquad B=1-A,\quad C=1,\quad D=A,$$

tako da jednačina (3.1.1) glasi

$$\text{(3.2.13)}\qquad \begin{aligned} &f(x, y)\, f(u, v)+A\, f(u, x)\, f(v, x)+(1-A)\, f(u, x)\, f(y, x)\\ &\quad +f(x, y)\, f(v, x)+A\, f(u, x)\, f(y, v)=0. \end{aligned}$$

Za $x=a$, $y=v=b$, iz (3.2.13) dobijamo

$$\text{(3.2.14)}\qquad f(u, b)=f(u, a)+f(a, b).$$

Stavljajući $x=a$, $y=b$ iz (3.2.13) nalazimo

$$\text{(3.2.15)}\qquad \begin{aligned} &f(a, b)\, f(u, v)+A\, f(u, a)\, f(v, a)+(1-A)\, f(u, a)\, f(b, a)\\ &\quad +f(a, b)\, f(v, a)+A\, f(u, a)\, f(b, v)=0, \end{aligned}$$

odnosno, prema (3.2.14),

$$f(u, v)=f(a, v)-f(a, u).$$

Uvodeći oznaku $g(u)=f(a, u)$, iz zadnje relacije dobijamo

$$f(u, v)=g(v)-g(u).$$

U slučaju $k<2p\leqslant 2k$, stavimo da je

$$x_0=u,\ x_{2p-1}=v,\ x_{2n-1}=y$$

i da su sve ostale promenljive jednake x. Tada jednačina $\mathbf{F}_7$ postaje

$$\text{(3.2.16)}\qquad \begin{aligned} &f(x, y)\, f(u, v)+A_1\, f(u, x)\, f(v, x)+B_1\, f(u, x)\, f(y, x)\\ &\quad +C_1\, f(x, y)\, f(v, x)+D_1\, f(u, x)\, f(y, v)+E_1\, f(u, y)\, f(v, x)=0. \end{aligned}$$

Slično kao u slučaju $0<2p\leqslant k$, dolazimo do zaključka da je $E_1=1$, kao i

$$B_1=1-D_1,\ C_1=0,\ A_1=-B_1.$$

Tako dobijena jednačina ekvivalentna je jednačini (3.2.15). Prema tome, i u ovom slučaju svako rešenje ima oblik (3.2.2).

3.3. Funkcionalna jednačina $\mathbf{F}_8$

Funkcionalnu jednačinu (3.1.1), gde je

$$(3.3.1)\qquad F(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1})$$

$$=\{f(x_0, u_0)-f(u_1, v_0)+f(v_1, u_2)-f(u_3, v_2)+\cdots+f(v_{k-3}, u_{k-2})-f(u_{k-1}, v_{k-2})\}$$
$$\times\{f(x_{2k}, w_0)+f(x_{2k+2}, w_1)+\cdots+f(x_{2n-2}, w_{n-k-1})\}\qquad \text{za } k \text{ parno},$$

$$=\{f(x_0, u_0)-f(u_1, v_0)+f(v_1, u_2)-\cdots-f(u_{k-2}, v_{k-3})+f(v_{k-2}, u_{k-1})\}$$
$$\times\{f(x_{2k}, w_0)+f(x_{2k+2}, w_1)+\cdots+f(x_{2n-1}, w_{n-k-1})\}\qquad \text{za } k \text{ neparno}$$

$(f\colon K^2\to K;\ u_i\in\{x_1, x_3, \ldots, x_{2k-1}\}\ (i=0, 1, \ldots, k-1),$

$v_j\in\{x_2, x_4, \ldots x_{2k-2}\}\ (j=0, 1, \ldots, k-2),\ w_\nu\in\{x_{2k+1}, x_{2k+3}, \ldots, x_{2n-1}\}$

$(\nu=0, 1, \ldots, n-k-1);\ u_\alpha\neq u_\beta,\ v_\alpha\neq v_\beta,\ w_\alpha\neq w_\beta$ za $\alpha\neq\beta)$

zvaćemo: *jednačina* $\mathbf{F}_8$.

Teorema 3.3.1. — *Opšte rešenje jednačine* $\mathbf{F}_8$ *u slučaju* $k=2m-1$ *je*

$$(3.3.2)\qquad f(u, v)=g(v)-g(u)\qquad (g\colon K\to K,\ \textit{proizvoljna funkcija}).$$

U slučaju $k=2m$ *opšte rešenje je funkcija* (3.3.2) *ili je oblika* $f(u, v)=h(v)$, *gde je* $h\colon K\to K$ *podesno izabrana funkcija.*

Dokaz teoreme 3.3.1. — Potražimo prvo opšte rešenje jednačine $\mathbf{F}_8$ u slučaju $k=2m-1$.

Stavljajući $x_i=u$ $(i=0, 1, \ldots, 2n-1)$, dobijamo

$$(3.3.3)\qquad f(u, u)\equiv 0.$$

Za $x_0=x_{2n-1}=u$, $x_j=v$ $(j=1, 2, \ldots, 2n-2)$ na osnovu (3.3.3), iz jednačine $\mathbf{F}_8$ dobijamo

$$(3.3.4)\qquad f^2(u, v)+f(u, v)\,f(v, u)=0.$$

Permutovanjem u i v, poslednja jednakost postaje

$$(3.3.5)\qquad f^2(v, u)+f(u, v)\,f(v, u)=0.$$

Sabiranjem (3.3.4) i (3.3.5), dolazimo do

$$\{f(u, v)+f(v, u)\}^2=0,$$

odnosno

$$(3.3.6)\qquad f(u, v)=-f(v, u).$$

Koristeći se relacijom (3.3.6), jednačinu $\mathbf{F}_8$ možemo svesti na jednačinu $\mathbf{F}_7$, čije je opšte rešenje, prema teoremi 2.1.

$$(3.3.7)\qquad f(u, v)=g(v)-g(u).$$

Budući da funkcija (3.3.7) zadovoljava jednačinu $\mathbf{F}_8$, teorema 3.3.1. je dokazana za slučaj $k=2m-1$.

Sada ćemo preći na dokaz teoreme 3.3.1. za slučaj $k=2m$.

Sve funkcije $f\colon K^2 \to K$ možemo podeliti na dve klase:

Klasa C_1 svih funkcija f za koje važi $f(u, u) \equiv 0$;

Klasa C_2 svih funkcija f za koje važi $f(u, u) \not\equiv 0$.

Potražimo prvo opšte rešenje jednačine $\mathbf{F}_8$ za slučaj $k=2m$ u klasi funkcija C_1.

Stavljajući $x_0=x_{2n-1}=u$, $x_i=v$ $(i=1, 2, \ldots, 2n-2)$, na osnovu pretpostavke $f(u, u) \equiv 0$, iz $\mathbf{F}_8$ dobijamo relaciju (3.3.4). Permutujući promenljive u i v, iz (3.3.4) dobijamo (3.3.5). Sabiranjem (3.3.4) i (3.3.5) dobijamo (3.3.6), tako da se u ovom slučaju jednačina $\mathbf{F}_8$ svodi na jednačinu $\mathbf{F}_7$. Prema tome, opšte rešenje jednačine $\mathbf{F}_8$ za slučaj $k=2m$, u klasi funkcija C_1 dato je formulom (3.3.7).

