**PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU**
**PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE**

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

**№ 110 (1963)**

# JEDAN TOPOLOŠKI RAZVOJ DETERMINANTE ELEKTRIČNE MREŽE

*Mirko M. Milić*

(Primljeno 12. marta 1963)

**Sadržaj**

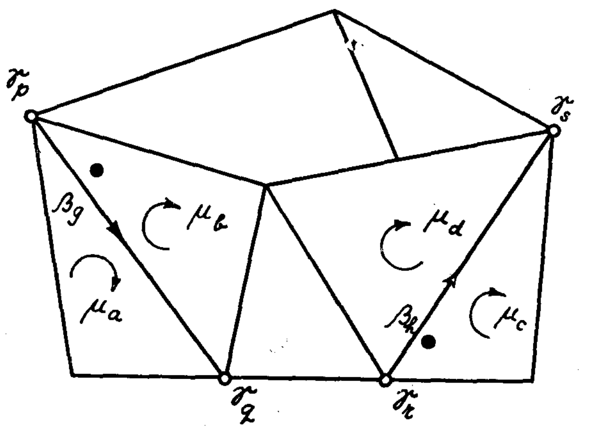
U članku se izvodi jedna topološka formula za determinantu impedansne i admitansne matrice jedne električne mreže, sastavljene od svih vrsta dvokrajnih elemenata i jednog para induktivno spregnutih kalemova.

Shvatajući determinantu mreže kao polinom drugog stepena po impedansi odnosno po admitansi međusobne indukcije, pokazuje se da je mogućno njegove koeficijente interpretirati kao funkcije definisane na grafu mreže u kojoj ne bi postojala međusobna induktivnost.

Ovim se omogućava topološko razvijanje determinante mreže koristeći u suštini samo Kirchhoff-Maxwellova pravila za obične RLC — mreže.

**1.** Prema Kirchhoff-Maxwellovim pravilima, razvijanje determinante admitansne odnosno impedansne matrice RLC — mreža pomoću grafa (topološko razvijanje determinante) svodi se u krajnjoj liniji na određivanje svih mogućnih stabala odnosno komplemenata stabala grafa mreže [4, 2].

U slučaju mreža koje sadrže i međusobne induktivnosti ova pravila ne važe, pa su, u cilju topološkog razvijanja determinante ovakvih mreža, uvedeni specijalni grafovi kojima su uzimane u obzir i međusobne induktivnosti [2]. Međutim, pošto ovakvi grafovi nisu više geometrijski lik date mreže, to su i pravila za topološko razvijanja determinante mreže složenija od Kirchhoff-Maxwellovih pravila.




Sl. 1.

U ovom radu učinjen je pokušaj da se, za slučaj jedne mreže koja sadrži dvokrajne elemente i jedan par induktivno spregnutih kalemova, izvede jedna formula za determinantu impedansne i admitansne matrice, za čije tumačenje su dovoljna samo Kirchhoff-Maxwellova pravila za obične mreže. Formulu ćemo izvesti samo za slučaj impedansne matrice mreže, dok ćemo za slučaj admitansne matrice koristiti osobine dualnosti.

**2.** Neka je data jedna linearna električna mreža koja je sastavljena od svih vrsta dvokrajnih elemenata. Smatraćemo da je mreža povezana. Ukoliko bi ona imala više odvojenih delova, spojili bi po jedan čvor iz svakog odvojenog dela u jedan zajednički čvor, čime bi mreža postala odvojivo-povezana sa istim električnim osobinama kao prvobitna mreža.

