PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 127 (1964)

UN THÉORÈME SUR LA CONVERGENCE UNIFORME DE LA SÉRIE DE DIRICHLET À LA BORDURE*

Lazar Karadžić

Théorème — Pour que la série de Dirichlet

$$\sum_{1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \ (a_n > 0) \tag{1}$$

$$(0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \to \infty, \ s = x + yi)$$

converge uniformément sur les segments de l'axe de convergence $R_0 \{s\} = C \ (|C| < \infty)$

$$\delta < |y| < \frac{2\pi}{h} - \delta \quad (\delta > 0, \ h = \lim (\lambda_{n+1} - \lambda_n))$$

il faut et il suffit

$$\sum_{1}^{\infty} a_n^2 e^{-2\lambda C} \lg_p n < \infty \tag{2}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+r}} e^{-(\lambda_n - \lambda_{n+r}) C} = 1 + O\left((n \lg n \ldots \lg_{p-1} n)^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{3}$$

$$(r = \pm 1, \ \pm 2, \ldots, \ \pm t)$$

$$0 < (\lambda_2 - \lambda_1)|y| < \cdots < (\lambda_{n+1} - \lambda_n)|y| < \cdots < \beta < 2\pi; \tag{4}$$

ou bien que la condition (4) *soit satisfaite aussi bien que les conditions suivantes:*

$$\sum \frac{1}{\lambda_n^{2\alpha}} < \infty \quad (0 < \alpha < \infty) \tag{5}$$

$$\frac{a_n}{a_{n+r}} e^{-(\lambda_n - \lambda_{n+r}) C} = 1 + O\left(\lambda_k^{-\alpha}\right) \tag{6}$$

$$a_n e^{-\lambda_n C} = O\left(\lambda_n^{-\alpha}\right) \tag{7}$$

La somme partielle de la série (1) dans un point $s = C + yi$ de l'axe de convergence peut être réduite à la forme

$$\sum_{1}^{p} \alpha_k a_k - \beta_k b_k$$

* Présenté par D. Mihailović, S. Fempl et S. Ćetković.

de la façon suivante:

$$(8) \qquad s_n(s) = \sum_1^n a_k e^{-\lambda_k s} = \sum_1^n \frac{a_k}{c_k} c_k e^{-\lambda_k C} \cos \lambda_k y - i \sum_1^n \frac{a_k}{c_k} c_k e^{-\lambda_k C} \sin \lambda_k y =$$

$$\sum_1^p \frac{a_{m_k}}{c_{m_k}} e^{-\lambda_{m_k} C} c_{m_k} \cos \lambda_{m_k} y + \sum_1^q \frac{a_{n_k}}{c_{n_k}} e^{-\lambda_{n_k} C} c_{n_k} \cos \lambda_{n_k} y -$$

$$i \left[\sum_1^r \frac{a_{p_k}}{c_{p_k}} e^{-\lambda_{p_k} C} c_{p_k} \sin \lambda_{p_k} y + \sum_1^t \frac{a_{q_k}}{c_{q_k}} e^{-\lambda_{q_k} C} c_{q_k} \sin \lambda_{q_k} y \right]$$

où

$$(9) \qquad \begin{cases} c_1 > c_2 > \cdots > c_n \to 0, \ \sum_1^\infty c_n^2 < \infty, \ \lim_{n \to \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 1; \\ \cos \lambda_{m_k} y > 0, \ \cos \lambda_{n_k} y < 0, \ \sin \lambda_{p_k} y > 0, \ \sin \lambda_{q_k} y < 0; \\ p + q = r + t = n. \end{cases}$$