Potražimo sada opšte rešenje jednačine $\mathbf{F}_8$ u klasi funkcija C_2. Budući da je tada $f(u, u) \not\equiv 0$, postoji bar jedan broj c $(c \in K)$, takav da je $f(c, c) \neq 0$.

Stavljajući $x_0=u$, $x_1=v$, $x_i=c$ $(i=2, 3, \ldots, 2n-1)$, iz jednačine $\mathbf{F}_8$ dobijamo

$$(3.3.8) \qquad \begin{aligned}(n-k)\{[f(u, v)-\alpha+2(k-1)f(u, c)-2(k-2)\alpha-f(c, v)-f(v, c)]\,\alpha \\ +[f(u, c)-\alpha][f(c, v)+f(v, c)+2(n-k-1)\alpha]\}=0,\end{aligned}$$

gde smo stavili $f(c, c)=\alpha$. Iz poslednje jednačine, za $v=c$ dobijamo

$$(3.3.9) \qquad f(u, c)=\alpha.$$

Koristeći (3.3.9) iz (3.3.8) nalazimo

$$(3.3.10) \qquad f(u, v)=h(v) \quad (h(u)=f(c, u)).$$

Međutim, u opštem slučaju, funkcija (3.3.10) nije rešenje jednačine $\mathbf{F}_8$ za svaku vrednost funkcije h. Tako se za slučaj jednačine koja je posmatrana u članku [7] ona svodi na konstantu.

Primer jednačine $\mathbf{F}_8$, kada je funkcija (3.3.10) rešenje za svako h je ako za $k=2$, $n=4$, funkcija F ima sledeći oblik

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_7)=\{f(x_0, x_3)-f(x_1, x_2)\}\{f(x_4, x_7)+f(x_6, x_5)\}.$$

3.4. Funkcionalna jednačina $\mathbf{F}_9$

Funkcionalnu jednačinu (3.1.1) gde je

$$(3.4.1) \qquad \begin{aligned} F(x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}) \\ =\ &\{f(x_0, u_0)+f(x_2, u_1)+\cdots+f(x_{2k-2}, u_{k-1})\} \\ &\times\{f(v_0, w_0)-f(w_1, v_1)+f(v_2, w_2)-\cdots-f(w_{n-k-2}, v_{n-k-2}) \\ &\qquad +f(v_{n-k-1}, w_{n-k-1})\} \qquad \text{za } n-k=2m+1, \\ =\ &\{f(x_0, u_0)+f(x_2, u_1)+\cdots+f(x_{2k-2}, u_{k-1})\} \\ &\times\{f(v_0, w_0)-f(w_1, v_1)+f(v_2, w_2)-\cdots+f(v_{n-k-2}, w_{n-k-2}) \\ &\qquad +f(w_{n-k-1}, v_{n-k-1})\} \qquad \text{za } n=k=2m\end{aligned}$$

$(f: K^2 \to K;\ u_i \in \{x_1, x_3, \ldots, x_{2k-1}\}\ (i=0, 1, \ldots, k-1),\ v_j \in \{x_{2k}, x_{2k+2}, \ldots,$
$x_{2n-2}\}\ (j=0, 1, \ldots, n-k-1),\ w_\nu \in \{x_{2k+1}, x_{2k+3}, \ldots, x_{2n-1}\}$
$(\nu=0, 1, \ldots, n-k-1);\ u_\alpha \neq u_\beta,\ v_\alpha \neq v_\beta,\ w_\alpha \neq w_\beta$ za $\alpha \neq \beta)$

zvaćemo: *jednačina* $\mathbf{F}_9$.

Ako je $n-k=2m+1$, dokazaćemo teoremu:

Teorema 3. 4. 1. — *Ako je* $n-k=2m+1$ *opšte rešenje jednačine* $\mathbf{F}_9$ *je*

(3.4.2) $$f(u, v) = g(u) - g(v) \qquad (g: K \to K, \textit{ proizvoljna funkcija})$$

Dokaz teoreme 3.4.1. — Stavljajući $x_i = u$ $(i=0, 1, \ldots, 2n-1)$ iz jednačine $\mathbf{F}_9$ dobijamo (za slučaj $n-k=2m+1$)

(3.4.3) $$f(u, u) \equiv 0.$$

Vodeći računa o ovoj relaciji, za $x_0 = x_{2n-1} = v$, $x_i = u$ $(i=1, 2, \ldots, 2n-2)$ iz jednačine $\mathbf{F}_9$ dobijamo

(3.4.4) $$\{f(u, v) + f(v, u)\}\, f(v, u) = 0.$$

Permutujući u jednakosti (3.4.4) promenljive u i v i sabirajući tako dobijenu relaciju sa (3.4.4), dolazimo do

$$f(u, v) + f(v, u) = 0.$$

Na osnovu ove jednakosti, jednačinu $\mathbf{F}_9$ možemo svesti na jednačinu $\mathbf{F}_7$, čije je opšte rešenje

$$f(u, v) = g(v) - g(u).$$

Budući da ova funkcija zadovoljava jednačinu $\mathbf{F}_9$ ako je $n-k=2m+1$, teorema 3.4.1. je dokazana.

Za jednačinu $\mathbf{F}_9$ u slučaju $n-k=2m$ opšte rešenje nismo mogli da dobijemo. Rezultati koje smo dobili u vezi ove jednačine sadržani su u sledećoj teoremi:

Teorema 3. 4. 2. — 1° *U slučaju* $n-k=2m$, *kada je*

$$v_i = x_{2k+2i}\ (i=0, 1, \ldots, n-k-1), \qquad w_j = x_{2k+2j+1}\ (j=0, 1, \ldots, n-k-1)$$

funkcija

(3.4.5) $$f(u, v) = \alpha g(u) - \beta g(v) \qquad (g: K \to K, \textit{ proizvoljna funkcija})$$

je jedno rešenje jednačine $\mathbf{F}_9$.

Za $k > 1$ *i* $\alpha = -\beta$ *funkcija* (3.4.5) *je opšte rešenje jednačine* $\mathbf{F}_9$ *u klasi funkcija* C_1 *(sve funkcije* $f: K^2 \to K$ *za koje je* $f(u, u) \equiv 0$).

2° *Ako se u* (3.4.1) *promenljiva* x_{2n-1} *pojavljuje u funkciji* f *ispred koje stoji znak* $+$, *opšte rešenje jednačine* $\mathbf{F}_9$ *u klasi funkcija* C_1 *je funkcija* (3.4.2).

Dokaz teoreme 3.4.2. — 1° Bez teškoće e proverava da je (3.4.5) zaista rešenje jednačine $\mathbf{F}_9$ ako je $n-k=2m$ i kada promenljive v_i i w_i $(i=0, 1, \ldots, n-k-1)$ imaju vrednosti koje su u teoremi precizirane.