Pretpostavimo da između grana $\beta_g$ i $\beta_h$ postoji induktivna sprega (sl. 1). Kao koordinatni sistem uzećemo sistem petlji tako da grane $\beta_g$ i $\beta_h$ budu respektivno obuhvaćene ćelijama $\mu_a, \mu_b$ i $\mu_c, \mu_d$. Ove četiri ćelije ćemo orijentisati u istom smeru, na primer u smeru satne kazaljke. Orijentišući obe grane od kraja koji je označen tačkom, matrica skupa nezavisnih petlji je

$$
\text{(1)} \qquad B = \begin{array}{c} \\ \cdot \\ \mu_a \\ \mu_b \\ \cdot \\ \mu_c \\ \mu_d \\ \cdot \end{array}
\begin{array}{c} \cdots \; \beta_g \; \cdots \; \beta_h \; \cdots \\ \left[\begin{array}{ccccc} & & & & \\ & 1 & & & \\ & -1 & & & \\ & & & & \\ & & & 1 & \\ & & & -1 & \\ & & & & \end{array}\right] \end{array},
$$

a matrica impedansi grana, pisana u operatorskom obliku:

$$
\text{(2)} \qquad Z_b = \begin{array}{c} \\ \cdot \\ \beta_g \\ \cdot \\ \beta_h \\ \cdot \end{array}
\begin{array}{c} \cdots \; \beta_g \; \cdots \; \beta_h \; \cdots \\ \left[\begin{array}{ccccc} \cdot & & & & \\ & Z_g & & Z_{gh} & \\ & & \cdot & & \\ & Z_{gh} & & Z_h & \\ & & & & \cdot \end{array}\right] \end{array},
$$

gde je $Z_{gh}$—impedansa međusobne indukcije između grana $\beta_g$ i $\beta_h$ ($Z_{gh} = pL_{gh}$; $p \equiv \frac{d}{dt}$ ). U matricama (1) i (2) ozačeni su samo elementi koji se odnose na dve posmatrane grane.

Impedansna matrica mreže je

$$
\text{(3)} \qquad Z_m = BZ_bB^t = \begin{array}{c} \\ \cdot \\ \mu_a \\ \mu_b \\ \cdot \\ \mu_c \\ \mu_d \\ \cdot \end{array}
\begin{array}{c} \cdots \; \mu_a \; \mu_b \; \cdots \; \mu_c \; \mu_d \; \cdots \\ \left[\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & Z_{gh} & -Z_{gh} & \\ & & & & -Z_{gh} & Z_{gh} & \\ & & & & & & \\ & Z_{gh} & -Z_{gh} & & & & \\ & -Z_{gh} & Z_{gh} & & & & \\ & & & & & & \end{array}\right] \end{array},
$$

u kojoj su takođe, radi lakšeg pisanja, izostavljeni svi elementi osim onih koji zavise od $Z_{gh}$. Sva ostala nepotpunjena mesta u ovoj matrici predstavljaju sopstvene i međusobne impedanse između pojedinih petlji koje se pišu prema pravilu za pisanje impedansne matrice mreže bez međusobne induktivnosti.

Posmatrajući matricu $Z_m$, vidi se da je u njoj impedansa međusobne indukcije zastupljena u najopštijem slučaju na osam mesta. Ova mesta se nalaze na presecima vrsta i kolona koje odgovaraju svim kombinacijama po dve ćelije, od kojih se u jednoj nalazi grana $\beta_g$, a u drugoj — grana $\beta_h$. Znak ispred $Z_{gh}$ je pozitivan ako su pozitivni smerovi obe ćelije upereni ka krajevima označenim sa tačkom ili na neoznačenim krajevima, u protivnom slučaju znak je negativan. Ako se obe spregnute grane nalaze u jednoj istoj ćeliji, na preseku vrste i kolone koja odgovara ovoj ćeliji treba pisati $\pm 2\,Z_{gh}$, pri čemu se znak određuje na isti način.

**3.** Iz oblika impedansne matrice mreže uočava se da će njena determinanta biti polinom drugog stepena po $Z_{gh}$. Stoga, ako se determinanta razvija po Mac-Laurinovoj formuli dobiće se

$$\Delta = \Delta^\circ + Z_{gh}\frac{d\Delta^\circ}{dZ_{gh}} + Z^2_{gh}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{d^2\Delta^\circ}{dZ^2_{gh}}. \tag{4}$$

U ovoj formuli: $\Delta = \det Z_m$, $\Delta^\circ$ predstavlja determinantu impedansne matrice mreže bez međusobne induktivnosti, a $\frac{d\Delta^\circ}{dZ_{gh}}$ i $\frac{d^2\Delta^\circ}{dZ^2_{gh}}$ označavaju prvi i drugi izvod determinante $\Delta$ po $Z_{gh}$ u kojima treba posle diferenciranja staviti $Z_{gh}=0$.

