PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ A BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 113 (1963)

RAVNOTEŽNE JEDNAČINE ZA VIŠE KRUTIH TELA

Borislav Lilić

1. PODSEĆANJE NA RAVNOTEŽNE JEDNAČINE ZA JEDNO KRUTO TELO

U proučavanju ravnoteže jednog krutog tela poglavito se upotrebljavaju dve metode.

Jedna metoda počiva na teoriji vezanih vektora. Po svome pojmovnom sadržaju ona je stoga bitno geometrijska. Njome se služi takozvana geometrijska statika.

Druga metoda se zasniva na principu virtuelnih radova, koji je pak bitno analitičkog karaktera. To je metoda analitičke statike.

Prva metoda prirodno vodi otkrivanju svih potrebnih podrobnosti o ravnoteži sila na slobodnom krutom telu; dočim druga metoda se pokazuje podesnija za ustanovljavanje ravnotežnih uslova kod krutog tela potčinjenog raznim vezama, budući da se njome iz razmatranja eliminišu sile veze.

— Uslovi za ravnotežu jednog slobodnog krutog tela mogu se formulisati na više načina. Takva mogućnost potiče od dvojakog karaktera ravnotežnih uslova: o projekcijama sila na ose i o njihovim momentima u pogledu na ose. Od kombinacija jednih i drugih ravnotežnih uslova zavisiće onda i njihove formulacije. Pri tome, ukupan broj nezavisnih ravnotežnih uslova biće različit za razne sisteme sila na krutom telu.

Pregled različitih sistema nezavisnih ravnotežnih jednačina sastavljenih prema mogućim formulacijama ravnotežnih uslova pruža naredna tabela I. [1]

Izbori momentnih i projekcijskih osa za različite formulacije ravnotežnih uslova jesu slobodni u širokim granicama. Opšti rasporedi tih osa daju se ustanoviti posebnim teoremama. [1]

— Kod neslobodnog krutog tela broj ravnotežnih uslova, u kojima intervenišu samo direktno napadne sile a ne i sile veze, redukuju se saobrazno vezama kojima je telo potčinjeno. Sa kinematičkog gledišta, taj broj ravnotežnih uslova odgovara broju stepeni slobode kretanja tela.

U narednoj tabeli II navedene su ravnotežne jednačine za najtipičnije veze jednog tela. Ravnotežne jednačine se odnose na pravougle trijedre osa $Oxyz$ izabrane saobrazno vezama tela, pri čemu su u pogledu na te ose glavni vektor i glavni momenat samo direktno napadnih sila na telu označeni sa $\vec{R}(R_x, R_y, R_z)$ i $\vec{M}^0(M_x, M_y, M_z)$. [2]

TABELA I

Sistem sila	Ukupan broj ravnotežih jednačina	Kombinacije dveju vrsti ravnotežnih jednačina	Broj jednačina o momentima sila	Broj jednačina o projekcijama sila
Proizvoljan sistem sila	6	I	6	0
		II	5	1
		III	4	2
		IV	3	3
Sistem konkurentnih sila	3	I	3	0
		II	2	1
		III	1	2
		IV	0	3
Ravan sistem sila	3	I	3	0
		II	2	1
		III	1	2
Ravan sistem konkurentnih sila	2	I	2	0
		II	1	1
		III	0	2
Sistem paralelnih sila	3	I	3	0
		II	2	1
Ravan sistem paralelnih sila	2	I	2	0
		II	1	1

TABELA II

Priroda veza		Broj ravnotežnih jednačina	Ravnotežne jednačine
Telo sa jednom nepomičnom tačkom O		3	$M_x = M_y = M_z = 0$
Telo sa jednom nepomičnom osom Oz		1	$M_z = 0$
Telo se obrće oko ose Oz i klizi duž nje		2	$R_z = M_z = 0$
Telo počiva na ravni Oxy:	1° u jednoj tački O	5	$R_x = R_y = M_x = M_y = M_z = 0$
	2° u više tačaka na osi Ox	4	$R_x = R_y = M_x = M_y = 0$
	3° u više tačaka ne na jednoj pravoj	3	$R_x = R_y = M_z = 0$

2. OPŠTE METODE ZA PROUČAVANJE RAVNOTEŽE VIŠE KRUTIH TELA

U dosadašnjoj mehaničkoj literaturi ravnoteža više krutih tela nije proučena sa poželjnom iscrpnošću. Pitanje o ravnoteži više krutih tela podvodjeno je redovno pod opšta razmatranja o ravnoteži proizvoljnog sistema materijalnih tačaka u analitičkoj mehanici; ali, ne mogu se naći neka podrobnija proučavanja o ravnoteži više krutih tela, koja bi otkrivala posebna svojstva takve ravnoteže.

— Pri uspostavljanju opštih metoda za proučavanje ravnoteže više krutih tela može se rukovoditi rasuđivanjima o ravnoteži sistema materijalnih tačaka. Pri tome, kao kod sistema materijalnih tačaka, i ovde kod sistema krutih tela treba razlikovati dva slučaja: sistem slobodnih krutih tela i sistem neslobodnih krutih tela.

1) Sistem slobodnih krutih tela.— Uslovi za ravnotežu sistema slobodnih krutih tela, analogno uslovima za ravnotežu sistema slobodnih materijalnih tačaka, mogu se formulisati neposredno na ovaj način:

1° *Da bi sistem slobodnih krutih tela bio u ravnoteži, potrebno je i dovoljno da svako telo ponaosob bude u ravnoteži.*

Umesto da se utvrđuje ravnoteža svakog krutog tela u sistemu, može se ravnoteža sila na jednom od tela zameniti ravnotežom sila koje dejstvuju na čitav sistem tela, smatrajući ovaj sistem kao jedno kruto telo. Zaista, posmatrajući, prvo, sistem od svega dva tela, ravnoteža će biti očevidno obezbeđena, kada su ispunjeni uslovi za ravnotežu sila na jednom od dvaju tela i za ravnotežu sila što napadaju na oba tela kao da ona sačinjavaju jedno kruto telo; jer, uslovi za ravnotežu sila na oba tela samo su potrebni uslovi, a za dovoljne uslove potrebno je da se njima pridruže još i uslovi za ravnotežu sila na jednom od dva tela. Isto tako, kod sistema od tri kruta tela ravnoteža će biti obezbeđena, kada su ispunjeni uslovi za ravnotežu sila na svakom od dva ma koja tela ponaosob i za ravnotežu sila na posmatranom sistemu od sva tri tela, smatrajući ga kao jedno kruto telo. I uopšte, matematičkom indukcijom se zaključuje da će ravnoteža sistema od n tela biti obezbeđena, kada su ispunjeni uslovi za ravnotežu sila na svakom od ma kojih $(n-1)$ tela ponaosob i uslovi za ravnotežu sila na čitavom sistemu od svih n tela, smatrajući ga kao jedno kruto telo. Na taj način, dolazi se do ovakve opštije formulacije uslova za ravnotežu sistema slobodnih krutih tela:

2° *Da bi sistem od n slobodnih krutih tela bio u ravnoteži, potrebno je i dovoljno da budu ispunjeni uslovi za ravnotežu sila na svakom od ma kojih $(n-1)$ tela ponaosob i uslovi za ravnotežu sila na čitavom sistemu od svih n tela, smatrajući ga kao jedno kruto telo.*

Ravnotežni uslovi za sistem slobodnih krutih tela mogu se i dalje uopštiti, time što se utvrđuje ravnoteža pojedinih grupa tela, na koje se čitav sistem zamišlja da je podeljen. Zaista, neposredno se uviđa da se u dvema prednjim formulacijama 1° i 2° ravnotežnih uslova pojedina tela u sistemu mogu zameniti proizvoljnim njihovim grupacijama. Tako se dobija ovakva uopštena formulacija ravnotežnih uslova za sistem od više slobodnih krutih tela:

3° *Da bi sistem od n slobodnih krutih tela bio u ravnoteži, potrebno je i dovoljno da, kada se sistem podeli na p grupa tela, budu ispunjeni uslovi:*

ili za ravnotežu svake grupe tela

ili za ravnotežu svake od $(p-1)$ grupa tela izabranih proizvoljno, za ravnotežu sila na svakom telu — izuzev jednog — u poslednoj p-toj grupi tela i za ravnotežu sila na čitavom sistemu od svih n tela, smatrajući ga kao jedno kruto telo.

Prednje dve formulacije 1° i 2° pokazuju se onda kao posledice ove poslednje uopštene formulacije 3°.

2) Sistem neslobodnih krutih tela. — Kod sistema neslobodnih krutih tela, kao i kod sistema neslobodnih materijalnih tačaka, sve sile koje dejstvuju na njega mogu se razvrstati u dve kategorije:

U prvu kategoriju spadaju direktno napadne ili date sile, pa ih stoga treba smatrati kao sile merodavne za ravnotežu, delom poznate delom nepoznate; a u drugu kategoriju dolaze sile veze, koje potiču od veza nametnutih pojedinim telima u sistemu, pa ih stoga treba smatrati sve kao nepoznate sile.

Pri tome još, direktno napadne sile su po pravilu spoljašnje sile za sistem. Sile veze, pak, mogu biti kako spoljašnje tako i unutrašnje sile: spoljašnje sile veze potiču od materijalnih tela izvan posmatranog sistema tela, dočim unutrašnje sile veze proizvode među sobom sama tela iz posmatranog sistema. Za spoljašnje sile veze vredi uglavnom ono što je rečeno o silama veza kod jednog krutog tela u predhodnom članu 1; zbog toga, sem izvesnih mestimičnih nagoveštaja o spoljašnjim silama veze, u daljem izlaganju će se imati u vidu poglavito unutrašnje sile veze.

