PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 117 (1963)

ÉQUATION FONCTIONNELLE DU SECOND ORDRE DONT LA SOLUTION GÉNÉRALE DANS LE DOMAINE DE VARIABLES COMPLEXES PEUT ÊTRE DÉTERMINÉE*

Petar M. Vasić

Dans l'article [1] on a trouvé la solution générale continue de l'équation fonctionnelle

$$\alpha f(x, y, z)+\beta f(y, z, x)+\gamma f(z, x, y)=0, \tag{1}$$

où α, β, γ désignent des constantes réelles.

Dans l'article [2] il a été montré que l'équation fonctionnelle

$$f(x_1, x_2) f(x_3, x_4)+f(x_1, x_3) f(x_4, x_2)+f(x_1, x_4) f(x_2, x_3)=0 \tag{2}$$

a pour solution générale la fonction suivante

$$f(u, v)=F(u) G(v)-F(v) G(u) . \tag{3}$$

Soient f une fonction complexe des variables complexes et α, β, γ des constantes complexes, non toutes nulles.

Relativement à l'équation

$$\alpha f(x_1, x_2) f(x_3, x_4)+\beta f(x_1, x_3) f(x_4, x_2)+\gamma f(x_1, x_4) f(x_2, x_3)=0, \tag{4}$$

qui a certaine analogie avec l'équation (1), nous allons prouver le résultat suivant:

Théorème. — *Dans le cas où* $\alpha+\beta+\gamma=0$, *la solution générale de l'équation* (4) *est*

$$f(u, v)=F(u) F(v), \tag{5}$$

où F designe une fonction arbitraire;

Dans le cas où l'on a $\alpha=\beta=\gamma$, *la solution générale de l'équation* (4) *est la fonction* (3), *F, G étant des fonctions arbitraires;*

Dans tous les autres cas, la solution générale de l'équation (4) *est*

$$f(u, v) \equiv 0. \tag{6}$$

Démonstration. — À partir de (4), en permutant cycliquement les variables x_2, x_3, x_4, on obtient

* Communiqué le 27 septembre 1963 à la séance du Département d'Analyse de l'Institut Mathématique de Belgrade.

(7) $$\alpha f(x_1, x_3) f(x_4, x_2) + \beta f(x_1, x_4) f(x_2, x_3) + \gamma f(x_1, x_2) f(x_3, x_4) = 0,$$

(8) $$\alpha f(x_1, x_4) f(x_2, x_3) + \beta f(x_1, x_2) f(x_3, x_4) + \gamma f(x_1, x_3) f(x_4, x_2) = 0.$$

Le système des équations (4), (7) et (8) est compatible si, et seulement si, la condition suivante est remplie:

(9) $$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

Dans les autres cas, la solution générale de l'éqution (4) est $f(u, v) \equiv 0$.

De (9) on obtient

(10) $$(\alpha + \beta + \gamma)\{(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2\} = 0.$$

Nous allons distinguer les cas suivants:

Premier cas: $\alpha + \beta + \gamma = 0$, avec $\alpha = \beta\,(\neq 0)$. Alors la condition (9) est remplie. L'équation (4) a la forme

(11) $$f(x_1, x_2) f(x_3, x_4) + f(x_1, x_3) f(x_4, x_2) = 2 f(x_1, x_4) f(x_2, x_3).$$

En y permutant cycliquement les variables x_2, x_3, x_4, on obtient

(12) $$f(x_1, x_3) f(x_4, x_2) + f(x_1, x_4) f(x_2, x_3) = 2 f(x_1, x_2) f(x_3, x_4).$$

En éliminant le terme $f(x_1, x_2) f(x_3, x_4)$ des équations (11) et (12), on obtient

(13) $$f(x_1, x_3) f(x_4, x_2) = f(x_1, x_4) f(x_2, x_3).$$

Pour toute solution non triviale de l'équation (11) il existe au moins un couple des nombres a, b tels que $f(a, b) \neq 0$.

Au moyen de la substitution $x_1 = a$, $x_2 = u$, $x_3 = v$, $x_4 = b$ l'équation (13) devient

(14) $$f(a, b) f(u, v) = f(a, v) f(b, u).$$

Si l'on y pose $u = b$, on arrive à

$$f(b, v) = \frac{f(b, b)}{f(a, b)} f(a, v).$$

Vu la dernière égalité, l'équation (14) devient

(15) $$f(u, v) = F(u)\ F(v),$$

avec $$\frac{\sqrt{f(b, b)}}{f(a, b)} f(a, u) = F(u).$$

La fonction (15) est justement la solution de l'équation (11).