Prema pravilu o diferenciranju determinanata [1], imamo

$$\frac{d\Delta^\circ}{dZ_{gh}} = \Delta^\circ_{ca} - \Delta^\circ_{da} - \Delta^\circ_{cb} + \Delta^\circ_{db} + \Delta^\circ_{ac} - \Delta^\circ_{bc} - \Delta^\circ_{ad} + \Delta^\circ_{bd},$$

gde $\Delta^\circ_{ij}$ označava prvi kofaktor $i$—te vrste i $j$—te kolone determinante $\Delta^\circ$. Kako je determinanta $\Delta^\circ$ simetrična, gornja jednačina postaje

$$\frac{d\Delta^\circ}{dZ_{gh}} = 2\,(\Delta^\circ_{ac} - \Delta^\circ_{ad} - \Delta^\circ_{bc} + \Delta^\circ_{bd}). \tag{5}$$

Na isti način dobijamo i drugi izvod

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Delta^\circ}{dZ^2_{gh}} = 2(&\Delta^\circ_{ac,ca} - \Delta^\circ_{ac,da} - \Delta^\circ_{ac,cb} + \Delta^\circ_{ac,db} + \Delta^\circ_{ac,bd} -\\ &-\Delta^\circ_{bc,ca} + \Delta^\circ_{bc,da} + \Delta^\circ_{bc,cb} - \Delta^\circ_{bc,db} + \Delta^\circ_{bc,ad} -\\ &-\Delta^\circ_{ad,ca} + \Delta^\circ_{ad,da} + \Delta^\circ_{ad,cb} - \Delta^\circ_{ad,db} + \Delta^\circ_{ad,bc} +\\ &+\Delta^\circ_{bd,ca} - \Delta^\circ_{bd,da} - \Delta^\circ_{bd,cb} + \Delta^\circ_{bd,db} + \Delta^\circ_{bd,ac}),\end{aligned} \tag{6}$$

gde $\Delta^\circ_{ij,kl}$ označava drugi kofaktor $i$-te i $k$-te vrste i $j$-te i $l$-te kolone.

Kofaktori determinante $\Delta^\circ$ u jednačinama (5) i (6) koji imaju po jedan zajednički indeks na istom položaju mogu se sabrati u parovima prema relacijama [3]:

$$\begin{aligned}\Delta^\circ_{ac} - \Delta^\circ_{bc} &= \Delta^\circ_{(a+b)\,c} = -\Delta^\circ_{(b+a)\,c}\\ \Delta^\circ_{ac} - \Delta^\circ_{ad} &= \Delta^\circ_{a\,(c+d)} = -\Delta^\circ_{a\,(d+c)}.\end{aligned} \tag{7}$$

U ovim relacijama $\Delta^\circ_{(a+b)\,c}$ označava prvi složeni kofaktor koji se dobija iz determinante $\Delta^\circ$ na taj način što se elementi $a$-te vrste dodaju elementima $b$-te vrste, izostavlja se $a$-ta vrsta i $c$-ta kolona i ovako dobijena determinanta pomnoži sa $(-1)^{a+c}$. Na isti način se obrazuje i kofaktor $\Delta^\circ_{a\,(c+d)}$ samo što se na mesto vrsta sabiraju odgovarajuće kolone.