Posle takvih utanačenja, kod sistema krutih tela potčinjenih međusobnim vezama može se rezonovati na analogan način kao u slučaju sistema neslobodnih materijalnih tačaka. Naime, razlikujući sile na spoljašnje direktno napadne sile i unutrašnje sile veza između tela, neposredno se izvodi ovakva formulacija ravnotežnih uslova za sistem neslobodnih tela:

4° *Pri ustanovljavanju uslova za ravnotežu sistema neslobodnih krutih tela, svako telo se može smatrati kao slobodno pod dejstvom svih sila koje se javljaju na njemu, kako spoljašnjih direktno napadnih sila tako i unutrašnjih sila veza između tela.*

Uvođenjem u razmatranje i sila veze problem o ravnoteži sistema neslobodnih krutih tela uspeva se, dakle, prevesti na problem o ravnoteži sistema slobodnih krutih tela, koji je u osnovi rešen predhodnim formulacijama ravnotežnih uslova pod 1°, 2° i 3°.

Međutim, sile veze se pojavljuju kao nepoznate veličine, koje se tek imaju odrediti iz ravnotežnih jednačina sastavljenih prema ravnotežnim uslovima za sistem neslobodnih krutih tela, kada se ona smatraju kao slobodna uz dodavanje tih nepoznatih sila veze. Zbog toga se pokazuje neophodnim da se iz sastavljenih ravnotežnih jednačina eliminišu nepoznate sile veze, te da se namesto njih dobiju jednačine sa samo direktno napadnim silama, jednačine koje će stvarno i predstavljati prave ravnotežne jednačine za posmatrani sistem neslobodnih krutih tela. Eliminisanje tih sila veze zahteva uopšte veoma zametne računske operacije, koje, dakako, ozbiljno kompromituju primenu metode po formulaciji 4°, inače vrlo jednostavne i intuitivne. Ipak, ako se ne može izbeći po toj metodi, čitav eliminacioni postupak se može sistematizovati po sledećoj šemi, koja će se pokazati korisna i za dalja opšta razmatranja.

Posmatrajmo, naime, proizvoljan sistem od n krutih tela, koja su potčinjena međusobnim vezama. Najpre, u tome sistemu od n tela uočimo jedno koje bilo telo, pa ga smatrajmo kao potpuno slobodno uz dodavanje svih sila veze kojima ostala tela u sistemu dejstvuju na njega; ravnotežne jednačine za uočeno telo, po broju najviše jednakom šest, sadržavaće stoga kako poznate direktno napadne sile tako i nepoznate sile veze, koje se sve javljaju na njemu. Zatim, između preostalih $(n-1)$ tela u sistemu uočimo bilo koje drugo telo, pa i njega smatrajmo kao potpuno slobodno uz dodavanje svih sila veze kojima ostala tela u sistemu dejstvuju na njega, podrazumevajući tu i prvo uočeno telo; ravnotežne jednačine za ovo drugo telo, po broju takođe najviše jednakom šest, sadržavaće opet kako direktno napadne sile tako i sile veze, koje se sve javljaju na njemu; među sadanje sile veze dolaze i one što potiču od prvog uočenog tela, — dakle, sile veze jednake i direktno suprotne onima kojima drugo telo dejstvuje na prvo, na osnovu zakona o jednakosti akcije i reakcije; stoga se te sile veze izvučene iz ravnotežnih jednačina za drugo telo mogu smeniti u ravnotežnim jednačinama za prvo telo, pa time i eliminisati iz čitavog sistema ravnotežnih jednačina, naravno pod pretpostavkom da je takva eliminacija po broju sila veze moguća. Posle toga, od preostalih $(n-2)$ tela uočimo bilo koje treće telo, pa smatrajmo i njega kao potpuno slobodno uz dodavanje odnosnih sila veze; sastavljajući i za njega najviše šest ravnotežnih jednačina, moći ćemo pomoću njih na analogan način eliminisati sile veze koje se javljaju između njega i prethodna dva uočena tela. I tako dalje do poslednjeg n-tog tela; smatrajući ga kao slobodno, sastavićemo i za njega najviše šest ravnotežnih jednačina, pa ćemo pomoću njih eliminisati sile veze koje se javljaju između njega i ostalih tela u sistemu. Na taj način, u dobijenom sistemu ravnotežnih jednačina biće eliminisane sve nepoznate unutrašnje sile veze, a ostaće samo spoljašnje direktno napadne sile koje dejstvuju na posmatrani sistem neslobodnih tela. Što se tiče naznačene pretpostavke o mogućnosti eliminisanja sila veze između dva i dva tela, treba dodati da će ona biti svagda zadovoljena kada se radi o vezama između tela čije se sile daju odrediti pomoću samih ravnotežnih jednačina što ih pruža statika krutih, neelastičnih tela; takve veze, po poznatom analognom terminu, mogu se nazvati *statički određene veze.*

— Iako sistematizovano na opisani način, eliminisanje nepoznatih unutrašnjih sila veze iz ravnotežnih jednačina, sastavljenih za sistem neslobodnih tela kada se ona smatraju kao slobodna uz dodavanje tih sila spoljašnjim direktno napadnim silama, još uvek ostaje veoma zametno po računskim opecijama koje se imaju svršiti. Stoga se prirodno postavlja zahtev da se ustanove metode koje će neposredno davati prave ravnotežne uslove sa samo direktno napadnim silama na posmatranom sistemu neslobodnih tela.

Jedna takva direktna metoda se zasniva na podesnom izboru projekcijskih i momentnih osa, za koje se sastavljaju ravnotežne jednačine o projekcijama i o momentima sila. O takvom podesnom izboru osa i odnosnih ravnotežnih jednačina kod sistema neslobodnih tela, pak, sugerira njihov izbor kod jednog neslobodnog tela saobrazno njegovim vezama, na način kako to za različite tipične veze podseća tabela II u članu 1. Na primer, u sistemu neslobodnih tela, ako je za prvo uočeno telo, smatrano kao da je slobodno i nepomično, vezano drugo uočeno telo jednom tačkom bez trenja, onda tri momentne ravnotežne jednačine napisane za tri nekomplanarne momentne ose kroz tu tačku neće sadržavati sile koje potiču od takve tačkaste veze; ili, ako je za prvo telo vezano drugo telo jednom osom, oko koje se ovo može obrtati bez trenja, onda momentna ravnotežna jednačina napisana za tu osu neće sadržavati sile od takve osne veze; ili, ako je za prvo telo vezano drugo telo jednom osom, oko koje se ovo može obrtati i još duž nje kliziti bez trenja, onda jedna ravnotežna jednačina o momentima i jedna ravnotežna jednačina o projekcijama za tu osu neće sadržavati sile od takve obrtno-klizne osne veze; i tako dalje za drugačije veze, posebno za one ostale tipične veze iz tabele II. To što je primerice rečeno za veze između prvog i drugog uočenog tela u sistemu vredi uopšte za svako dalje telo u izabranom njihovom poretku: ravnotežne jednačine sastavljene saobrazno vezama sa predhodnim telima, smatranim kao da su nepomična, neće sadržavati sile od tih veza. Međutim, budući da se u ravnotežnim jednačinama kod jednog tela pojavljuju uopšte sile od veza sa drugim daljim telima, to će se kod ovih drugih tela morati sastaviti ravnotežne jednačine koje će upravo sadržavati iste sile veze, kako bi se pomoću tih drugih jednačina mogle eliminisati ove sile veze iz prvih jednačina. Na primer, pri tačkastoj vezi između prvog i drugog uočenog tela u ravnotežnim jednačinama prvog tela javiće se i tri sile od takve veze; zato je onda potrebno da se kod drugog tela napišu još tri ravnotežne jednačine, koje će sadržavati iste sile veze, da bi se ove eliminisale iz prvih jednačina. Na taj način, dolazi se do jedne metode, kojom se delimičan broj ravnotežnih jednačina može odmah sastaviti u pravom obliku ili bar bez što je najviše moguće nepoznatih sila veze. Ta metoda će biti sadržana u ovakvoj formulaciji ravnotežnih uslova:

5° *Da bi sistem krutih tela potčinjenih međusobnim vezama bio u ravnoteži, potrebno je i dovoljno, pošto se izabere njihov poredak, da budu ispunjeni ravnotežni uslovi:*

za prvo telo smatrano kao da je slobodno,

a za svako dalje telo saobrazno vezama sa prethodnim telima smatranim kao da su nepomična.

Postavljenom zahtevu da se ravnotežene jednačine sastavljaju neposredno u pravom obliku, to jest bez nepoznatih sila veze, potpuno udovoljava jedna druga metoda, koja pripada analitičkoj statici. Do takve direktne metode dolazi se na osnovu principa virtuelnih radova, ali ovoga puta jedino uz ograničenje da su veze ostvarene bez trenja. Naime, posmatrajmo opet proizvoljan sistem od više krutih tela, koja su podčinjena međusobnim vezama ostvarenim bez trenja; napose, veze mogu biti one tipične, koje su za jedno telo navedene u članu 1. Tada se, kao što je poznato, za takav sistem tela pod nazivom principa virtuelnih radova izvodi sledeća formulacija ravnotežnih uslova:

6° *Da bi sistem krutih tela, koja su potčinjena međusobnim vezama bez trenja, bio u ravnoteži, potrebno je i dovoljno da, ako se sistemu nametne ma kakvo virtuelno pomeranje saobrazno sa vezama, zbir virtuelnih radova direktno napadnih sila bude jednak nuli.*

Primena ovakve formulacije ravnotežnih uslova na svaki posebni sistem od više neslobodnih krutih tela iziskuje izvođenje dveju operacija:

u prvoj operaciji treba odrediti najopštije virtuelno pomeranje sistema saobrazno sa vezama;

a u drugoj operaciji treba izraziti onda zbir virtuelnih radova direktno napadnih sila na tome najopštijem virtuelnom pomeranju sistema.