Ako $n-k=2m$ $(k>1)$ stavljajući $x_1 = x_2 = x_3 = u$, $x_4 = x_5 = \cdots = x_{2n-1} = x_0 = v$, iz $\mathbf{F}_9$ dobijamo

(3.4.6) $$\{f(u, v) + f(v, u) - f(u, u) - f(v, v)\}\,\{f(u, v) - f(u, u)\} = 0.$$

Permutujući promenljive, dobijamo

$$(3.4.7)\qquad \{f(v, u)+f(u, v)-f(v, v)-f(u, u)\}\{f(v, u)-f(v, v)\}=0.$$

Sabiranjem relacija (3.4.6) i (3.4.7), nalazimo

$$f(u, v)+f(v, u)-f(u, u)-f(v, v)=0.$$

Zadnja relacija u klasi funkcija C_1 $(f(u, u)\equiv 0)$, glasi

$$f(u, v)+f(v, u)=0,$$

što omogućava da se jednačina $\mathbf{F}_9$ u posmatranom slučaju svede na jednačinu $\mathbf{F}_7$. Na ovaj način prvi deo teoreme 3.4.2. je dokazan.

2° Pod predpostavkama teoreme, smena $x_1=x_{2n-1}=u$, $x_i=v$ $(i=2, 3, \ldots, 2n-2)$, $x_0=v$, prevodi jednačinu $\mathbf{F}_9$ u

$$(3.4.8)\qquad f(v, u)\{f(u, v)+f(v, u)\}=0.$$

Permutujući promenljive u ovoj relaciji i sabirajući tako dovedenu jednakost sa (3.4.8), dolazimo do

$$f(u, v)+f(v, u)=0.$$

Prema tome, jednačina $\mathbf{F}_9$ u ovom slučaju može se svesti na jednačinu $\mathbf{F}_7$, čije je opšte rešenje funkcija (3.4.2). Budući da je ova funkcija zaista, pod učinjenim pretpostavkama, rešenje jednačine $\mathbf{F}_9$ i drugi deo teoreme 3.4.2, je dokazan.

3.5. Funkcionalna jednačina $\mathbf{F}_{10}$

Funkcionalnu jednačinu (3.1.1), kada je $n=2m$ i $k=2r$, uz uslov

$$(3.5.1)\qquad \begin{aligned} &F(x_0, x_1, \ldots, x_{4m-1})\\ &=\{f(x_0, x_1)-f(x_3, x_2)+f(x_4, x_5)-\cdots+f(x_{4r-4}, x_{4r-3})-f(x_{4r-1}, x_{4r-2})\}\\ &\times\{f(x_{4r}, x_{4r+1})-f(x_{4r+3}, x_{4r+2})+\cdots+f(x_{4m-4}, x_{4m-3})-f(x_{4m-1}, x_{4m-2})\}\end{aligned}$$

sa nepoznatom funkcijom $f: K^2 \to K$, zvaćemo: *jednačina* $\mathbf{F}_{10}$.

T e o r e m a 3. 5. 1. — *Opšte rešenje jednačine* $\mathbf{F}_{10}$ *je konstanta ili funkcija*

$$(3.5.2)\qquad f(u, v)=g(v)-g(u)\qquad (g: K\to K,\ \textit{proizvoljna funkcija}).$$

Dokaz teoreme 3.5.1. — Podelimo sve funkcije $f: K^2\to K$ na dve klase: Klasu C_1 u kojoj je $f(u, u)\equiv 0$ i klasu C_2 u kojoj je $f(u, u)\not\equiv 0$.

U klasi C_1 postoji za svako netrivijalno rešenje bar jedan par brojeva (a, b) $(a, b\in K)$ takav da je $f(a, b)\neq 0$. Stavljajući $x_0=u$, $x_1=v$, $x_{4m-2}=b$ i zamenjujući sve ostale promenljive sa a, dobijamo

$$f(a, b)\,f(u, v)-f(a, b)\,f(u, a)+f(a, b)\,f(v, a)=0,$$

odnosno, uvodeći oznaku $f(u, a)=-g(u)$,

$$(3.5.3)\qquad f(u, v)=g(v)-g(u).$$

U klasi funkcija C_2 postoji bar jedan broj c takav da je $f(c, c) \neq 0$ $(c \in K)$. Smenom $x_1 = u$, $x_{4r+1} = u$ i zamenjujući sve ostale promenljive sa c, iz jednačine $\mathbf{F}_{10}$ dobijamo

$$\{f(c, u) - f(c, c)\}^2 + 2\{f(c, c) - f(u, c)\}\{f(c, c) - f(c, u)\} + \\ + \{f(c, c) - f(u, c)\}^2 = 0,$$

odnosno

$$f(c, u) + f(u, c) = 2\alpha, \tag{3.5.4}$$

gde smo stavili $f(c, c) = \alpha$.

Smena svih promenljivih osim x_{4r-2}, x_{4r-1}, x_{4r}, x_{4r+1}, sa c, kao i

$$x_{4r-2} = x_{4r-1} = x_{4r} = x_{4r+1} = u,$$

prevodi jednačinu $\mathbf{F}_{10}$ u

$$-\{f(u, u) - \alpha\}^2 + \{f(c, u) - f(u, u)\}\{f(c, u) + f(u, c) - 2\alpha\} = 0,$$

odakle, s obzirom na (3.5.4), nalazimo da je

$$f(u, u) = \alpha. \tag{3.5.5}$$

Najzad, stavljajući $x_1 = x_3 = x_{4r+1} = x_{4r+3} = c$ i zamenjujući sve preostale promenljive sa u, budući da je $f(u, u) = \alpha$, iz jednačine $\mathbf{F}_{10}$ dobijamo

$$f(u, c) = f(c, u)$$

tako da iz (3.5.4) sleduje

$$f(u, c) = f(c, u) = \alpha.$$

Zamenjujući promenljive x_3 i x_{4r+3} sa u, x_2, x_{4r+2} sa v a sve ostale promenljive sa c i vodeći računa o $f(u, c) = f(v, c) = \alpha$, iz posmatrane jednačine dobijamo

$$\{f(u, v) - f(c, c)\}^2 = 0,$$

odakle proizilazi

$$f(u, v) = \alpha \quad (= \text{const}). \tag{3.5.6}$$

Budući da su funkcije (3.5.3) i (3.5.6) zaista rešenja jednačine $\mathbf{F}_{10}$, teorema 3.5.1. je dokazana.