Primenjujući uzastopno relacije (7) na sve parove prostih i složenih kofaktora koji imaju po jedan zajednički indeks na istom položaju, prvi i drugi izvod determinante u jednačinama (5) i (6) mogu se izraziti sažeto u obliku jednog složenog kofaktora:

$$\frac{d\Delta^\circ}{dZ_{gh}} = 2\,\Delta^\circ_{(a+b)\,(c+d)} \tag{8}$$

$$\frac{d^2\Delta^\circ}{dZ^2_{gh}} = -2\,\Delta^\circ_{(a+b)\,(a+b)',\,(c+d)\,(c+d)}\quad , \tag{9}$$

gde $(a+b)$ i $(c+d)$ označavaju složene indekse obrazovane prema gornjem postupku od indeksa $a$ i $b$ odnosno $c$ i $d$. Unošenjem poslednja dva izraza u jednačinu (4), dobija se konačno

$$\Delta = \Delta^\circ + 2\,Z_{gh}\,\Delta^\circ_{(a+b)\,(c+d)} - Z^2_{gh}\Delta^\circ_{(a+b)\,(a+b)',\,(c+d)\,(c+d)}. \tag{10}$$

Pokazaćemo sada da se svakom članu u ovoj determinanti može dati prosto topološko tumačenje. Ako mreža ima $m$ nezavisnih petlji, prvi član $\Delta^\circ$, kao determinanta impedansne matrice mreže bez međusobne induktivnosti, predstavlja zbir proizvoda impedansi od po $m$ grana jednog komplementa stabla (ko-stabla). Ovaj zbir označen je sa $L(Z)$ [2].

Iz samog načina obrazovanja složenog kofaktora $\Delta^\circ_{(a+b)\,(a+b)',\,(c+d)\,(c+d)}$ neposredno se zaključuje da on predstavlja determinantu impedansne matrice one mreže koja se izvodi iz date mreže, kada se ćelija $\mu_a$ zameni petljom $\mu_a+\mu_b$, a ćelija $\mu_c$ — petljom $\mu_c+\mu_d$. Kako ove dve petlje ne sadrže induktivno spregnute grane, jasno je da $\Delta^\circ_{(a+b)\,(a+b)',\,(c+d)\,(c+d)}$ mora predstavljati zbir proizvoda impedansi od po $m-2$ spojnica date mreže u kojoj su grane $\beta_g$ i $\beta_h$ uklonjene. Ovaj zbir ćemo označiti sa $L_{(ab)\,(cd)}(Z)$.

Dokazaćemo da koeficijent uz $2\,Z_{gh}$ u determinanti (10) predstavlja brojitelj prenosne admitanse između grana $\beta_g$ i $\beta_h$ kada one nisu induktivno spregnute.

Zaista, ako u mreži na sl. 1. smatramo da ne postoji međusobna indukcija i da u grani $\beta_g$ deluje naponski izvor elektromotorne sile $e_g$, čiji se pozitivni smer poklapa sa orijentacijom ove grane, jednačine ravnoteže mreže u ranije usvojenom koordinatnom sistemu su

$$\sum_{\nu=1}^{m} Z_{\mu\nu}\, i^\nu = \begin{cases} O, & \mu \neq a, b \\ e_g, & \mu = a \\ -e_g, & \mu = b \end{cases} \qquad \begin{matrix} (\mu = 1,\ 2, \ldots, m) \\ (a, b = 1,\ 2, \ldots, m) \end{matrix} \tag{11}$$

gde su $i^\nu$ $(\nu=1, 2, .., m)$ struje petlji, a $Z_{\mu\nu}$ — sopstvene $(\mu=\nu)$ i međusobne $(\mu \neq \nu)$ impedanse pojedinih petlji. Rešavanjem ovog sistema jednačina, dobijamo

$$
(12) \qquad
\begin{aligned}
i^c &= \frac{\Delta^0{}_{ac}-\Delta^0{}_{bc}}{\Delta^0}\, e_g \\
i^d &= \frac{\Delta^0{}_{ad}-\Delta^0{}_{bd}}{\Delta^0}\, e_g ,
\end{aligned}
$$

tako da je struja u grani $\beta_h$

$$
(13) \qquad i_h = i^c - i^d = \frac{\Delta^0{}_{ac}-\Delta^0{}_{bc}-\Delta^0{}_{ad}+\Delta^0{}_{bd}}{\Delta^0}\, e_g = \frac{\Delta^0{}_{(a+b)\,(c+d)}}{\Delta^0}\, e_g ,
$$

što potvrđuje naše tvrđenje.