Sprovođenje tih dveju operacija takođe dosta komplikuje metodu za proučavanje ravnoteže po sadanjoj formulaciji 6°. Znači da nastojanje na neposrednom uklanjanju nepoznatih sila veze, koje se javljaju u ravnotežnim jednačinama kada se primenjuje metoda po formulaciji 5°, nije moglo proći bez odgovarajućih reperkusija u komplikovanju metode po formulaciji 6°. Ipak, budući da se radi o sistemu krutih tela, i kod ove druge metode obe operacije se mogu šematizovati.

Tako, u prvoj operaciji, određivanje najopštijeg virtuelnog pomeranja sistema od n neslobodnih krutih tela može se sprovesti po sledećoj šemi. Najpre, u sistemu od n tela uoči se jedno bilo koje telo; sa gledišta najopštijeg virtuelnog pomeranja sistema, to se telo može smatrati kao potpuno slobodno; stoga će u pogledu na jedan nepomičan trijedar osa $Oxyz$ ono raspolagati sa tri translacije u pravcu osa i sa tri rotacije oko osa. Zatim, od ostalih (n — 1) tela uoči se bilo koje drugo telo; s obzirom na eventualne veze između prvog i drugog tela, ovo drugo telo već neće biti uopšte slobodno; stoga njegovo najopštije virtuelno pomeranje mora biti saobraženo sa tim vezama; ovo će sačinjavati opet izvesne translacije i rotacije, samo uopšte u brojevima manjim ponaosob od tri. Posle toga, od ostalih (n — 2) tela uoči se bilo koje treće telo; njegovo najopštije virtuelno pomeranje mora biti saobraženo sa eventualnim vezama između prvih dvaju tela i njega, sačinjavajući takođe izvesne translacije i rotacije uopšte ponaosob ispod broja tri. I tako dalje do poslednjeg n-tog tela; njegovo najopštije virtuelno pomeranje će biti saobraženo sa eventualnim vezama između svih prethodnih (n — 1) tela i njega, sačinjavajući takođe izvesne translacije i rotacije uopšte ponaosob ispod broja tri.

— Razume se da proizvoljnost u izboru poretka uočavanih tela katkad može olakšati određivanje najopštijeg virtuelnog pomeranja čitavog sistema.

Što se tiče druge operacije, kojom treba izraziti zbir virtuelnih radova na najopštijem virtuelnom pomeranju sistema, ona je uslovljena prvom operacijom. Naime, budući da su virtuelna pomeranja pojedinih tela u sistemu sve izvesne njihove translacije i rotacije, to se virtuelni radovi direktno napadnih sila imaju izraziti za takva pomeranja. Tako se izrazi za virtuelne radove pojedinih direktno napadnih sila mogu šematizovati prema poznatim formulama. Posebno za tipične veze između tela, navedene u članu 1, šematizacija izraza za virtuelne radove još se dalje uprošćava.

Tri osnovna problema. — Pošto su ustanovljene opšte metode za proučavanje ravnoteže sistema od više krutih tela, može se preći na razmatranje samih ravnotežnih jednačina, koje se sastavljaju po tim metodama. Kao i kod jednog krutog tela, u vezi sa ravnotežnim jednačinama za više krutih tela takođe se postavljaju tri osnovna problema:

prvo, *odrediti maksimalni broj nezavisnih skalarnih jednačina ravnoteže;*

drugo, *ustanoviti sve kombinacije dveju vrsti ravnotežnih jednačina: o projekcijama sila na ose i o momentima sila u pogledu na ose;*

i treće, *naznačiti opšte rasporede projekcijskih i momentnih osa, za koje se sastavljaju ravnotežne jednačine takve da budu sigurno nezavisne.*

Prema tome, na redu je da se zasebno i podrobno rasprave sva ta tri problema o ravnotežnim jednačinama za više krutih tela. Pri tome, kako izložene opšte metode upućuju, kod svakog od njih treba razlikovati dva slučaja: sistem slobodnih tela i sistem neslobodnih tela.

3. MAKSIMALNI BROJ NEZAVISNIH SKALARNIH JEDNAČINA RAVNOTEŽE

Određivanje maksimalnog broja nezavisnih skalarnih jednačina ravnoteže kod sistema od više krutih tela ima osobitu važnost u nauci o otpornosti materijala za takozvane statički neodređene sisteme. Kod statički neodređenih sistema u prvom redu se postavlja pitanje o stepenu njihove statičke neodređenosti u pogledu nepoznatih spoljašnjih reakcija, pri čemu ove reakcije u uopštenom smislu mogu biti kako sile tako i spregovi sila. Pod stepenom statičke neodređenosti, pak, podrazumeva se razlika između broja tih nepoznatih spoljašnjih reakcija kao skalarnih veličina i maksimalnog broja nezavisnih skalarnih jednačina ravnoteže, koje pruža statika krutih, neelastičnih tela. Za višak reakcija biće onda potrebno da se pored ravnotežnih jednačina sastave i jednačine elastičnosti, koje pruža teorija elastičnosti odnosno otpornost materijala. Dakle, utvrđivanje stepena neodređenosti kod statički neodređenog sistema nužno iziskuje da se poznaje maksimalni broj nezavisnih skalarnih jednačina ravnoteže u pravom smislu, to jest bez nepoznatih sila veze.

— Saobrazno izloženim opštim metodama za proučavanje ravnoteže više krutih tela, u rešavanju problema o maksimalnom broju nezavisnih skalarnih jednačina ravnoteže stoje na raspolaganju dva gledišta: gledište geometrijske statike i gledište analitičke statike. Radi potpunosti korisno je upotrebiti oba gledišta.

1) Sistem slobodnih tela.— Problem je ovde sasvim jednostavan sa gledišta obeju statika.

Geometrijska statika neposredno utvrđuje da za svako slobodno kruto telo maksimalni broj nezavisnih skalarnih jednačina ravnoteže iznosi šest, ma kakvog inače one bile karaktera — o projekcijama ili o momentima sila.

Isto tako, sa gledišta analitičke statike najopštije virtuelno pomeranje jednog slobodnog krutog tela u pogledu na kakav nepomičan trijedar osa $Oxyz$ sačinjavaće: tri translacije u pravcima osa i tri rotacije oko osa. Drugim rečima, slobodno kruto telo ima šest stepeni slobode. Toliki će onda biti i maksimalni broj nezavisnih skalarnih jednačina ravnoteže za jedno slobodno kruto telo.

Sledstveno tome, kada se radi o sistemu od n slobodnih krutih tela neposredno se ustanovljava ovakva

Teorema 1. *Kod sistema od n slobodnih krutih tela maksimalni broj nezavisnih skalarnih jednačina ravnoteže iznosi* $6n$.

2) Sistem neslobodnih tela.— Problem je ovde složeniji takođe sa gledišta metoda obeju statika. Ipak, šematizacije naznačene uz obe metode u prethodnom članu 2 dopustiće da se rezonovanja znatno skrate.

Prema metodi geometrijske statike može se rezonovati na sledeći način. U posmatranom sistemu od n neslobodnih tela, na prvom uočenom telu imaće se uopšte šest nezavisnih ravnotežnih jednačina, koje će sadržavati i sile od veza sa ostalim telima. Na drugom uočenom telu imaće se toliko daljih pravih nezavisnih ravnotežnih jednačina koliko ih od šest uopšte mogućih ostaje kada se eliminišu sile od veza sa prvim uočenim telom; a to pak, saobrazno formulaciji ravnotežnih uslova pod 5°, znači da će ih biti toliko koliko ih odgovara vezama između prvog i drugog uočenog tela, kada se prvo telo smatra kao nepomično. Na trećem uočenom telu imaće se onda toliko daljih pravih nezavisnih ravnotežnih jednačina koliko ih odgovara vezama između njega i predhodna dva uočena tela, kada se ova dva tela smatraju kao nepomična. I tako dalje do poslednjeg n-tog tela u sistemu; na njemu će se imati još toliko poslednjih pravih nezavisnih ravnotežnih jednačina koliko ih odgovara vezama između njega i ostalih tela, kada se ova sva smatraju kao nepomična. Na taj način, o broju pravih nezavisnih ravnotežnih jednačina za sistem od više neslobodnih tela izvedena je ova

T e o r e m a 2. *Kod sistema od više krutih tela potčinjenih međusobnim vezama maksimalni broj pravih nezavisnih skalarnih jednačina ravnoteže dobija se kada se proizvoljno izabere jedan poredak tela; pa se potom prvom telu prida broj šest, a svakom narednom telu onaj broj koji odgovara vezama između njega i predhodnih tela, smatrajući ova predhodna tela kao nepomična; i najzad se tako određeni brojevi za sva tela saberu.*

Prema metodi analitičke statike, pak, rezonovanje postaje daleko elegantnije. Zaista, kod posmatranog sistema od više neslobodnih tela broj nezavisnih skalarnih jednačina ravnoteže jednak je broju stepeni slobode sistema. Problem se ovde, dakle, svodi na određivanje broja stepeni slobode sistema, za koje je u prethodnom članu 2 već naznačen jedan šematizovan postupak. Prema tome, kao zaključak će se imati ovakva

T e o r e m a 3. *Kod sistema od više krutih tela potčinjenih međusobnim vezama maksimalni broj pravih nezavisnih skalarnih jednačina ravnoteže jednak je broju stepeni slobode kretanja sistema.*

— Maksimalan broj nezavisnih skalarnih jednačina ravnoteže kod posmatranog sistema od više tela smanjiće se na odgovarajući način u slučaju kada na pojedina tela, pa bila ona slobodna ili neslobodna, umesto opštih prostornih sistema sila dejstvuju izvesni posebni sistemi sila, kakvi su oni naznačeni u članu 1. Na primer, ako na prvo uočeno telo dejstvuje ravan sistem sila, za njega će se računati tri nezavisne ravnotežne jednačine umesto šest, koliko bi ih bilo sa opštim sistemom sila; ako je, potom, drugo uočeno telo vezano za prvo telo jednom tačkom bez trenja i ako se sile na drugom telu redukuju na jednu silu, koja prolazi kroz tu tačku veze, onda za drugo telo ne treba računati nijednu nezavisnu ravnotežnu jednačinu, dočim bi ih bilo tri sa opštim sistemom sila; i tako dalje.