4. SISTEM FUNKCIONALNIH JEDNAČINA KOJI SADRŽI JEDNAČINU F ZA SLUČAJ $n=2$

4.1. Sistem funkcionalnih jednačina S

Sistem funkcionalnih jednačina

$$
\begin{aligned}
&f(x_1, x_2)\, f(x_3, x_4) + f(x_1, x_3)\, f(x_4, x_2) + f(x_1, x_4)\, f(x_2, x_3) \\
&\quad + \alpha \{g(x_1, x_2)\, g(x_3, x_4) + g(x_1, x_3)\, g(x_4, x_2) + g(x_1, x_4)\, g(x_2, x_3)\} = 0, \\
&f(x_1, x_2)\, g(x_3, x_4) + f(x_1, x_3)\, g(x_4, x_2) + f(x_1, x_4)\, g(x_2, x_3) \\
&\quad + g(x_1, x_2)\, f(x_3, x_4) + g(x_1, x_3)\, f(x_4, x_2) + g(x_1, x_4)\, f(x_2, x_3) \\
&\quad + \beta \{g(x_1, x_2)\, g(x_3, x_4) + g(x_1, x_3)\, g(x_4, x_2) + g(x_1, x_4)\, g(x_2, x_3)\} = 0
\end{aligned}
\tag{4.1.1}
$$

($f, g: R^2 \to R$, $\alpha, \beta \in R$ date konstante), zvaćemo: *sistem* S.

Ako uvedemo funkciju F relacijom

$$
F(u, v) = f(u, v) + \frac{\beta}{2}\, g(u, v)
\tag{4.1.2}
$$

sistem jednačina (4.1.1) svodi se na

$$
\begin{aligned}
&F(x_1, x_2)\, F(x_3, x_4) + F(x_1, x_3)\, F(x_4, x_2) + F(x_1, x_4)\, F(x_2, x_3) \\
&\quad + \left(\frac{\beta^2}{4} + \alpha\right) \{g(x_1, x_2)\, g(x_3, x_4) + g(x_1, x_3)\, g(x_4, x_2) + g(x_1, x_4)\, g(x_2, x_3)\} = 0, \\
&F(x_1, x_2)\, g(x_3, x_4) + F(x_1, x_3)\, g(x_4, x_2) + F(x_1, x_4)\, g(x_2, x_3) \\
&\quad + g(x_1, x_2)\, F(x_3, x_4) + g(x_1, x_3)\, F(x_4, x_2) + g(x_1, x_4)\, F(x_2, x_3) = 0.
\end{aligned}
\tag{4.1.3}
$$

Razlikovaćemo sledeća tri slučaja:

1° $\frac{\beta^2}{4} + \alpha = 0$; 2° $\frac{\beta^2}{4} + \alpha = p^2$; 3° $\frac{\beta^2}{4} + \alpha = -p^2$ $(p > 0)$.

Prvi slučaj: $\frac{\beta^2}{4} + \alpha = 0$. U ovom slučaju prva jednačina sistema (4.1.3) postaje

$$
F(x_1, x_2)\, F(x_3, x_4) + F(x_1, x_3)\, F(x_4, x_2) + F(x_1, x_4)\, F(x_2, x_3) = 0.
$$

Opšte rešenje ove jednačine, prema teoremi 1.1.1, je:

$$
F(u, v) = \Delta \{H_1(u), K_1(v)\} \qquad (H_1, K_1: R \to R)
\tag{4.1.4}
$$

gde su

$$H_1(u) = \frac{F(a, u)}{F(a, b)}, \quad K_1(u) = F(b, u) \tag{4.1.5}$$

proizvoljne funkcije i (a, b) $(a, b \in R)$ par realnih brojeva takav da je $F(a, b) \neq 0$.

Ako stavimo $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = u$, $x_4 = v$, druga jednačina sistema (4.1.3) postaje

$$\begin{aligned} F(a, b)\,\{g(u, v) + H_1(u)\, g(v, b) + H_1(v)\, g(b, u)\} \\ + g(a, b)\,\{H_1(u)\, K_1(v) - K_1(u)\, H_1(v)\} - g(a, u)\, K_1(v) + g(a, v)\, K_1(u) = 0. \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Za $u = v = b$, budući da je $H_1(b) = 1$, $K_1(b) = 0$, iz (4.1.6) dobijamo $g(b, b) \equiv 0$. Ako stavimo $u = b$ i iskoristimo jednakost $g(b, b) = 0$, iz jednačine (4.1.6) dobijamo

$$g(b, v) = -g(v, b).$$

Uvodeći oznake

$$g(v, b) = H_2(v), \quad \frac{g(a, v)}{F(a, b)} = K_2(v), \quad \frac{g(a, b)}{F(a, b)} = -k,$$

jednačina (4.1.6) dobija sledeći oblik

$$g(u, v) = \Delta\,\{H_1(u),\, k\, K_1(v) - H_2(v)\} + \Delta\,\{K_1(v),\, K_2(u)\}. \tag{4.1.7}$$

Najzad, na osnovu (4.1.4) i (4.1.7), iz (4.1.2) nalazimo

$$f(u, v) = \Delta\left\{H_1(u),\, \left(1 - \frac{\beta}{2}\right) K_1(v) + \frac{\beta}{2}\, H_2(v)\right\} + \frac{\beta}{2}\, \Delta\,\{K_1(u),\, K_2(v)\}. \tag{4.1.8}$$

Funkcije f i g date formulama (4.1.7) i (4.1.8) zaista su rešenja sistema **S**. Prema tome, u slučaju $\frac{\beta^2}{4} + \alpha = 0$, formulama (4.1.7) i (4.1.8) određene su sve funkcije f i g koje su rešenja sistema **S**. Funkcije H_1, H_2, K_1, K_2 koje se u tim rešenjima pojavljuju se proizvoljne funkcije koje $R \to R$; $k \in R$ je proizvoljna konstanta.

Drugi slučaj: $\frac{\beta^2}{4} + \alpha = p^2$ $(p > 0)$. Uvodeći nove funkcije M i N pomoću formula

$$M(u, v) = F(u, v) + pg(u, v), \quad N(u, v) = F(u, v) - pg(u, v), \tag{4.1.9}$$

sistem (4.1.3) postaje

$$\begin{aligned} & M(x_1, x_2)\, M(x_3, x_4) + M(x_1, x_3)\, M(x_4, x_2) + M(x_1, x_4)\, M(x_2, x_3) \\ & \quad + N(x_1, x_2)\, N(x_3, x_4) + N(x_1, x_3)\, N(x_4, x_2) + N(x_1, x_4)\, N(x_2, x_3) = 0, \\ & M(x_1, x_2)\, M(x_3, x_4) + M(x_1, x_3)\, M(x_4, x_2) + M(x_1, x_4)\, M(x_2, x_3) \\ & \quad - N(x_1, x_2)\, N(x_3, x_4) - N(x_1, x_3)\, N(x_4, x_2) - N(x_1, x_4)\, N(x_2, x_3) = 0. \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Upoređujući jednačine sistema (4.1.10), nalazimo

$$\begin{aligned} & M(x_1, x_2)\, M(x_3, x_4) + M(x_1, x_3)\, M(x_4, x_2) + M(x_1, x_4)\, M(x_2, x_3) = 0, \\ & N(x_1, x_2)\, N(x_3, x_4) + N(x_1, x_3)\, N(x_4, x_2) + N(x_1, x_4)\, N(x_2, x_3) = 0. \end{aligned} \tag{4.1.11}$$

Opšte rešenje ovog sistema je

(4.1.12) $$M(u, v)=\Delta\{H_1(u), K_1(v)\}, \quad N(u, v)=\Delta\{H_2(u), K_2(v)\},$$

gde su H_1, H_2, K_1, $K_2: R\rightarrow R$ proizvoljne funkcije.