Na osnovi ove konstatacije, i prema Kirchhoffovom pravilu [4], zaključujemo da $\Delta^0{}_{(a+b)\,(c+d)}$ predstavlja algebarski zbir proizvoda impedansi $m-1$ grana raznih subgrafova koje treba ukloniti iz date mreže da bi obe grane, $\beta_g$ i $\beta_h$, bile sastavni deo jedne petlje. Prema načinu određivanja znaka članova u ovom zbiru, možemo utvrditi da će proizvod od $m-1$ impedansi grana biti pozitivan ako je pozitivni smer obilaska petlje usmeren u obema granama prema kraju označenom sa tačkom ili prema neoznačenom kraju. U protivnom slučaju znak je negativan. U posebnom slučaju kada spregnute grane imaju jedan zajednički kraj, svi članovi u $\Delta^0{}_{(a+b)\,(c+d)}$ biće istog znaka. Ovaj kofaktor ćemo označiti sa $\bar{L}_{gh}(Z)$.

Sa gore uvedenim funkcijama grafa, determinantu mreže možemo pisati u obliku

$$
(14) \qquad \Delta = L(Z) + 2\, Z_{gh} \bar{L}_{gh}(Z) - Z^2_{gh}\, L_{(ab)\,(cd)}(Z),
$$

što predstavlja traženu topološku formulu. Prvi i treći član u ovoj formuli su uvek različiti od nule. Međutim, drugi član može biti jednak nuli ako je graf mreže odvojiv i svaka od spregnutih grana se nalazi u po jednom odvojenom delu.

Na isti način se može izvesti i topološka formula za simetrične prve kofaktore $\Delta_{kk}$ $(k=1, 2, .., m)$. Razvijanjem kofaktora $\Delta_{kk}$ po formuli (4) i koristeći potom jednačina (5) i (6) lako se dobija

$$
(15) \qquad \Delta_{kk} = \Delta^0{}_{kk} + 2\, Z_{gh}\, \Delta^0{}_{kk,\,(a+b)\,(c+d)} - Z^2_{gh}\, \Delta^0{}_{kk,\,(a+b)\,(a+b),\,(c+d)\,(c+d)}.
$$

Ako se koordinantni sistem tako izabere da petlja $\mu_k$ ima jednu granu zajedničku sa referentnom petljom $\mu_0$, jednačinu (15) možemo izraziti u obliku

$$
(16) \qquad \Delta_{kk} = L_{(ko)}(Z) + 2\, Z_{gh} \bar{L}_{(ko)\,gh}(Z) - Z^2_{gh}\, L_{(ko)\,(ab)\,(cd)}(Z),
$$

gde funkcije $L_{(ko)}(Z)$, $\bar{L}_{(ko)\,gh}(Z)$ i $L_{(ko)\,(ab)\,(cd)}(Z)$ imaju isti smisao kao odgovarajuće funkcije u jednačini (15), ali s tom razlikom što se posmatraju na grafu mreže sa prekinutom petljom $\mu_k$.

**4.** Na sličan način se može razviti i determinanta admitansne matrice mreže, $D$. Za pisanje admitansne matrice mreže, $Y_n$, potrebno je prethodno uvesti na mesto sopstvenih impedansi grana $Z_\nu$ $(\nu \neq g, h)$ — njihove admitanse $Y_\nu = Z_\nu^{-1}$. Pri tome sopstvene admitanse spregnutih grana i admitansa međusobne indukcije se određuju iz jednačina [2]

$$(17) \qquad Y_g = \frac{Z_h}{Z_g Z_h - Z_{gh}^2}; \qquad Y_h = \frac{Z_g}{Z_g Z_h - Z_{gh}^2}; \qquad Y_{gh} = \frac{-Z_{gh}}{Z_g Z_h - Z_{gh}^2}.$$

Ako se za matricu skupa nezavisnih preseka uzme matrica preseka oko čvorova, tada $Y_{gh}$ zauzima u matrici $Y_n$ isti položaj kao $Z_{gh}$ u impedansnoj matrici mreže $Z_m$. To znači da će i formula za razvijanje determinante $D$ biti istog oblika kao (10), tj.

$$(18) \qquad D = D^0 + 2\, Y_{gh}\, D^0{}_{(p+q)\,(r+s)} - Y_{gh}^2\, D^0{}_{(p+q)\,(p+q),\,(r+s)\,(r+s)},$$

gde $p$ i $q$ odnosno $r$ i $s$ respektivno označavaju indekse čvorova $\gamma_p$, $\gamma_q$ i $\gamma_r$, $\gamma_s$ između kojih su vezane grane $\beta_g$ i $\beta_h$ (sl. 1).