Isto tako, maksimalan broj nezavisnih skalarnih jednačina ravnoteže smanjiće se i u slučaju kada je posmatrani sistem tela, bilo slobodnih bilo međusobno neslobodnih, potčinjen izvesnim spoljašnjim vezama. Na primer, ako je prvo uočeno telo iz sistema vezano za izvesno spoljašnje telo jednom tačkom bez trenja, za njega će se računati svega tri nezavisne ravnotežne jednačine (jer je saobrazno takvim vezama $6-3=3$); ako je, potom, drugo uočeno telo vezano za prvo telo jednom tačkom bez trenja i uz to oslonjeno na izvesno spoljašnje telo u jednoj tački bez trenja, za njega će se računati jedna nezavisna ravnotežna jednačina (jer je saobrazno takvim dvema vezama $6-3-2=1$); i tako dalje.

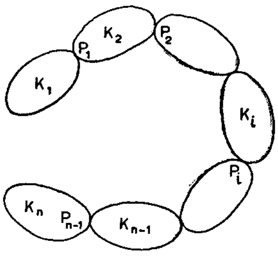
Po sebi se razume da će obe navedene okolnosti, kada se zajednički nađu na pojedinim telima u posmatranom njihovom sistemu, ponaosob uticati na smanjenje maksimalnog broja nezavisnih ravnotežnih jednačina: kako posebni sistemi sila tako i veze sa spoljašnjim telima.

Primeri. — Kao primeri za određivanje maksimalnih brojeva nezavisnih ravnotežnih jednačina mogu se zamisliti mnogi sistemi sa različitim brojem tela potčinjenih različitim vezama. Radi postupnosti u rasuđivanjima podesno je razgledati prvo sisteme tela sa istorodnim vezama, pa potom i sisteme sa raznorodnim vezama.

Od dveju ustanovljenih metoda za određivanje maksimalnog broja nezavisnih ravnotežnih jednačina u primenama se kao ekspeditivnija pokazuje ona iz analitičke statike. Ipak, radi ilustracije čitave izložene teorije mi ćemo upotrebljavati obe metode naporedo.

a. *Sistemi tela sa istorodnim vezama.* — 1) Neka je sistem sastavljen od tela K_i ($i=1, 2, \ldots, n$), koja su uzastopno vezana po jednom tačkom P_j ($j=1, 2, \ldots, n-1$) bez trenja (sl. 1); takav sistem tela mogao bi se nazvati *lanac*. Za njega je lako izvesti opštu formulu o broju nezavisnih pravih ravnotežnih jednačina. Zaista, gledano po obema metodama, prvo telo će nositi šest ravnotežnih jednačina a svako sledeće po tri, tako da će njihov ukupan broj iznositi

$$N=6+3(n-1)=3(n+1).$$



Sl. 1

Zamislimo da se u prednjem lancu poslednje telo K_n veže za prvo telo K_1 takođe jednom tačkom P_n bez trenja (sl. 2); to znači da će se umesto *otvorenog lanca* sada imati *zatvoreni lanac*. Rezonovanje kod ovog zatvorenog lanca biće isto sve do poslednjeg tela K_n, koje upravo menja pređašnju situaciju. Naime, poslednje telo K_n, time što je vezano za prvo telo K_1 tačkom P_n, gubi svoje tri ravnotežne jednačine, tako da će ukupni broj ravnotežnih jednačina sada biti

$$N=3(n+1)-3=3n.$$

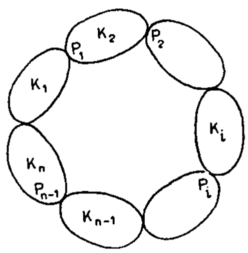
Ta činjenica postaje kinematički očevidna na zatvorenom lancu od svega tri tela (sl. 3). Doista, prvo telo K_1 imaće tri translancije i tri rotacije; drugo telo K_2 i treće telo K_3 imaće po jednu rotaciju oko osa P_1P_2 i P_2P_3, a oba zajedno imaju jednu rotaciju oko ose P_1P_3; tako će se dobiti broj ravnotežnih jednačina $6+2+1=9$, u saglasnosti sa prednjom opštom formulom.

2) Neka je sistem sastavljen od tela K_i ($i=1, 2, \ldots, n$), koja su uzastopno vezana po jednom osom O_j ($j=1, 2, \ldots, n-1$) bez trenja; po posebnom slučaju kada su sve ose O_j paralelne, pa bi sva tela vršila samo paralelna ravna kretanja, takav sistem tela bi se mogao nazvati *ravan lanac*. Analognim rasuđivanjem kao kod prostornog lanca, ovde se za broj nezavisnih pravih ravnotežnih jednačina izvodi opšta formula

$$N=6+(n-1)=n+5.$$

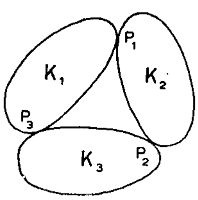
Kod zatvorenog ravnog lanca tela, takođe analognim rasuđivanjem kao kod zatvorenog prostornog lanca, dolazi se do opšte formule

$$N=(n+5)-2=n+3;$$



Sl. 2

jer, poslednje telo K_n, vezano za pretposlednje telo K_{n-1} osom O_{n-1} i za prvo telo K_1 osom O_n, postaje nepomično zajedno sa pretposlednjim telom u odnosu na sva ostala tela K_i ($i=1, 2, \ldots, n-2$) smatrana kao nepomična.



Sl. 3

Ta je činjenica očevidna kod zatvorenog ravnog lanca od tri tela, kada on zapravo postaje jedno kruto telo sa 6 stepeni slobode kretanja, u saglasnosti sa prednjom opštom formulom.

3) Kad se tela K_i iz prednjeg primera 2 mogu ne samo obrtati oko osa O_j nego i kliziti duž njih bez trenja, dobiće se sistem tela, kome bi se mogao dati naziv *aksijalnog lanca*. Analognim rasuđivanjem kao kod sistema iz prednja dva primera, za broj nezavisnih pravih ravnotežnih jednačina kod otvorenog aksijalnog lanca izvodi se opšta formula

$$N=6+2(n-1)=2(n+2).$$

budući da pri obrtanju oko ose i klizanju duž nje postoje dve ravnotežne jednačine odnosno dva stepena slobode kretanja (jedna rotacija i jedna translacija).

Kod zatvorenog aksijalnog lanca, pak, imaće se opšta formula

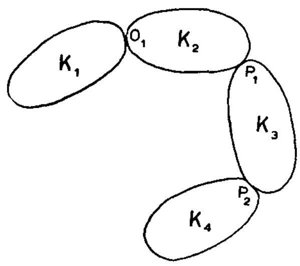
$$N=2(n+2)-2=2(n+1).$$

Ova formula postaje opet očevidna kod zatvorenog aksijalnog lanca od tri tela sa 8 stepeni slobode kretanja: kod prvog tela tri translacije i tri rotacije, a kod drugog i trećeg tela po jedna translacija.

— Sa primerima istorodnih veza između tela, bar onih tipičnih veza naznačenih u članu 1, moglo bi se nastaviti. Ti primeri, pak, ne bi doneli nečeg novog u idejnom pogledu, te ih nećemo dalje ni razgledati.

b) *Sistemi tela sa raznorodnim vezama.* — Ovi sistemi mogu biti znatno složeniji u kinematičko-statičkom pogledu, što otežava onda i određivanje broja nezavisnih ravnotežnih jednačina. Do uprošćavanja dovodi eventualno moguće rastavljanje sistema na delove sa jednorodnim vezama, za koje se, kako smo videli, mogu izvesti i opšte formule. Budući da kod sistema sa raznorodnim vezama traženje kakve opšte formule gubi praktični smisao, ograničićemo se na primeru jednog posebnog sistema.

