PUBLIKACIJE ELEKTROTEHNIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U BEOGRADU
PUBLICATIONS DE LA FACULTÉ D'ÉLECTROTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ À BELGRADE

SERIJA: MATEMATIKA I FIZIKA — SÉRIE: MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

№ 108 (1963)

COMPLÉMENTS AU TRAITÉ DE KAMKE. NOTE IX.

D. S. Mitrinović et *D. Ž. Djoković*

(Reçu le 4 avril 1963)

I

Dans [1] on trouve les équations différentielles

$$y''' + 3fy'' + (f' + 2f^2 + 4g)\, y' + (4fg + 2g')\, y = 0\,, \tag{1}$$

$$y^{(4)} + 10fy'' + 10f'y' + 3\,(f'' + 3f^2)\, y = 0\,, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} y^{(4)} + 6fy''' + (4f' + 11f^2 + 10g)\, y'' + (f'' + 7ff' + 6f^3 + 30fg + 10g')\, y' \\ + 3\,(2f'g + 5fg' + 6f^2g + g'' + 3g^2)\, y = 0\,, \end{aligned} \tag{3}$$

avec $f = f(x)$, $g = g(x)$. On y trouve aussi leurs solutions générales dans la forme

$$y = C_1 u^2 + C_2 uv + C_3 v^2\,, \tag{1'}$$

$$y = C_1 u^3 + C_2 u^2 v + C_3 uv^2 + C_4 v^3\,, \tag{2'}$$

$$y = C_1 u^3 + C_2 u^2 v + C_3 uv^2 + C_4 v^3\,, \tag{3'}$$

où u et v représentent un système fondamental de solutions des équations différentielles

$$y'' + f(x)\, y' + g(x)\, y = 0\,, \tag{1''}$$

$$y'' + f(x)\, y = 0\,, \tag{2''}$$

$$y'' + f(x)\, y' + g(x)\, y = 0\,. \tag{3''}$$

Il est évident que ces résultats admettent des généralisations diverses. Dans le cas général, la réduction effective est certainement très compliquée. Nous nous bornerons ici au cas de réduction d'une équation particulière du cinquième ordre à l'équation du second ordre.

II

Soit u, v un système fondamental de solutions de l'équation différentielle

$$y'' = f(x)\, y\,. \tag{4}$$

Posons

$$A = y_1 y_2 y_3 y_4 ,$$

$$B = y_1' y_2 y_3 y_4 + y_1 y_2' y_3 y_4 + y_1 y_2 y_3' y_4 + y_1 y_2 y_3 y_4' ,$$

$$C = y_1' y_2' y_3 y_4 + y_1' y_2 y_3' y_4 + y_1' y_2 y_3 y_4' + y_1 y_2' y_3' y_4 + y_1 y_2' y_3 y_4' + y_1 y_2 y_3' y_4' ,$$

$$D = y_1 y_2' y_3' y_4' + y_1' y_2 y_3' y_4' + y_1' y_2' y_3 y_4' + y_1' y_2' y_3' y_4 ,$$

$$E = y_1' y_2' y_3' y_4' ,$$

où $y_i\,(i=1, 2, 3, 4)$ désignent des solutions quelconques de l'équation (4). Par différentiation, on obtient

$$z = A ,$$

$$z' = B ,$$

$$z'' = 4fA + 2C ,$$

$$z''' = 4f'A + 10fB + 6D ,$$

$$z^{(4)} = 4(10f^2 + f'')A + 14f'B + 32fC + 24E ,$$

$$z^{(5)} = 4(34ff' + f''')A + 2(68f^2 + 9f'')B + 60f'C + 120fD ,$$

car on peut remplacer y_i'' par $fy_i\,(i=1, 2, 3, 4)$.

Par élimination des A, B, C, D, E, il vient

$$\begin{vmatrix} z & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z' & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ z'' & 4f & 0 & 2 & 0 & 0 \\ z''' & 4f' & 10f & 0 & 6 & 0 \\ z^{(4)} & 40f^2 + 4f'' & 14f' & 32f & 0 & 24 \\ z^{(5)} & 136ff' + 4f''' & 136f^2 + 18f'' & 60f' & 120f & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

En évaluant le déterminant qui figure dans la dernière équation, on arrive à l'équation différentielle suivante

$$z^{(5)} - 20fz''' - 30f'z'' + 2(32f^2 - 9f'')z' + 4(16ff' - f''')z = 0 . \tag{5}$$

Si $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = u$, on conclut que la fonction $z = u^4$ satisfait à l'équation (5). Si $y_1 = y_2 = y_3 = u$, $y_4 = v$, on obtient que $z = u^3 v$ satisfait à l'équation (5), et ainsi de suite. Donc, la solution générale de l'équation (5) a la forme suivante

$$z = C_1 u^4 + C_2 u^3 v + C_3 u^2 v^2 + C_4 u v^3 + C_5 v^4 , \tag{6}$$

où $C_i\,(i=1, 2, 3, 4, 5)$ sont des constantes arbitraires.

RÉFÉRENCE

[1] E. Kamke: *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen*, erster Teil, Leipzig 1959.