U ovom izrazu $D^0$ predstavlja determinantu admitansne matrice mreže bez međusobne induktivnosti. Ova determinanta je jednaka zbiru proizvoda admitansi od po $n$ grana jednog stabla, gde je $n$ ukupni broj čvorova u mreži umanjen za jedan.

$D^0{}_{(p+q)\,(p+q),\,(r+s)\,(r+s)}$ predstavlja determinantu admitansne matrice one mreže koja se dobija iz date, međusobnim sjedinjavanjem parova čvorova $\gamma_p$, $\gamma_q$ i $\gamma_r$, $\gamma_s$ i odstranjivanjem iz mreže spregnutih grana. Stoga je ova determinanta jednaka zbiru proizvoda admitansi od po $n-2$ grana jednog stabla ovako dobijene mreže.

Kofaktor $D^0{}_{(p+q)\,(r+s)}$ jednak je algebarskom zbiru proizvoda admitansi od po $n-1$ grana raznih subgrafova koji ne sadrže ni jednu petlju, pri čemu kada se grane jednog takvog subgrafa kratko-spoje, ostaje jedan par čvorova između kojih se grane $\beta_g$ i $\beta_h$ nalaze vezane paralelno. Znak nekog člana u zbiru je pozitivan, ako se nakon paralelnog sjedinjavanja grana $\beta_g$ i $\beta_h$, krajevi označeni sa tačkom vezuju u jedan čvor, u protivnom slučaju znak je negativan. U ovo tvrđenje se uveravamo na isti način kao ranije, pokazujući da $D^0{}_{(p+q)\,(r+s)}$ predstavlja brojitelj prenosne impedanse između grana $\beta_g$ i $\beta_h$ u odsustvu međusobne indukcije.

Stavljajući $T(Y) = D^0$, $\overline{T}_{gh}(Y) = D^0{}_{(p+q)\,(r+s)}$ i $T_{(pq)\,(rs)} = D^0{}_{(p+q)\,(p+q),\,(r+s)\,(r+s)}$, dobija se topološka formula za razvijanje determinante admitansne matrice mreže

$$(19) \qquad D = T(Y) + 2\, Y_{gh}\, \overline{T}_{gh}(Y) - Y_{gh}^2\, T_{(pq)\,(rs)}(Y).$$

Simetrični kofaktori ove determinante $D_{kk}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, izračunavaju se tada po formuli

$$(20) \qquad D_{kk} = T_{(ko)}(Y) + 2\, Y_{gh}\, \overline{T}_{(ko)\,gh}(Y) - Y_{gh}^2\, T_{(ko)\,(pq)\,(rs)}(Y),$$

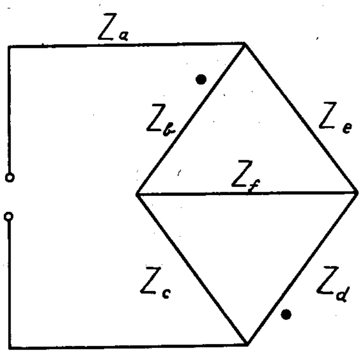
gde funkcije $T_{(ko)}(Y)$, $\overline{T}_{(ko)\,(gh)}(Y)$ i $T_{(ko)\,(pq)\,(rs)}(Y)$ predstavljaju respektivno iste funkcije kao u jednačini (19) s tom razlikom što se odnose na graf mreže u kojoj je čvor $\gamma_k$ sjedinjen sa referentnim čvorom mreže $\gamma_0$.