Prema (4.1.12), (4.1.9) i (4.1.2), dobijamo

(4.1.13) $$f(u, v)=\frac{2p-\beta}{4p}\,\Delta\{H_1(u), K_1(v)\}+\frac{2p+\beta}{4p}\,\Delta\{H_2(u), K_2(v)\},$$

(4.1.14) $$g(u, v)=\frac{1}{2p}\,\Delta\{H_1(u), K_1(v)\}-\frac{1}{2p}\,\Delta\{H_2(u), K_2(v)\}.$$

Funkcije (4.1.13) i (4.1.14) zaista su rešenja sistema S.

Dakle, opšte rešenje sistem S, u slučaju $\frac{\beta^2}{4}+\alpha=p^2$ $(p>0)$, dato je obrascima (4.1.13) i (4.1.14), gde su H_1, H_2, K_1, $K_2: R\rightarrow R$ proizvoljne funkcije.

Treći slučaj: $\frac{\beta^2}{4}+\alpha=-p^2$ $(p>0)$. Na osnovu smene (4.1.9), sistem (4.1.3) postaje

(4.1.15)
$$\begin{aligned} &M(x_1, x_2)\,N(x_3, x_4)+M(x_1, x_3)\,N(x_4, x_2)+M(x_1, x_4)\,N(x_2, x_3)\\ &\quad+N(x_1, x_2)\,M(x_3, x_4)+N(x_1, x_3)\,M(x_4, x_2)+N(x_1, x_4)\,M(x_2, x_3)=0,\\ &M(x_1, x_2)\,M(x_3, x_4)+M(x_1, x_3)\,M(x_4, x_2)+M(x_1, x_4)\,M(x_2, x_3)\\ &\quad+N(x_1, x_2)\,N(x_3, x_4)-N(x_1, x_3)\,N(x_4, x_2)-N(x_1, x_4)\,N(x_2, x_3)=0.\end{aligned}$$

Ako stavimo $x_1=x_2=x_3=x_4=u$, iz poslednjeg sistema dobijamo

(4.1.16) $$M(u, u)=N(u, u), \quad M(u, u)\cdot N(u, u)=0,$$

odakle sleduje

(4.1.17) $$M(u, u)\equiv 0, \quad N(u, u)\equiv 0.$$

Neka je (a, b) $(a, b\in R)$ takav par brojeva da je $M(a, b)\neq 0$. Sistem jednačine (4.1.15) za $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=u$, $x_4=v$ daje

(4.1.18)
$$\begin{aligned} &M(a, b)\,N(u, v)+M(a, u)\,N(v, b)+M(a, v)\,N(b, u)\\ &\quad+N(a, b)\,M(u, v)+N(a, u)\,M(v, b)+N(a, v)\,M(b, u)=0,\\ &M(a, b)\,M(u, v)+M(a, u)\,M(v, b)+M(a, v)\,M(b, u)\\ &\quad-N(a, b)\,N(u, v)-N(a, u)\,N(v, b)-N(a, v)\,N(b, u)=0.\end{aligned}$$

Ako ovde stavimo $v=b$, na osnovu (4.1.17), dobijamo

(4.1.19)
$$\begin{aligned} &M(a, b)\,\{N(u, b)+N(b, u)\}+N(a, b)\,\{M(u, b)+M(b, u)=0,\\ &M(a, b)\,\{M(u, b)+M(b, u)\}-N(a, b)\,\{N(u, b)+N(b, u)\}=0.\end{aligned}$$

U slučaju $N(a, b)=0$, iz (4.1.19) nalazimo

(4.1.20) $$M(u, b)=-M(b, u), \quad N(u, b)=-N(b, u).$$

Ako je $N(a, b)\neq 0$, jedna jednostavna kombinacija jednačina sistema (4.1.19) dovodi do

$$\{M^2(a, b)+N^2(a, b)\}\,\{M(u, b)+M(b, u)\}=0.$$

Kako je $M^2(a, b)+N^2(a, b)>0$, odavde proizilazi $M(u, b)=-M(b, u)$. Na osnovu dobijene jednakosti iz (4.1.19) dobijamo

$$M(a, b)\{N(u, b)+N(b, u)\}=0$$

odnosno

$$N(u, b)=-N(b, u).$$

Prema tome, pokazali smo da (4.1.20) važi u svim mogućnostima.

U slučaju $N(a, b)\neq 0$, jednostavna kombinacija jednačina (4.1.18) daje

$$M(u, v)=\Delta\{H_1(u),\ qK_1(v)+rK_2(v)\}+\Delta\{H_2(u),\ rK_1(v)-qK_2(v)\}, \tag{4.1.21}$$

sa oznakama

$$\begin{gathered} M(a, u)=H_1(u),\ N(a, u)=H_2(u),\ M(b, u)=K_1(u),\ N(b, u)=K_2(u); \\ \frac{M(a, b)}{M^2(a, b)+N^2(a, b)}=q,\quad \frac{N(a, b)}{M^2(a, b)+N^2(a, b)}=r. \end{gathered} \tag{4.1.22}$$

Ako je $N(a, b)=0$, iz (4.1.18) neposredno dobijamo (4.1.21).

Koristeći (4.1.21) i oznake (4.1.22), iz (4.1.18) nalazimo

$$N(u, v)=\Delta\{H_1(u),\ qK_2(v)-rK_1(v)\}+\Delta\{H_2(u),\ qK_1(v)+rK_2(v)\}. \tag{4.1.23}$$

Zamenjujući (4.1.21) i (4.1.23) u (4.1.9) i (4.1.2), dolazimo do

$$\begin{aligned} f(u, v)=\Delta&\left\{H_1(u),\ \frac{2p(q-r)-\beta(q-r)}{4p}K_1(v)+\frac{2p(q+r)+\beta(q-r)}{4p}K_2(v)\right\} \\ +\Delta&\left\{H_2(u),\ \frac{2p(q+r)-\beta(q+r)}{4p}K_1(v)-\frac{2p(q-r)+\beta(q-r)}{4p}K_2(v)\right\}, \end{aligned} \tag{4.1.24}$$

$$\begin{aligned} g(u, v)=\Delta&\left\{H_1(u),\ \frac{q+r}{2p}K_1(v)+\frac{r-q}{2p}K_2(v)\right\} \\ +\Delta&\left\{H_2(u),\ \frac{r-q}{2p}K_1(v)-\frac{q+r}{2p}K_2(v)\right\}. \end{aligned} \tag{4.1.25}$$

Funkcije (4.1.24) i (4.1.25) su rešenja sistema (4.1.1).

Prema tome, opšte rešenje sistema **S**, u slučaju $\frac{\beta^2}{4}+\alpha=-p^2$ $(p>0)$, dato je formulama (4.1.24) i (4.1.25) pri čemu su $H_1, H_2, K_1, K_2: R\to R$ proizvoljne funkcije; q, r $(\in R)$ su proizvoljne konstante.