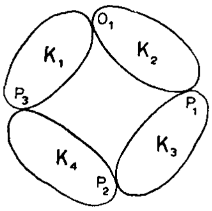
4) Neka je pred nama ovakav otvoreni *mešoviti lanac* od četiri tela (sl. 4): prvo telo K_1 vezano je osom O_1 bez trenja za drugo telo K_2; ovo telo je vezano tačkom P_1 bez trenja za treće telo K_3; a ovo telo je vezano takođe tačkom P_2 bez trenja za četvrto telo K_4. Računajući brojeve pravih ravnotežnih jednačina, bilo neposredno bilo posredno preko brojeva stepeni slobode kretanja, za svako telo u istom poretku, dobija se ovaj ukupni broj ravnotežnih jednačina:



Sl. 4

$$N = 6 + 1 + 3 + 3 = 13.$$

Potom, neka se takav otvoreni lanac zatvori tako što se telo K_4 veže za telo K_1 tačkom P_3 bez trenja (sl. 5). Tada telo K_4 u zajednici sa telom K_3 gubi tri stepena slobode kretanja (kao u primeru 1), pa se broj ravnotežnih jednačina smanjuje na



Sl. 5

$$N = 13 - 3 = 10.$$

Do istoga broja dolazi se, naravno, i kada se tela u sistemu pređu u obrtnom poretku K_1—K_4—K_3—K_2:

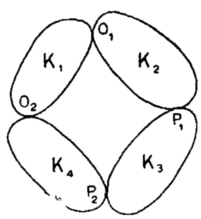
$$N = 6 + 3 + 3 + 3 - 3 - 2 = 10;$$

jer, bez osne veze O_1 između tela K_1 i K_2 imao bi se broj stepeni slobode $6+3+3+3$, a sa tom vezom tela K_3 i K_2 gube $3+2$ stepeni slobode (kretanje tela K_3 postaje određeno, a telu K_2 ostaje samo rotacija oko ose P_1P_2).

Najzad, neka se isti otvoreni lanac zatvori tako što se telo K_4 veže za telo K_1 osom O_2 bez trenja, umesto tačkom kao kod prethodnog zatvaranja (sl. 6). U tome slučaju tela K_4 i K_3 gube $3+2=5$ stepeni slobode (kako je sada baš objašnjeno), tako da se ovog puta broj ravnotežnih jednačina smanjuje na

$$N = 13 - 5 = 8.$$

Taj se broj brže određuje neposredno sa samog zatvorenog lanca, a ne preko zatvaranja otvorenog lanca. Kako je sadanji zatvoreni lanac simetričan u pogledu na telo K_1, svejedno je u kome se poretku tela prelaze. Naime, birajući poredak tela saobrazno indeksima, pored 6 stepeni slobode kretanja tela K_1, još telo K_2 raspolaže rotacijom oko ose O_1 a telo K_3 rotacijom oko ose P_1P_2, dočim je kretanje tela K_4 onda određeno, te se tako dobijaju opet 8 ravnotežnih jednačina.



Sl. 6

c) *Proizvoljan sistem tela.* — U prednjim primerima razgledani su sistemi od više neslobodnih tela, kako sa jednorodnim tako i sa raznorodnim vezama, ali samo u posebnim slučajevima kada su ih sačinjavali lančani nizovi tela. Takvi lančani nizovi tela, međutim, imaju osnovni značaj za razmatranje opšteg slučaja ma kakvog sistema neslobodnih tela. Doista, svaki ma kako složen sistem neslobodnih tela može se uvek rastaviti na više odvojenih lančanih nizova tela, te se tako razmatranje čitavog sistema svodi na razmatranje ovih pojedinih lančanih nizova. Pri tome, kada se izabere izvestan poredak lančanih nizova, onda se prvi niz u tome poretku može smatrati kao slobodan u odnosu na ostale nizove; drugi niz u poretku biće tada neslobodan u odnosu na prvi niz, a slobodan u odnosu na sledeće nizove; treći niz, potom, biće neslobodan u odnosu na prva dva niza, a slobodan u odnosu na sledeće nizove; i tako dalje do poslednjeg niza, koji će biti neslobodan u odnosu na sve predhodne nizove.

4. KOMBINACIJE RAVNOTEŽNIH JEDNAČINA

Kao posledica stanja stvari kod jednog krutog tela, skalarne ravnotežne jednačine kod sistema od više krutih tela jesu takođe dvojakog karaktera: o projekcijama sila na ose i o momentima sila u pogledu na ose. Kod jednog krutog tela bile su moguće različite kombinacije brojeva jedne i druge vrste skalarnih ravnotežnih jednačina do ukupnog maksimalnog broja njihovog, za koji su one još nezavisne. Zbog toga, treba očekivati da će i kod sistema od više krutih tela takođe biti moguće različite kombinacije tih dveju vrsti skalarnih ravnotežnih jednačina do određenog maksimalnog broja njihovog, za koji one opet ostaju nezavisne.

U rasuđivanjima, koja treba da dovedu do ustanovljavanja svih mogućih kombinacija dveju vrsti ravnotežnih jednačina kod sistema od više krutih tela, kao pouzdana metodička osnova služiće i ovde, razume se, već poznate takve kombinacije kod jednog slobodnog krutog tela. Saobrazno tome, počeće se opet sa razmatranjem sistema od više slobodnih krutih tela.

1) Sistem slobodnih tela.— Kod jednog slobodnog krutog tela pregled svih mogućih kombinacija dveju vrsti ravnotežnih jednačina, kako za opšti sistem sila tako i za glavnije posebne sisteme sila, dat je u tabeli I iz člana 1. Kada se pređe na razmatranje jednog sistema od n slobodnih krutih tela, sve te kombinacije ravnotežnih jednačina ostaju da vrede za svako kruto telo uzeto odvojeno od ostalih tela u sistemu, tako da se broj mogućih kombinacija za čitav sistem umnožava na saobrazan način. Odatle bez daljeg sledi ova opšta

Teorema 1. *Kod sistema od n slobodnih krutih tela za maksimalni broj od 6 n nezavisnih skalarnih jednačina ravnoteže moguće su sve kombinacije dveju njihovih vrsti — o projekcijama sila na ose i o momentima sila u pogledu na ose — u granicama između 3 n jednačina prve vrste i 6 n jednačina druge vrste. Za posebne sisteme sila na pojedinim telima ta tri broja smanjuju se na saobrazan način.*

2) Sistem neslobodnih tela.— Na posmatrani sistem od n krutih tela potčinjenih međusobnim vezama primenimo, najpre, metodu geometrijske statike. Radi toga, sva neslobodna tela u sistemu smatrajmo kao slobodna, s tim što se direktno napadnim silama dodaju i sile od međusobnih veza. U pogledu kombinacija dveju vrsti ravnotežnih jednačina problem o neslobodnim krutim telima svodi se na problem o slobodnim krutim telima. Razlika između takva dva sistema tela sastoji se onda jedino u tome što kod sistema neslobodnih tela, posle sastavljanja $6n$ nezavisnih skalarnih jednačina ravnoteže po jednoj od mogućih kombinacija dveju njihovih vrsti, preostaje da se svrši još zamašan računski posao na eliminisanju nepoznatih unutrašnjih sila veze, kako bi se došlo do pravih nezavisnih ravnotežnih jednačina. Pri tome se razume da će se ove krajnje prave ravnotežne jednačine dobijati različitih sastava, u zavisnosti od polazne kombinacije dveju vrsti ravnotežnih jednačina. Na taj način, može se postaviti ovakva

Teorema 2. *Kod sistema od više krutih tela potčinjenih međusobnim vezama sve moguće kombinacije dveju vrsti pravih nezavisnih skalarnih jednačina ravnoteže — o projekcijama sila na ose i o momentima sila u pogledu na ose — dobijaju se kada se one sastave po teoremi 1 kao da su sva tela slobodna uz dodavanje unutrašnjih sila veze spoljašnim direktno napadnim silama, pa se potom unutrašnje sile veze iz njih eliminišu.*

Ova teorema se može neposredno proširiti i na slučaj sistema od više krutih tela, kada su ona potčinjena ne samo unutrašnjim vezama među sobom već i spoljašnim vezama sa telima izvan njih. U tome slučaju, iz polaznih kombinacija ravnotežnih jednačina imaju se eliminisati kako unutrašnje tako i spoljašnje sile veze.

— Eliminacioni postupak sa silama veze, pak, može se znatno uprostiti već postavljanjem samih polaznih ravnotežnih jednačina, na način kako je to naznačeno pri izvođenju formulacije 5° ravnotežnih uslova u članu 2. Prema toj formulaciji izbor vrsti ravnotežnih jednačina za sva neslobodna tela izuzev prvog u izabranom njihovom poretku uslovljen je prirodom postojećih veza, tako da se izvestan broj ravnotežnih jednačina sastavlja ili odmah u pravom obliku ili bar bez što je najviše moguće nepoznatih sila veze. Mogućnosti za kombinovanja dveju vrsti ravnotežnih jednačina preostaju onda još samo kod stvarno slobodnih tela u sistemu i kod prvog tela u izabranom poretku neslobodnih tela, — mogućnosti, dakle, koje su sada znatno sužene. Na taj način, kao dopuna prednjoj teoremi 2 imaće se ova

Teorema 3. *Kod sistema od više krutih tela potčinjenih međusobnim vezama kombinovanje dveju vrsti nezavisnih skalarnih jednačina ravnoteže — o projekcijama sila na ose i o momentima sila u pogledu na ose — postiže se kod eventualnih slobodnih tela i kod prvog tela u svakom izabranom poretku neslobodnih tela, dočim je za ostala neslobodna tela sastavljanje ravnotežnih jednačina odmah ili u pravom obliku ili bar bez sila veze što je najviše moguće uslovljeno prirodom postojećih veza.*

Ova teorema se takođe neposredno proširuje na sisteme sa spoljašnjim vezama.