Deuxieme cas: $\alpha + \beta + \gamma = 0$ avec $\alpha \neq \beta$. La condition (9) est remplie. Alors l'équation (4) devient

(16) $$\alpha f(x_1, x_2) f(x_3, x_4) + \beta f(x_1, x_3) f(x_4, x_2) = (\alpha + \beta) f(x_1, x_4) f(x_2, x_3).$$

L'hypothèse $\alpha = 0$ entraîne $\beta \neq 0$, et l'équation (16) prend alors la forme (13).

Supposons maintenant que $\alpha \neq 0$.

Désignons par C_1 la classe de tous les fonctions f telles que $f(u, u) \equiv 0$ et par C_2 la classe de tous les fonctions f telles que $f(u, u) \not\equiv 0$.

Dans la clase C_1 il existe, pour toute solution non triviale de l'équation (16), au moins un couple des nombres a, b tels que $f(a, b) \neq 0$. En posant $x_1 = x_3 = a$, $x_2 = x_4 = b$, de (16) on obtient

$$(17) \qquad (\alpha+\beta) f(b, a) = \alpha f(a, b).$$

Pour $x_1 = u$, $x_2 = b$, $x_3 = x_4 = a$, d'après (17), l'équation (16) se ramène à

$$(\alpha-\beta) f(a, b)\, f(u, a) = 0,$$

d'où l'on a

$$(18) \qquad f(u, a) \equiv 0.$$

En posant $x_1 = u$, $x_2 = v$, $x_3 = a$, $x_4 = b$, l'équation (16), d'après (18), donne

$$(19) \qquad f(u, v) \equiv 0.$$

Dans la classe C_2 il existe au moins un nombre complexe c, tel que $f(c, c) \neq 0$. Si l'on fait $x_1 = x_2 = x_4 = c$, $x_3 = u$, l'equation (16) fournit

$$(20) \qquad f(c, u) = f(u, c).$$

Pour $x_1 = x_2 = c$, $x_3 = u$, $x_4 = v$, l'équation (16), d'après (20), devient

$$f(u, v) = \frac{1}{f(c, c)} f(c, u)\, f(c, v),$$

ou bien,

$$(21) \qquad f(u, v) = F(u)\, F(v),$$

avec $f(c, u) = \sqrt{f(c, c)}\, F(u)$.

La fonction (21) est vraiment la solution de l'équation (16).

Étant donné que classe de toutes les fonctions f est justement $C_1 \cup C_2$ et que (21) embrasse la solution triviale (19), la solution générale de (16) est donnée par (21).

Troisième cas: $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$. En additionnant les membres correspondants des équations (4), (7) et (8), vu la condition $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, on obtient (2). Cette équation a, d'après (3), les propriétés suivantes:

$$(22) \qquad f(u, v) = -f(v, u), \quad f(u, u) \equiv 0.$$

En posant $x_1 = x_4 = u$, $x_2 = x_3 = v$, l'équation (4) donne

$$\beta f^2(u, v) + \alpha f(u, v) f(v, u) = 0.$$

De là, eu égard à (22), on trouve

$$(23) \qquad (\alpha-\beta) f^2(u, v) = 0.$$

Il faut distinguer les deux cas suivants: 1° $\alpha \neq \beta$; 2° $\alpha = \beta$.

Dans le cas $\alpha \neq \beta$, à partir de (23), on obtient (6).

Dans le cas $\alpha = \beta$, l'équation (10) donne $\alpha = \beta = \gamma$ et l'équation (4) se transforme en (2). La solution générale de cette équation est (3).

Le théorème est ainsi démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Ghermănescu: *Sur quelques équations fonctionnelles linéaires.* Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 68, 1940, p. 109—128.

[2] D. S Mitrinović et S. B. Prešić: *Sur une équation fonctionnelle cyclique d'ordre supérieur.* Publications de la Faculté d'Électrotechnique de l'Université à Belgrade, série: Mathématiques et physique, № 70 (1962).