Na osnovu izloženog imamo sledeći rezultat:

Teorema 4.1.1. — *Opšte rešenje sistema* **S** *određeno je sledećim formulama:*

1° (4.1.7), (4.1.8) *u slučaju* $\frac{\beta^2}{4}+\alpha=0$,

2° (4.1.13), (4.1.14) *u slučaju* $\frac{\beta^2}{4}+\alpha=p^2$ $(p>0)$,

3° (4.1.24), (4.1.25) *u slučaju* $\frac{\beta^2}{4}+\alpha=-p^2$ $(p>0)$;

$H_1, H_2, K_1, K_2: R\to R$ *su proizvoljne funkcije,* k, q, r $(k, q, r\in R)$ *su proizvoljne konstante.*

5. NEKA OTVORENA PITANJA I MOGUĆNOSTI DALJIH GENERALIZACIJA

5.1. Neka otvorena pitanja

1. Jednačina $\mathbf{F}_2$ u potpunosti je rešena samo u slučajevima $n=2$ i $n=3$. U ostalim slučajevima navedena su neka njena partikularna rešenja. Prema tome, ostaje otvoreno pitanje opšteg rešenja jednačine $\mathbf{F}_2$ za $n>3$.

2. Jednačina $\mathbf{F}$ za slučaj $n=2$ pripada i sledećoj klasi funkcionalnih jednačina:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n+i})\, f(x_{n+i+1}, x_{n+i+2}, \dots, x_{2n-1+i}, x_{2n+i}) = 0$$

pri čemu je $x_k = x_{k-n-1}$ za $k>2n$.

Opšte rešenje ove jednačine nije poznato.

3. Za jednačinu $\mathbf{F}_5$ ostaje da se dokaže ili opovrgne postavljena hipoteza. Isto tako, u slučaju kada pored trivijalnih postoje i druga rešenja ove jednačine, ostaje otvoreno pitanje šta je opšte rešenje te jednačine.

4. Za jednačinu $\mathbf{F}_9$, u slučaju $n-k=2m$ ostaje otvoreno pitanje opšteg rešenja.

5.2. Mogućnosti daljih generalizacija

1. U jednom radu (videti: [6]) sa prof. D. S. Mitrinovićem i S. B. Prešićem posmatrali smo sledeću funkcionalnu jednačinu

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n) + F(x_1, x_3, x_4, \dots, x_n, x_2) + \cdots + F(x_1, x_n, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}) = 0$$

gde je

$$\begin{aligned}
F(u_1, u_3, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n) &= f(u_1, g_1(u_2, \dots, u_{p+1}))\, \{f(g_2(u_{p+2}, \dots, u_{p+q+1}), g_3(u_{p+q+2}, \dots, u_n)) \\
&\qquad + f(g_3(u_{p+2}, \dots, u_{p+r+1}), g_2(u_{p+r+2}, \dots, u_n))\} \\
&\quad + f(u_1, g_2(u_3, \dots, u_{q+1}))\, \{f(g_1(u_{q+2}, \dots, u_{p+q+1}), g_3(u_{p+q+2}, \dots, u_n)) \\
&\qquad + f(g_3(u_{q+2}, \dots, u_{q+r+1}), g_1(u_{q+r+2}, \dots, u_n))\} \\
&\quad + f(u_1, g_3(u_2, \dots, u_{r+1}))\, \{f(g_1(u_{r+2}, \dots, u_{p+r+1}), g_2(u_{p+r+2}, \dots, u_n)) \\
&\qquad + f(g_2(u_{r+2}, \dots, u_{q+r+1}), g_1(u_{q+r+2}, \dots, u_n))\}
\end{aligned}$$

$$(p+q+r=n-1).$$

Ova jednačina predstavlja jednu generalizaciju jednačine **F** za slučaj $n=2$. Moguće je posmatrati analogne generalizacije za funkcionalne jednačine koje su ovde rešavane (npr. jednačine $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_4$ itd).

2. Interesantno bi bilo rešiti sledeću funkcionalnu jednačinu:

$$\alpha_1 f(x_1, x_2, x_3) f(x_4, x_5, x_6) + \alpha_2 f(x_1, x_2, x_4) f(x_5, x_6, x_3)$$
$$+\alpha_3 f(x_1, x_2, x_5) f(x_6, x_3, x_4) + \alpha_4 f(x_1, x_2, x_6) f(x_3, x_4, x_5) = 0,$$

koja predstavlja jednu od mogućih generalizacija jednačine $\mathbf{F}_2$ za slučaj $n=3$. Primetimo da ova jednačina ima i drugih rešenja osim trivijalnih samo ako je ispunjen uslov:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Naročito je veliki broj mogućih generalizacija kod jednačina $\mathbf{F}_7$, $\mathbf{F}_8$, $\mathbf{F}_9$ i $\mathbf{F}_{10}$. Funkcionalna jednačina (5.1.1) u kojoj je funkcija F umesto formule (5.1), data na sledeći način

$$F(x_0, x_1, \ldots, x_{4m-1})$$
$$= \{f(u_0, v)-f(v_1, u_1)+f(u_2, v_2)- \cdots +f(u_{2r-2}, v_{2r-2})-f(v_{2r-1}, u_{2r-1})\}$$
$$\times \{f(w_0, z_0)-f(z_1, w_1)+ \cdots +f(w_{2m-2r-2}, z_{2m-2r-2})-f(v_{2m-2r-1}, w_{2m-2r-1})\}$$
$$f: K^2 \rightarrow K; \quad u_i \in \{x_0, x_2, \ldots, x_{4r-2}\}, \quad v_i \in \{x_1, x_3, \ldots, x_{4r-1}\} \quad (i=0, 1, \ldots,$$
$$2r-1); \quad w_j \in \{x_{4r}, x_{4r+2}, \ldots, x_{4m-2}\}, \quad z_j \in \{x_{4r+1}, x_{4r+3}, \ldots, x_{4m-1}\}$$
$$(j=0, 1, \ldots, 2m-2r-1); \quad u_\alpha \neq u_\beta, \; v_\alpha \neq v_\beta, \; w_\alpha \neq w_\beta, \; z_\alpha \neq z_\beta \text{ za } \alpha \neq \beta).$$

sadrži u sebi kao partikularan slučaj jednačinu $\mathbf{F}_{10}$. Funkcija $f(u, v) = g(v) - g(u)$ i $f(u, v) = C$ ($=$const) rešenja su i ove jednačine ali ostaje otvoreno pitanje takvih rešenja.