I ovde možemo primetiti da prvi i treći član u jednačinama (19) i (20) su uvek različiti od nule, dok drugi član je identički jednak nuli ako se svaka od spregnutih grana nalazi u po jednom odvojenom delu mreže.

**5.** Gore izvedene topološke formule primenićemo na određivanje ulazne admitanse mreže sa jednim parom krajeva prema slici 2.

Zbir proizvoda impedansi svih ko-stabala mreže je

$$L(Z)=Z_aZ_bZ_c+Z_aZ_bZ_d+Z_aZ_bZ_f+Z_aZ_cZ_e+$$
$$+Z_aZ_cZ_f+Z_aZ_dZ_e+Z_aZ_dZ_f+Z_aZ_eZ_f+$$
$$+Z_bZ_cZ_d+Z_bZ_cZ_e+Z_bZ_dZ_e+Z_bZ_dZ_f+$$
$$+Z_bZ_eZ_f+Z_cZ_dZ_e+Z_cZ_dZ_f+Z_cZ_eZ_f.$$




Sl. 2

Uzimajući sistem petlji: $\mu_1=(Z_a, Z_b, Z_c)$; $\mu_2=(Z_b, Z_e, Z_f)$ i $\mu_3=(Z_c, Z_f, Z_d)$, izvodimo i ove dve funkcije:

$$\overline{L}_{bd}(Z)=Z_aZ_f-Z_cZ_e,$$

$$L_{(12)(30)}(Z)=Z_a+Z_c+Z_e+Z_f.$$

Prema jednačini (14) determinanta mreže je

$$\triangle=L(Z)+2Z_{bd}(Z_aZ_f-Z_cZ_e)-Z_{bd}^2(Z_a+Z_c+Z_e+Z_f),$$

gde je $Z_{bd}=pL_{bd}$. Isto tako neposredno određujemo i sledeće funkcije na grafu mreže sa prekinutom petljom $\mu_1$:

$$L_{(10)}(Z)=Z_bZ_c+Z_bZ_d+Z_bZ_f+Z_cZ_e+Z_cZ_f+Z_dZ_e+Z_dZ_f+Z_eZ_f;$$

$$\overline{L}_{(10)bd}(Z)=Z_f \text{ i } L_{(10)(12)(30)}(Z)=1,$$

tako da je $\triangle_{11}=L_{(10)}(Z)+2Z_{bd}Z_f-Z_{bd}^2$. Stoga je ulazna admitansa mreže

$$Y_{ul}=\frac{\triangle_{11}}{\triangle}.$$

## LITERATURA


[1]. A. C. Aitken: *Determinants and Matrices*, Edinbourgh — London, 1949.

[2]. R. Horvat i dr.: *Primena topoloških metoda na analizu i sintezu električnih mreža*, Institut „Nikola Tesla" Beograd 1962. (Republički fond za naučni rad NRS, ugovor br. 2440/1),

[3]. V. P. Sigorskij: *O nekotorih operacijah nad opredeliteljah i ih algebraičeskimi dopolniteljami*, „Avtomat. kontrolj i izmerit. tehnika" Izd. AN USSR, 1959, vip. 3.

[4]. L. Weinberg: *Kirchhoff's Third and Fourth Laws*, Trans. IRE, vol. CT-5, №.1 (March 1958), 8 — 30.

Summary

## A TOPOLOGICAL EXPANSION OF THE NETWORK DETERMINANT

*Mirko M. Milić*

The paper deals with the evaluation of a topological formula for the determinant of the loop-impedance and node-admittance matrices of a network, that may include all kinds of two-terminal elements and a pair of mutually coupled branches.

The loop determinant is expanded as a polynomial of the mutual impedance between the coupled branches, and it is proved that the coefficients of this polynomial can be interpreted as functions associated with the network graph without mutal inductance.

Thus, explicit topological formulas for the loop determinant (eq. 14) and first symmetrical cofactors (eq. 16) may be obtained that involve only Kirchoff-Maxwell rules for ordinary RLC—networks.

Dual topological formulas for the node determinant and its first symmetrical cofactors are also possible (eqs. 19 and 20).