— Pređimo, zatim, na primenu metode analitičke statike. Po toj metodi dve vrste ravnotežnih jednačina o projekcijama i o momentima sila dobijaju se za dve vrste virtuelnih pomeranja krutih tela: translacija i rotacija. Pri tome, mogućnosti za kombinovanja virtuelnih translacija i rotacija potpuno odgovaraju mogućnostima za kombinovanja dveju vrsti ravnotežnih jednačina u pravom obliku, bez sila veze, kako je to objašnjeno pri šematizaciji formulacije 6° ravnotežnih uslova u članu 2.

Štaviše, po ovoj metodi postoji takođe mogućnost da se kod eventualnih slobodnih tela i kod prvog od neslobodnih tela, smatranog kao da je slobodno, zamenjuju translacije sa rotacijama, kako je to moguće neposredno između ravnotežnih jednačina o projekcijama i o momentima. Ovde je mesto, zapravo, da se takva činjenica podrobnije razjasni. Kao što je poznato iz kinematike krutog tela, proizvoljan sistem translacija i rotacija, kojima je potčinjeno jedno kruto telo, transformiše se po istim pravilima teorije vezanih vektora kao i sistem sila i spregova sila, koji napada na jedno kruto telo; pritom, rotacije odgovaraju silama, a translacije — budući da se jedna translacija daje svagda zameniti spregom rotacija — odgovaraju onda spregovima sila (videti [2], str. 73—77). Odatle proizilazi, posle analognih rasuđivanja kao za torzer — redukcionu silu i redukcioni spreg sila — na krutom telu (videti [1], poglavlje II), da se opšte kretanje jednog slobodnog krutog tela može predstaviti sa ovakva četiri sistema translacija i rotacija, u pravcima i oko osa čiji rasporedi podležu izvesnim odredbama:

tri translacije i tri rotacije,
dve translacije i četiri rotacije,

jedna translacija i pet rotacija,
šest rotacija.

Dakle doista, kod slobodnog krutog tela moguće su četiri kombinacije dveju vrsti osnovnih kretanja — translacija i rotacija —, analogne kombinacijama dveju vrsti ravnotežnih jednačina — o projekcijama i o momentima sila —, i to opet svagda u maksimalnom ukupnom broju od šest njih. — Što se tiče neslobodnih tela, translacije i rotacije su uslovljene prirodom njihovih međusobnih veza, takođe u punoj analogiji sa odgovarajućim ravnotežnim jednačinama o projekcijama i o momentima sila.

Prema tome, kao zaključak se izvodi

T e o r e m a 4. *Kod sistema od više krutih tela potčinjenih međusobnim vezama razne kombinacije dveju vrsti ravnotežnih jednačina — o projekcijama sila na ose i o momentima sila u pogledu na ose — dobijaju se, prema metodi analitičke statike, kod eventualnih slobodnih tela i kod prvog tela u svakom izabranom poretku neslobodnih tela za po četiri kombinacije njihovih virtuelnih translacija i rotacija u maksimalnom broju od šest njih, dočim su ravnotežne jednačine za ostala neslobodna tela uslovljene njihovim virtuelnim translacijama i rotacijama saobraznim prirodi postojećih veza, — sve u punoj analogiji sa teoremom 3.*

I ovde se takođe uviđa da se teorema neposredno proširuje na sisteme tela sa spoljašnjim vezama.

Primer.— Da bismo ilustrovali teoreme 2, 3 i 4, razmotrimo sistem od četiri tela prikazan na slici 5.

Po teoremi 2, sva četiri tela K_1, K_2, K_3, K_4 u sistemu mogu se smatrati kao slobodna, s tim što se spoljašnjim direktno napadnim silama dodaju unutrašnje sile od jedne osne veze O_1 i tri tačkaste veze P_1, P_2, P_3. Maksimalni broj nezavisnih skalarnih jednačina ravnoteže, koje će sadržavati i te unutrašnje sile veze, iznosiće tada $6 \times 4 = 24$; a pod tim stalnim brojem moguće su sve kombinacije dveju vrsti ravnotežnih jednačina o projekcijama i o momentima u granicama između $3 \times 4 = 12$ jednačina o projekcijama i $6 \times 4 = 24$ jednačina o momentima. Međutim, maksimalni broj nezavisnih skalarnih jednačina ravnoteže u pravom smislu, bez sila veze, smanjuje se na 10, kako je to određeno u primeru 4 iz člana 3; a pod tim stalnim brojem sve kombinacije dveju vrsti ravnotežnih jednačina dobijaju se kada se u prethodnim njihovim kombinacijama eliminišu sile veze. Naravno, kada se na pojedinim telima javljaju posebni sistemi sila, prednji brojevi, određeni za opšte sisteme sila, smanjuju se u odgovarajućoj meri.

Po teoremi 3, ravnotežne jednačine se sastavljaju saobrazno vezama. Pošto su sva četiri tela u sistemu neslobodna, kombinacije dveju vrsti ravnotežnih jednačina postižu se samo kod prvog tela, smatrajući ga kao slobodno, koje se inače može izabrati po volji. A prema tabeli I u članu 1, kod jednog slobodnog tela moguće su samo četiri kombinacije dveju vrsti ravnotežnih jednačina. Ravnotežne jednačine za ostala tri tela uslovljena su onda navedenim vezama. — Birajući različite poretke tela, dobijaće se i raznovrsne kombinacije ravnotežnih jednačina. Tako, za poredak naznačen na slici 5 imaće se ovakve ravnotežne jednačine: kod prvog tela K_1 kao slobodnog četiri kombinacije njihovih dveju vrsti; a onda kod tela K_2 jedna momentna jednačina za osu O_1; kod tela K_3 dve momentne jednačine za ose P_1P_2 i P_1P_3; i kod tela K_4 jedna momentna jednačina za osu P_2P_3. Za poredak tela K_3—K_4—K_1—K_2, pak, vrste ravnotežnih jednačina će biti: kod tela K_3 kao prvog i slobodnog četiri kombinacije jednačina; kod tela K_4 tri momentne jednačine za tri ose, koje prolaze kroz tačku P_2 i ne leže u jednoj ravni; kod tela K_1 jedna momentna jednačina za osu koja prolazi kroz tačku P_3 paralelno osi O_1; a kod tela K_2 onda nijedna jednačina, budući da je njegov položaj određen položajima prethodnih triju tela.

Po teoremi 4, razne kombinacije dveju vrsti ravnotežnih jednačina dobijaju se takođe samo kod proizvoljnog prvog tela, smatrajući ga kao slobodno, kada se one sastave za četiri moguće kombinacije njegovih virtuelnih translacija i rotacija. Ostala tri tela imaće potom samo izvesne rotacije saobrazne vezama, tako da će se za njih sastaviti samo izvesne jednačine o momentima direktno napadnih sila respektivno na svakom od njih. — Za različite poretke tela i ovde će se dobijati raznovrsne kombinacije ravnotežnih jednačina, saobrazno napred ustanovljenoj korespondenciji teorema 3 i 4.

5. RASPOREDI OSA

Ostaje još da se raspravi treći i poslednji problem o opštim rasporedima projekcijskih i momentnih osa, za koje treba sastavljati ravnotežne jednačine o projekcijama i o momentima sila, pa da one ispadnu sigurno nezavisne. Naime, kao posledica stanja stvari kod jednog krutog tela, takođe i kod sistema krutih tela bilo slobodnih ili neslobodnih, pošto se odredi maksimalni broj nezavisnih ravnotežnih jednačina i izabere jedna kombinacija dveju njihovih vrsti o projekcijama i o momentima sila, još će se raspolagati slobodom da se projekcijske i momentne ose, za koje će se one sastavljati, biraju u izvesnim granicama određenim opštim mogućim rasporedima njihovim.

Kod sadanjeg problema, isto kao i kod prethodna dva, pokazuje se takođe metodičkim da se prvo razmotri sistem slobodnih tela, pa potom sistem neslobodnih tela.

1. Sistem slobodnih tela. — Kod jednog slobodnog krutog tela, kada se izabere jedna kombinacija dveju vrsti ravnotežnih jednačina o projekcijama i o momentima sila u maksimalnom broju od šest njih, još se raspolaže slobodom da se biraju projekcijske i momentne ose iz najopštijeg mogućeg rasporeda njihovog, za koje će se te ravnotežne jednačine sastaviti kao sigurno nezavisne, kako se na to podsetilo u članu 1. Takva sloboda u izboru projekcijskih i momentnih osa prenosi se onda kao posledica i na sistem od više krutih tela, kada su ova slobodna ili se smatraju kao takva.