4. U jednačinama $\mathbf{F}_7$, $\mathbf{F}_8$, $\mathbf{F}_9$ i $\mathbf{F}_{10}$ svaku funkciju f možemo zameniti sa $\alpha_\nu f$ (α_ν konstanta koja se menja od člana do člana) i postaviti problem rešavanja takvih opštijih jednačina. Primer jedne takve jednačine je slučaj kada je funkcija F data sledećim izrazom (videti: [5]):

$$F(x_0, x_1, \ldots x_{2n-1})$$
$$= \{f(x_0, x_1) + f(x_2, x_3) + \cdots + f(x_{2k-2}, x_{2k-1})\}$$
$$\times \{\alpha_0 f(x_{2k}, u_0) + \alpha_1 f(x_{2k+1}, u) + \cdots + \alpha_{n-k-1} f(x_{n-k-1}, u_{n-k-1})\},$$

sa $u_\nu = x_{2n-\nu-1}$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n-k-1$). Takva funkcionalna jednačina ima kao rešenje funkciju $f(u, v) = g(u) - g(v)$, međutim nije poznat karakter takvog rešenja.

5. U vezi sa sistemom jednačine **S** moguće je postaviti problem: Ispitati sistem u kome se umesto članova oblika

$$f_i(x_1, x_2) f_j(x_3, x_4) + f_i(x_1, x_3) f_j(x_4, x_2) + f_i(x_1, x_4) f_j(x_2, x_3)$$

pojavljuju neki drugi izrazi koji učestvuju u nekoj od posmatranih jednačina.

6. Primetimo najzad sledeće. U svim funkcionalnim jednačinama koje smo posmatrali nepoznata funkcija je bila kompleksna funkcija kompleksnih promenljivih (izuzev jednačine $\mathbf{F}_5$ i sistema **S**, gde su nepoznate funkcije bile realne funkcije realnih promenljivih). Mogućno je posmatrati i druge slučajeve. Tako, na primer, interesantno je rešiti sledeću jednačinu

$$F(X, Y)\, F(U, V) + F(X, U)\, F(V, Y) + F(X, V)\, F(Y, U) = 0$$

gde su X, Y, U, V, F matrice, kao i odgovarajuće jednačine za $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$ itd.

Isto tako, interesantan je slučaj kada su X, Y, U, V, F vektori.

6. BIBLIOGRAFIJA

a) Citirani radovi

[1] L. Carlitz: *A special functional equation*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, serija: Matematika i fizika, № 97, 1963, p. 1—3.

[2] D. S. Mitrinović — S. B. Prešić: *Sur une équation fonctionnelle cyclique d'ordre supérieur*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, serija: Matematika i fizika, № 70, 1962, p. 1—2.

[3] D. S. Mitrinović — S. B. Prešić: *Sur une classe d'équations fonctionnelles homogenes du second degré*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta u Beogradu, serija: Matematika i fizika № 71, 1962, p. 3—6.

[4] D. S. Mitrinović — S. B. Prešić: *Sur une équation fonctionnelle cyclique non linéaire*, Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. 253, 1962, p. 611—613.

[5] D. S. Mitrinović — S. B. Prešić — P. M. Vasić: *Sur deux équations fonctionnelles cycliques non linéaires*, Vesnik Društva matematičara i fizičara N. R. Srbije, t. 15, 1963, p. 3—6.

[6] D. S. Mitrinović — P. M. Vasić — S. B. Prešić: *Sur une équation fonctionnelle du second degré*, Publications de l'Institut mathématique de Belgrade, t. 3, 1963 p. 57—60.

[7] D. S. Mitrinović — P. M. Vasić: *Quelques équations fonctionnelles cycliques non linéaires a propriétés curieuses*, Publications de l'Institut mathématique de Belgrade, t. 3, 1963, p. 105—114.

[8] D. S. Mitrinović — P. M. Vasić: *O jednoj cikličnoj homogenoj jednačini drugog reda*. Matematički vesnik, t. 1, 1964, p. 5—11.

[9] P. M. Vasić: *Équation fonctionnelle d'un certain type de déterminants*, Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. 256, 1963, p. 1898.

[10] P. M. Vasić: *Équation fonctionnelle d'un certain type de déterminants*, Publications de l'Institut mathématique de Belgrade, t. 2, 1962, p. 65—70.

[11] P. M. Vasić: *Une équation fonctionnelle homogène du second degré*, Publications de l'Institut mathematique de Belgrade, t. 3, 1963, p. 35—40.

[12] P. M. Vasić: *Équation fonctionnelle du second ordre dont la solution générale dans le domaine de variables complexes peut être determinée*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, serija: Matematika i fizika, № 117, 1963.

[5] G. Iuga: *Courbes planes déterminées par une certaine condition fonctionnelle*, Bull. Soc. Sci. Cluj, t. 2, 1924, p. 358—368.

[6] D. S. Mitrinović — D. Ž. Đoković: *Ciklične funkcionalne jednačine*, Matematička biblioteka, № 22: *Izabrana poglavlja iz matematike* II, Beograd 1962, p. 5—23.

[7] D. S. Mitrinović — D. Ž. Đoković: *Neki nerešeni problemi u teoriji funkcionalnih jednačina*, Matematička biblioteka, № 25: *Neki nerešeni problemi u matematici*, Beograd, 1963, p. 153—168.

b) Ostala literatura:

[1] J. Aczél: *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*, Basel, 1961.

[2] O. E. Gheorghiu: *Sur un systeme d'équations fonctionnelles qui généralise l'équation fonctionelle de D. S. Mitrinović, étudiée aussi par J. Aczél*, Publikacije Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, serija: Matematika i fizika, № 37, 1960.

[3] M. Ghermănescu: *Sur quelques équations fonctionnelles linéaires*, Bulletin de la Société mathématique de Françe, t. 68, 1940, p. 109—128.

[4] M. Ghermănescu: *Ecuaţii functionale*, Bucureşti, 1960.

Résumé

SUR CERTAINES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES DU SECOND DEGRÉ

Petar M. Vasić

Ce travail contient les chapitres suivants:

0. Introduction;

1. Généralisation de certains résultats de D. S. Mitrinović et S. B. Prešić;

2. Une classe d'équations fonctionnelles cycliques;

3. Quelques équations fonctionnelles cycliques du second degré à propriétés curieuses;

4. Un systéme d'équations fonctionnelles qui contient l'équation **F** pour le cas $n=2$;

5. Certaines questions ouvertes et possibilités pour les généralisations ultérieures;

6. Bibliographie.

0. Dans l'introduction nous avons cité les plus importants résultats et leurs rapports avec les résultats connus.

1. Dans la première partie on a donné certaines généralisations de l'équation fonctionnelle (1.1.1) suivie de (1.1.2) (équation **F**) pour laquelle D. S. Mitrinović et S. B. Prešić ont démontré (voir [2]) que la solution générale est la fonction (1.1.3) dans le cas où $n=2$ et (1.1.4) dans le cas où $n>2$ (g, $h: K \to K$ sont des fonctions arbitraires; K, l'ensemble des nombres complexes).

La première généralisation de l'équation F est l'équation fonctionnelle (1.1.5), où la fonction F est donnée par (1.1.2), $\alpha_i (i=1, 2, \ldots, 2n-1)$ étant des constantes complexes, non toutes nulles. La solution générale de cette équation (équation $\mathbf{F}_1$) est:

1° La fonction (1.1.6) dans le cas où $\sum_{i=1}^{2n-1} \alpha_i = 0$, $(n \geqslant 2)$;

2° La fonction (1.1.3) pour $n=2$ et (1.1.4) pour $n>2$, dans le cas où $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2n-1}$ $(\neq 0)$;

3° La fonction (1.1.4), dans tous les autres cas.