En vertu des théorèmes 1 et 2 du travail [1], la série (8) converge uniformément dans l'intervalle $(\delta, \frac{2\pi}{h} - \delta)$ si les conditions (2), (3) et (4) ou bien les conditions (4), (5), (6) et (7) sont satisfaites. C'est alors que

$$(10) \qquad \lim_{n \to \infty} \lg \frac{\prod_1^q (1 + c_{n_k} \cos \lambda_{n_k} y)}{\prod_1^p (1 - c_{m_k} \cos \lambda_{m_k} y)} = C_1 \quad (|C_1| < \infty)$$

$$(11) \qquad \lim_{n \to \infty} \lg \frac{\prod_1^t (1 + c_{q_k} \sin \lambda_{p_k} y)}{\prod_1^r (1 - c_{p_k} \sin \lambda_{p_k} y)} = C_2 \quad (|C_2| < \infty)$$

$$(12) \qquad \left| \sum_1^\infty e^{-\lambda_k y i} \right| = O(1).$$

Si

$$(13) \qquad c_n = (n \lg n \ldots \lg_{p-1} n)^{-\frac{1}{2}} (\lg_p^\alpha n)^{-1} \left(\alpha > \frac{1}{2} \right)$$

les suites (10) et (11) convergent en tout point où la relation (12) est satisfaite. Si la condition (4) est remplie, la relation (12) est satisfaite dans le cas spécial. La relation (12) est, donc, satisfaite, sous la condition (4), dans l'intervalle

$$|y| \in (\delta, \frac{2\pi}{h} - \delta).$$

De (13), et en vertu du théorème 2 du travail [1], il s'ensuivent les relations (2) et (3). Pourtant, si

$$c_n = \frac{1}{\lambda_n^{\alpha}} \qquad (0 < \alpha < \infty)$$

où

$$\sum_1^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{2\alpha}} < \infty ,$$

il résulte alors, en vertu du théorème 1 du travail susmentionné [1], les relations (6) et (7). En résumant toutes ces conditions on arrive au théorème ci-dessus formulé.

Si les termes de la suite $\{\lambda_n\}$ satisfont à la condition

$$\lambda_2 - \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n+1} - \lambda_n \to \infty$$

et si les conditions (2), (3) et (4) ou bien les conditions (4), (5) et (6) sont satisfaites, l'axe de convergence $R_e\ \{s\} = C\ (|c| < \infty)$ est alors la ligne singulière de la fonction $f(s)$ qui est définie par la série (1).

Si

$$\alpha_n = \arg a_n$$

la relation (12) est alors un cas spécial de la relation

$$\left| \sum_1^n e^{(\alpha_k - \lambda_k y)\, i} \right| = O(1). \tag{14}$$

Il s'ensuit de là, en vertu du théorème 2 du travail [1] ce résultat:

Pour que la série de Dirichlet

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s} \quad (\alpha_n = \arg a_n)$$

converge uniformément dans l'intervalle $\alpha < y < \beta$ *sur l'axe de convergence* $R_e \{s\} = C$ *il faut et il suffit que la suite* (14) *soit uniformément limitée dans cet intervalle et que*

$$\sum |a_n|^2 e^{-2\lambda_n C} \lg_p n < \infty$$

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+r}} \right| e^{-(\lambda_n - \lambda_{n+r})\, C} = 1 + O\left((n \lg n \ \ldots\ \lg_{p-1} n)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$(r = \pm 1,\ \pm 2, \ldots, \pm t).$$

Si

$$0 < \alpha_2 - \alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_{n+1} - \alpha_n \leqslant \cdots ,$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 > \cdots > \lambda_{n+1} - \lambda_n > \cdots ,$$

la condition (14) est alors satisfaite dans le cas spécial pour $y > \frac{\alpha - 2\pi}{h} + \delta$, où $\lim\limits_{n \to \infty} (\alpha_{n+1} - \alpha_n) = \alpha$, $\lim\limits_{\to \infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = h$. Ainsi, par exemple, la série de Dirichlet

$$\sum \frac{(-1)^n \lg n + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{n^s}$$

converge uniformément sur l'axe de convergence $R_e\{s\} = 1$ car $\alpha = \pi$, $h = 0$,

$$\sum \left[\frac{\lg n + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{n} \right]^2 \lg n < \infty ,$$

$$\frac{\lg n + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\lg (n+r) + \frac{(-1)^{n+r}}{\sqrt{n+r}}} \cdot \frac{n+r}{n} = 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. Karadžić: *Remarques sur certains théorèmes de la théorie de séries* — travail paru dans ces Publications.