Za svako slobodno telo u sistemu, pri svakoj kombinaciji dveju vrsti ravnotežnih jednačina, projekcijske i momentne ose mogu se slobodno birati iz odnosnog opšteg rasporeda njihovog, tako da one ispadnu sigurno nezavisne. Za čitav sistem slobodnih tela onda, pri svakoj kombinaciji dveju vrsti ravnotežnih jednačina iz skupa mogućih kombinacija prema teoremi 1 u prethodnom članu 1, opšti mogući raspored projekcijskih i momentnih osa će obuhvatati rasporede od svih pojedinih tela iz sistema, tako da i za sve te ose ravnotežne jednačine ostaju nezavisne. Time se i skup ekvivalentnih sistema ravnotežnih jednačina kod sistema slobodnih tela višestruko proširuje. Na taj način, kao zaključak rezultuje ovakva

T e o r e m a 1. *Kod sistema od više slobodnih krutih tela opšti raspored projekcijskih i momentnih osa, za koje će se sastavljati sigurno nezavisne ravnotežne jednačine o projekcijama i o momentima sila, pri svim mogućim kombinacijama tih dveju njihovih vrsti (prema teoremi 1 iz člana 4), sačinjava skup pojedinih opštih rasporeda osa za svako od tela. Za posebne sisteme sila na pojedinim telima opšti raspored osa se sužava na saobrazan način.*

2) **Sistem neslobodnih tela.** — Primenjujući metodu geometrijske statike, neka se sva neslobodna tela u sistemu smatraju kao slobodna, uz dodavanje direktno napadnim silama i sila od međusobnih veza. Tada, za opšte rasporede projekcijskih i momentnih osa, u pogledu na koje će se sastavljati sigurno nezavisne ravnotežne jednačine, vredi isto ono što je prethodnom teoremom ustanovljeno za sistem slobodnih tela. Prema tome, za sistem neslobodnih tela neposredno se izvodi ovakva

T e o r e m a 2. *Kod sistema od više krutih tela potčinjenim međusobnim vezama, kada se sva neslobodna tela smatraju kao slobodna uz uvođenje unutrašnjih sila veze, opšti raspored projekcijskih i momentnih osa, za koje će se* *sastavljati sigurno nezavisne ravnotežne jednačine o projekcijama i o momentima svih sila, kako direktno napadnih sila tako i sila veze, određen je po prethodnoj teoremi 1 kao da su sva tela slobodna.*

Teorema vredi i za sistem tela sa spoljašnjim vezama.

— Ravnotežne jednačine sastavljene za projekcijske i momentne ose po teoremi 2 sadržavaće nepoznate unutrašnje sile veze bez ikakvih ograničenja. Ako se hoće, pak, da se ravnotežne jednačine sastavljaju odmah ili u pravom obliku ili bar što je najviše moguće bez sila veze, onda su, prema teoremi 3 iz člana 4, od njihovih dveju vrsti pojedine uslovljene prirodom postojećih veza. Zajedno sa takvim uslovljavanjem i sloboda u izboru projekcijskih i momentnih osa ograničava se u odgovarajućoj meri. Ta ograničenja u izboru osa kod sistema neslobodnih tela jesu zapravo posledica stanja stvari kod jednog neslobodnog tela, te je stoga metodički celishodno da se podrobnosti razjasne na takvom elementarnom slučaju.

Kao što je rečeno još prilikom izvođenja formulacije ravnotežnih uslova pod 5°, kod jednog neslobodnog krutog tela ravnotežne jednačine po svojim dvema vrstama postaju određene prirodom postojećih veza. Ali, takva određenost povlači nužno za sobom odgovarajuće ograničenje opštih rasporeda dveju vrsti osa, za koje se ravnotežne jednačine mogu sastaviti kao nezavisne. Na primer, ako je telo vezano za jednu nepomičnu tačku bez trenja, onda tri prave nezavisne ravnotežne jednačine o momentima sila mogu biti sastavljene samo u pogledu na tri momentne ose, koje prolaze kroz tu nepomičnu tačku i ne leže u jednoj ravni; ili, ako je telo vezano za jednu nepomičnu osu bez trenja, onda se jedina prava ravnotežna jednačina o momentima sila mora sastaviti samo u pogledu na momentnu osu uzetu po toj nepomičnoj osi; ili, ako je telo prinuđeno da se obrće oko jedne nepomične ose i da klizi duž nje, i to oboje bez trenja, onda od dveju pravih nezavisnih ravnotežnih jednačina jedna o momentima sila mora se sastaviti u pogledu na tu nepomičnu osu kao momentnu a druga o projekcijama sila opet za tu osu kao projekcijsku; i tako dalje za drugačije veze, posebno za one ostale tri tipične iz tabele II u članu 1.

Kod sistema neslobodnih tela, pošto se izabere jedan njihov poredak, svako od tela, izuzev prvog, može se smatrati da je prinuđeno na veze sa predhodnim telima, kao kada bi ova bila nepomična. Time se problem o opštim rasporedima projekcijskih i momentnih osa kod sistema neslobodnih tela svodi na odgovarajući problem kod jednog neslobodnog tela, koji je sada razmotren: dakle, ti opšti rasporedi osa kod sistema neslobodnih tela sačinjavaće skupove opštih rasporeda osa za pojedina tela smatrana vezanim za predhodna, kao kada bi ova bila nepomična. Što se tiče eventualno slobodnih tela u sistemu i prvog tela u izabranom poretku neslobodnih tela, jasno je da su opšti rasporedi osa za njih određeni predhodnom teoremom 2, koja se odnosi na sistem slobodnih tela.

Rezimirajući prednja utanačenja, dobija se ova

T e o r e m a 3. *Kod sistema od više krutih tela potčinjenih međusobnim vezama opšti raspored projekcijskih i momentnth osa, za koje će se sastavljati sigurno nezavisne ravnotežne jednačine o projekcijama i o momentima sila, saobrazne vezama, sačinjava skup opštih rasporeda osa:*

sa jedne strane, za eventualno slobodna tela u sistemu i za prvo telo u svakom izabranom poretku neslobodnih tela, koji su određeni teoremom 2; i

sa druge strane, za ostala neslobodna tela, kada se svako od njih, u svakom izabranom njihovom poretku, smatra vezano za prethodna tela, kao da su ova nepomična.

Proširenje teoreme na sistem neslobodnih tela i sa spoljašnjim vezama jeste očevidno.

— Prelazeći na primenu analitičke metode, nije teško uvideti da sloboda u izboru dveju vrsti virtuelnih pomeranja — translacija i rotacija — potpuno odgovara slobodi u izboru dveju vrsti osa — projekcijskih i momentnih —, analogno korespondenciji geometrijske i analitičke metode koja se imala pri određivanju kombinacija dveju vrsti ravnotežnih jednačina o projekcijama i o momentima sila pomoću teoreme 4 iz predhodnog člana.

Zaista, kod slobodnih tela korespondencija između osa virtuelnih translacija i rotacija, sa jedne strane, i projekcijskih i momentnih osa, sa druge strane, neposredno proizilazi iz tamošnjih rasuđivanja o transformisanju sistema translacija i rotacija po istim pravilima teorije vezanih vektora koja vrede i za sisteme sila i spregova sila. Kod sistema međusobno neslobodnih tela, pak, dovoljno je o takvoj korespondenciji osvedočiti se podrobnije opet samo na elementarnom slučaju jednog neslobodnog tela. Na primer, ako je telo vezano za jednu nepomičnu tačku bez trenja, tri rotacione ose mogu biti ma koje tri ose, koje prolaze kroz nepomičnu tačku i ne leže u jednoj ravni; ili, ako je telo prinuđeno da se obrće oko jedne nepomične ose bez trenja, jedina rotaciona osa je ta nepomična osa; ili, ako je telo prinuđeno da se obrće oko jedne nepomične ose i da klizi duž nje, oboje bez trenja, jedina rotaciona osa i jedina translaciona osa jeste ta nepomična osa u isti mah; i tako dalje za ostale veze,—sve u punoj korespondenciji sa projekcijskim i momentnim osama kod istih neslobodnih tela. To onda vredi i za sistem neslobodnih tela, kada se svako od njih smatra vezano za prethodna, kao da su ova nepomična.

Odatle kao zaključak sledi da će takođe postojati puna korespondencija između opštih rasporeda osa za virtuelne translancije i rotacije i opštih rasporeda projekcijskih i momentnih osa, kako kod slobodnih tako i kod neslobodnih tela. Takav zaključak dopušta da se postavi ovakva

Teorema 4. *Kod sistema od više krutih tela potčinjenih međusobnim vezama opšti raspored osa virtuelnih translacija i rotacija, za koje će se, prema metodi analitičke statike, sastavljati nezavisne prave ravnotežne jednačine, jeste korespondentan opštem rasporedu projekcijskih i momentnih osa, koji određuje teorema 3.*

Kao teorema analitičke statike, ona pogotovo vredi za sisteme neslobodnih tela i sa spoljašnjim vezama.

Primer.— Radi ilustracije teorema 2, 3 i 4 vratimo se ponovo na sistem od četiri tela prikazan na slici 5.

Po teoremi 2, kad se sva četiri tela smatraju kao slobodna uz uvođenje unutrašnjih sila veze, opšti raspored projekcijskih i momentnih osa, za koje će se sastavljati sigurno nezavisne ravnotežne jednačine o projekcijama i o momentima svih sila, kako direktno napadnih sila tako i sila veze, sačinjavaće skup pojedinih opštih rasporeda osa za svako od tela, pri svakoj mogućoj kombinaciji tih dveju vrsti ravnotežnih jednačina (ne vodeći pri tom računa o poretku tela, budući da je on ovde indiferentan). Razmatranjima u primeru iz predhodnog člana 4 kod posmatranog sistema tela naznačene su, za ukupni maksimalni broj nezavisnih ravnotežnih jednačina od 24, sve kombinacije dveju njihovih vrsti u granicama između 12 jednačina o projekcijama i 24 jednačine o momentima. Sada preostaje da se sagleda opšti raspored osa kod čitavog sistema tela pri svim tim mnogim kombinacijama. Evo celishodnog postupka. Pošto se kod svakog od četiri tela, smatranog kao slobodno, izabere jedna od četiri moguće kombinacije dveju vrsti ravnotežnih jednačina, dobiće se odgovarajuća njihova kombinacija za čitav sistem. Potom se kod svakog tela za svaku izabranu kombinaciju ravnotežnih jednačina odredi odgovarajući opšti raspored projekcijskih i momentnih osa (prema odnosnim teoremama u monografiji [1]). Skup tih opštih rasporeda osa za svako telo daće onda opšti raspored osa za čitav sistem pri izabranoj kombinaciji ravnotežnih jednačina. A skup svih tih skupova opštih rasporeda osa za sve kombinacije ravnotežnih jednačina sačinjavaće, najzad, traženi opšti raspored osa za posmatrani sistem četiri tela. Kako se vidi, ispunjenost prostora osama takvog opšteg rasporeda njihovog već za sistem od svega četiri tela veoma je gusta; za sisteme sa većim brojem tela opšti rasporedi biće još daleko bogatiji osama, pa i ispunjenost prostora njima srazmerno gušća. Sa posebnim sistemima sila na pojedinim telima, pak, opšti raspored osa za posmatrani sistem od četiri tela, kao i uopšte, sužava se na saobrazan način.