Si l'on a $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{2n-1}$ $(\neq 0)$, l'équation $\mathbf{F}_1$ se ramène à l'équation **F**.

Dans [12] nous avons résolu l'équation $\mathbf{F}_1$ pour le cas $n=2$.

Une deuxième généralisation se rapporte à l'équation **F** dans le cas où $n=2$; nous y avons considéré l'équation (1.2.3) (équation $\mathbf{F}_2$) qui se ramène à l'équation **F** si l'on a $n=2$.

L'équation (1.2.3) est complètement résolue dans le cas où $n=3$. Alors, la solution la plus générale est déterminée à l'aide de (1.2.7) et (1.2.8) (F, G, F_1, F_2, F_3, étant des fonctions quelconques).

Dans le cas général, nous avons démontré que la fonction (1.2.4) est une solution particulière de l'équation $\mathbf{F}_2$. Cette solution est en même temps la solution générale dans la classe de tous les fonctions ayant la propriété (1.3.24).

La troisième équation (équation $\mathbf{F}_3$) traitée dans le premier chapitre, à savoir (1.3.4), $\theta_{i,j}$ est un opérateur défini par (1.3.3) et

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{kn}) = \prod_{i=0}^{k-1} f(x_{ni+1}, x_{ni+2}, \ldots, x_{ni+n})$$

$$(f: K^n \to K, \ n > 1).$$

Cette équation qui généralise l'équation fonctionnelle $\mathbf{F}$, a pour solution générale une fonction de même structure que la solution générale de l'équation $\mathbf{F}$. On a démontré que la solution générale de l'équation $\mathbf{F}_3$ est (1.3.5) dans le cas $k > 2$ et (1.3 6) dans le cas $k = 2$ ($F_1, F_2, \ldots, F_n: K \to K$ sont des fonctions quelconques).

Si l'on a $n = 2$, ces solutionssont identiques à celles de l'équation $\mathbf{F}$. Étant donné que la fonction f, la solution de l'équation $\mathbf{F}_3$, possède la propriété formulée par (1.3.24), on peut réduire l'équation $\mathbf{F}_3$, pour $n = 2$, à l'équation $\mathbf{F}$.

Dans le même sens, l'équation (1.3.4) est une généralisation de l'équation (1.3.1) de Carlitz (voir [1]).

Pour l'équation $\mathbf{F}_3$, dans le cas $k = 2$, voir [9] et [10].

2. Dans le deuxième chapitre on a consideré l'équation fonctionnelle cyclique (2.1.1), suivie de (2.1.2) ($f: K^2 \to K$; ν_i nombres nonnégatifs différents) (équation $\mathbf{F}_4$).

Pour $\nu_i = 0$, nous avons démontré que la solution générale est:

La fonction (2.1.4) si l'un des six conditions 1°—6° est remplie;

La fonction (2.1.5) si l'un des six conditions 7°—12° est remplie;

La fonction (2.1.6), dans tous les autres cas.

Dan le cas où $\nu_i \neq 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), l'équation $\mathbf{F}_4$ n'est pas complètement résolue. Ici nous n'avons traité que le problème de l'existence de la solution non triviale dans le cas où $f: R^2 \to R$ (R ensemble des nombres réels) (équation $\mathbf{F}_5$). En liaison avec l'équation $\mathbf{F}_5$ nous avons donné les conditions nécessaires pour l'existence des solutions non triviales: Il faut que (2.2.8) ou (2.2.10) soit valable.

On a démontré également que chaque solution en question possède la propriété (2.2.11). Enfin, nos avons admis l'hypothèse que l'équation $\mathbf{F}_5$ possède des solutions non triviales si, et seulement si, on a (2.2.13) ou (2.2.14).

3. Dans le troisième chapitre nous avons étudié quelques équations construites en partant de l'équation (3.1.1) avec (3.1.2), par la permutation des variables et par le changement de signes, d'apres une loi fixée.

La solution générale de l'équation (3.1.1), suivie de (3.1.2) (équation $\mathbf{F}_6$), déterminée dans [1], est (3.1.3).

Nous avons démontré que la solution générale de l'équation (3.1.1) avec (3.2.1) (équation $\mathbf{F}_7$) est réprésentée également par (3.1.3).

L'équation fonctionnelle suivante, considérée dans ce chapitre, est (3.1.1) avec (3.3.1) (équation $\mathbf{F}_8$). On a démontré que l'équation $\mathbf{F}_8$, dans le cas où $k = 2m - 1$, a comme solution générale la fonction (3.3.2), tandis que dans le cas $k = 2m$ sa solution est (3.3.2) ou $f(u, v) = h(v)$ ($h: K \to K$ une fonction quelconque).

Relativement à l'équation (3.1.1), dans le cas où la fonction F a la forme (3.4.1) (l'équation $\mathbf{F}_9$) nous avons détérminé la solution générale seulement pour $n-k=2m+1$. Alors, la solution générale a la forme (3.4.2). Nous avons indiqué quelques solutions particulières pour $n-k=2m+1$.

Finalement, pour l'équation (3.1.1), suivie de (3.5.1) (équation $\mathbf{F}_{10}$), nous avons établi que la solution générale est soit (3.5.2) soit une constante.

Les équations construites en partant de l'équation F_6 par la permutation des variables sont analysées pour la premiére fois dans l'article [7]. Les résultats donnés ici représentent une généralisation et des développements des résultats donnés dans [7].

L'équation $\mathbf{F}_7$ a été résolue dans [7].

En partant de $\mathbf{F}_8$, pour $u_i=x_{2i+1}$ $(i=0, 1, \ldots, k-1)$ et $v_j=x_{2j+2}$ $(j=0, 1, \ldots, k-2)$, on obtient l'équation laquelle a été résolue dans l'article cité. Pareillement, pour $v_i=x_{2k+2i}$, $w_i=x_{2k+2i+1}$ $(i=0, 1, \ldots, n-k-1)$, à partir de $\mathbf{F}_9$ no obtient une équation de [7]. L'équation $\mathbf{F}_{10}$ apparait ici pour la première fois.

4. Dans ce chapitre nous avons résolu le système (4.1.1) (système **S**) qui a trois types des solutions suivant que $\frac{\beta^2}{4}+\alpha$ est positif, négatif ou zéro.

Le système **S** se ramène à l'équation **F**, dans le cas où $n=2$, si l'on pose $g\equiv 0$.

* * *

Enfin, je tiens à exprimer ma reconnaisance au professeur D. S. Mitrinović qui m'a initié aux travaux scientifiques et qui m'a donné — au cours de l'élaboration de ce travail — des importants conseils et suggestions.

Je remercie également D.Ž. Đoković et S. B. Prešić qui ont lu en manuscrit certaines parties de ce travail.