Po teoremi 3, kada se prihvati poredak tela sa slike 5, prvo telo K_1 treba smatrati kao slobodno, dočim su ostala tri tela K_2, K_3, K_4 neslobodna. Tada: kod prvog tela K_1 imaće se, za četiri moguće kombinacije dveju vrsti ravnotežnih jednačina, odgovarajući opšti raspored projekcijskih i momentnih osa; kod drugog tela K_2 opšti raspored osa će se svesti na jednu jedinu momentnu osu po veznoj osi O_1; kod trećeg tela K_3 opšti raspored osa će se sastojati od dve momentne ose P_1P_2 i P_1P_3; i kod četvrtog tela K_4 opšti raspored osa će se opet svesti na jednu jedinu momentnu osu P_2P_3. Skupljeni zajedno svi ti pojedinačni opšti rasporedi osa za svako telo daće opšti raspored osa za čitav sistem pri izabranom poretku tela. Pri drugačijem poretku tela ispao bi i promenjen opšti raspored osa. Recimo, pri poretku tela K_3—K_4—K_1—K_2, razgledanom takođe u primeru iz člana 4, opšti raspored osa bio bi sastavljen iz ovakvih opštih rasporeda kod pojedinih tela: kod tela K_3 biće to opšti raspored osa jednog slobodnog tela (kao kod tela K_1 pri predhodnom poretku); kod tela K_4 opšti raspored osa sačinjavaće svi trijedri momentnih osa sa početkom u veznoj tački P_2; i još kod tela K_1 opšti raspored osa se svodi na jednu jedinu momentnu osu, koja prolazi kroz veznu tačku P_3 paralelno veznoj ozi O_1; dočim opšti raspored osa kod tela K_2 ne sadrži nikakvu osu. Tada, skup svih opštih rasporeda osa za sve moguće poretke tela predstavljaće traženi opšti raspored osa kod posmatranog sistema od četiri tela.

Po teoremi 4, opšti raspored osa virtuelnih translacija i rotacija biće u potpunosti korespondentan opštem rasporedu projekcijskih i momentnih osa, određenom sada po teoremi 3.

LITERATURA

[1] B. Lilić: *Uslovi za nezavisnost ravnotežnih jednačina.* Posebna izdanja Elektrotehničkog fakulteta Univerziteta u Beogradu, Beograd, 1962, №4.

[2] P. Appell: *Traité de Mécanique rationnelle.* Tom I, izdanje šesto; Paris, 1941; str. 163 — 170 i 294 — 295.

Резюме

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ НЕСКОЛЬКИХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Б. Лилич

1. В начале воспроизводятся уравнения равновесия для одного твердого тела, получаемые двумя способами — геометрическим и аналитическим. Обзор различных систем независимых уравнений равновесия для характерных систем сил, приложенных к *свободному* твердому телу, дан в таб. I; для *несвободного* твердого тела уравнения равновесия наиболее типических связей указаны в таб. II.

2. Переходя к изучению равновесия системы, состоящей из нескольких твердых тел, различаем также: системы свободных и системы несвободных тел.

При системе свободных твердых тел непосредственно устанавливаем формулировку условий состояния равновесия 1°, 2° и 3°.

При системе несвободных твердых тел силы распределяются на основании двух известных принципов: с одной стороны, на непосредственно приложенные силы и силы связей, а, с другой — на внешние и внутренние силы. Затем, на основании рассуждений, аналогичных случаю системы несвободных точек, выводится формулировка условий состояния равновесия 4°.

Поскольку силы связей появляются в виде неизвестных величин, исключение которых из уравнений равновесия вообще связано с весьма трудоемкими расчетными операциями, выдвинуто требование найти способы, дающие непосредственно действительные уравнения равновесия, в которые бы входили лишь действительные приложенные силы уже при их составлении. Подобный способ, основывающийся на благоприятным выборе осей проекций и моментов, и при помощи которого некоторые число уравнений равновесия возможно написать в действительной форме, можно высказать при помощи следующей формулировки условий равновесия:

5° *Чтобы система твердых тел, повинующихся взаимным связям, была в равновесии, необходимо и достаточно, сделав выбор их порядка, выполнить условия равновесия:*

первое тело считать свободным,

а все последующие тела, сообразно со связями с предыдущими телами, считать неподвижными.

По указанному требованию удовлетворяет полностью другой способ, основывающийся на принципе виртуельных работ, которому соответствует следующая формулировка условий равновесия:

6° *Чтобы система твердых тел, повинующихся взаимным связям без трения была в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы, если систему сдвинуть виртуельной силой сообразно со связями, сумма виртуельной работы непосредственно приложенных сил была равна нулю.*

— При изучении уравнений равновесия для нескольких твердых тел также, как и в случае одного твердого тела, появляются три основных задачи: первая, установить максимальное число независимых скалярных уравнений состояния равновесия; вторая, найти все комбинации из двух видов уравнений равновесия — для проекций сил на осях и для моментов сил по отношению к осям; и третья, указать общие положения проекционных и моментных осей, для которых можно с уверенностью составить независимые уравнения равновесия.

Все три задачи для системы свободных тел решаются, так сказать, непосредственно. Подробный разбор их для системы несвободных тел и является в дальнейшем главной целью настоящей работы.

3. Определение максимальмого числа независимых уравнений равновесия получает особое значение в сопротивлении материалов для так называемых статически неопределенных систем со внешними связями.

Основываясь на методе геометрической статики при определении числа действительных независимых уравнений равновесия для системы несвободных тел, можно вывести следующую теорему:

Теорема 2. *Для системы, состоящей из нескольких твердых тел, подчиняющихся взаимным связям, максимальное число действительных независимых скалярных уравнений равновесия получим, выбирая произвольный порядок тел; затем, к первому телу отнесем число 6, а ко всякому последующему телу — число соответствующее связям между ним и предыдущими телами, считая их неподвижными; наконец, полученные таким образом числа для всех тел сложим.*

Пользуясь же методом аналитической статики имеем следующую теорему:

Теорема 3. *Для системы, состоящей из нескольких твердых тел, подчиняющихся взаимным связям, максимальное число действительньх независимых скалярных уравнений равновесия равно числу степеней свободы движения системы.*

— Для иллюстрирования применения указанных теорем разобрано несколько характерных примеров систем несвободных тел, представленных на рис. 1—6.

4. Далее, комбинации двух видов уравнений равновесия для проекций и моментов сил по геометрическому методу определяет

Теорема 2. *Для системы, состоящей из нескольких твердых тел, подчиняющихся взаимным связям, все возможные комбинации двух видов действительных независимых скалярных уравнений равновесия (для проекций сил на оси и для моментов сил по отношению к осям) получаем формируя их (по теореме 1), как если бы все тела были свободными, прибавляя внутренние силы связей к внешним непосредственно приложенным силам; после этого внутренние силы связей из них исключаются.*

По теореме 3, дополняющей теорему 2, для случая, когда уравнения равновесия составляются сообразно с характером существующих связей, комбинирование двух видов их возможно получить при условии существования свободных тел в системе, или же для первого тела в каждом выбранном распорядке несвободных тел.

Применяя же аналитический способ по теореме 4, комбинации двух видов уравнений равновесия получаем составлением всех возможных комбинаций виртуальных поступательных движений и вращений возможно свободных тел в системе и для первого тела во всяком выбранном порядке несвободных тел, — что совершенно аналогично с теоремой 3.

5. Наконец, общий распорядок осей, для которых будет составлено максимальное число заведомо независимых уравнений равновесия, определяется при помощи общего расположения осей для отдельных тел.

Так, по теореме 2 (раздела 5), когда все тела считаются свободными при введении внутренних сил связи, общий распорядок осей представляет, как и для системы свободных тел, множество общих распорядков осей дйя каждого тела; для отдельных систем сил, приложенных к отдельным телам, общий распорядок осей соответственно уменьшается.

Когда, опять по геометрическому способу, уравнения равновесия составляются согласно существующим связям между телами, тогда, по теореме 3, общий распорядок осей представляет множество общих распорядков осей: с одной стороны, для возможно свободных тел в системе и для первого тела в каждом выбранном распорядке несвободных тел; и, с другой — для остальных тел сообразно со связями.

Аналитическим же способом устанавливается следующая

Теорема 4. *Для системы несвободных тел общий распорядок осей виртуального поступательного перемещения и вращения, для которых требуется составить действительные независимые уравнения равновесия, соответствует общему распорядку проекционных и моментных осей (найденных по теореме 3).*

6. Наконец, можно подчеркнуть, что руководящей мыслью исследования было:

Опираясь на особенности равновесия твердого тела, свободного и несвободного, при изучении равновесия нескольких твердых тел использовать преимущества как геометрического, так и аналитического способов, при их одновременном возможно более тесном повязывании.